ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

37

BERLIN
MAYER & MÜLLER
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

UPPSALA & STOCKHOLM
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
1914

PARIS
A. HERMANN & FILS.
6 RUE DE LA SORBONNE.

UPPSALA 1914
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

INHALTSVERZEICHNIS — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 37. — 1914. — TOME 37.

SUR LA MEILLEURE APPROXIMATION DE $|x|$ PAR DES POLYNOMES DE DEGRÉS DONNÉS.

PAR

SERGE BERNSTEIN

À KHARKOW.

Dans la seconde partie du Mémoire[1] »Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné» j'ai exposé une méthode générale pour la recherche des polynomes d'approximation d'une fonction continue quelconque. Cette méthode consiste essentiellement à introduire un paramètre variable et à développer les polynomes d'approximation en séries de TAYLOR par rapport à ce paramètre. J'ai appliqué, en particulier, cette méthode à la meilleure approximation de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$; et quoique c'est ainsi — il est peut-être utile de le rappeller à ceux qui voudront aborder des questions analogues — que je fus mis sur la voie de la solution complète de ce problème, je me suis bientôt aperçu que, pour arriver plus rapidement au but, il est avantageux d'abandonner la marche générale en se laissant guider par les particularités de la question.

En exposant à présent l'ensemble des résultats relatifs à la meilleure approximation de $|x|$ que j'ai obtenus jusqu'ici, et qui dépassent considérablement ceux qui se trouvent dans le memoire mentionné, je pourrai donc ne faire aucun appel à la théorie générale, ce qui évitera au lecteur la nécessité de s'adresser à ce Mémoire.

Mon étude actuelle se divise en deux parties: partie élémentaire et partie transcendante. Dans la première partie, par des procédés entièrement algébriques, on démontre que *la meilleure approximation E_{2n} de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynome de degré $2n$ satisfait, quel que soit $n > 0$, aux inégalités*

[1] Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique. 1912.

$$\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

Dans la seconde partie on cherche la valeur asymptotique de E_{2n}. Le résultat essentiel de cette recherche est que *le produit $2n \,.\, E_{2n}$ tend vers une limite fixe λ, lorsque n croît indéfiniment.* La démonstration de ce théorème, et le calcul approché de λ, qui, avec une erreur moindre que 0,004 se trouve être égale à 0,282 sortent naturellement du domaine de l'algèbre.

Première Partie.

Etude algébrique de la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degré donné.

1. *Définition.* Nous dirons que le polynome

$$P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n} \tag{1}$$

est un *polynome oscillateur,* dans l'intervalle 0 1, relatif à la suite d'exposants non négatifs $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, s'il atteint son module maximum en $(n+1)$ points de l'intervalle. Le nombre n est *l'ordre* du polynome oscillateur. Nous pouvons admettre ici, pour simplifier un peu, que les nombres α_i sont des entiers.

2. *Examen de deux cas particuliers.* Considérons deux cas, où les polynomes oscillateurs se déterminent sans difficultés.

1^er^ cas. $\alpha_i = 2i+1$. Le polynome trigonométrique

$$P_{2n+1}(x) = L\cos(2n+1)\arccos x = \frac{L}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^{2n+1} + (x-\sqrt{x^2-1})^{2n+1}\right] \tag{2}$$

est manifestement un polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants: 1, 3, $\cdots$ $2n+1$, car il atteint son module maximum L en $(n+1)$ points de l'intervalle 0 1: 1, $\cos\frac{\pi}{2n+1}$, $\cdots \cos\frac{n\pi}{2n+1}$. Le calcul explicite des coefficients de ces polynomes ne présente pas de difficulté: il suffit de former l'équation différentielle

$$(1-x^2)P''_m(x) - xP'_m(x) + m^2 P_m(x) = 0, \tag{3}$$

à laquelle satisfait

$$P_m(x) = L\cos m \arccos x;$$

l'expression (2) donne directement le coefficient $2^{m-1}L$ de x^m, et ensuite les coefficients se déterminent de proche en proche par la condition d'identifier l'équation (3). On a ainsi

$$(4)\quad \begin{aligned} P_m(x) = L \cos m \arccos x = \frac{L}{2}\Big[& 2^m x^m - m\,.\,2^{m-2} x^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2!} \cdot 2^{m-4} x^{m-4} + \\ & + \cdots + (-1)^l \cdot \frac{m(m-l-1)\cdots(m-2l+1)}{l!} \cdot 2^{m-2l} x^{m-2l} + \cdots \Big] \end{aligned}$$

2me cas.[1] $\alpha_i = i$.

Le polynome

$$\begin{aligned} P_{2n}(\sqrt{x}) = L \cos 2n \arccos \sqrt{x} &= \frac{L}{2}[(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^{2n} + (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^{2n}] = \\ &= \frac{L}{2}\Big[2^{2n}x^n - 2n\,.\,2^{2n-2}x^{n-1} + \cdots + \\ & + (-1)^l \cdot \frac{2n(2n-l-1)(2n-l-2)\cdots(2n-2l+1)}{l!} 2^{2n-2l}\,.\,x^{n-l} + \cdots\Big] \end{aligned}$$

sera également un polynome oscillateur pour la suite d'exposants: 0, 1, 2, $\cdots n$, puisqu'il atteint son module maximum L aux $n + 1$ points; $\cos^2 \frac{i\pi}{2n}$ ou $\frac{1 + \cos\frac{i\pi}{n}}{2}$

3. *Théorème de Descartes.* Le nombre de racines positives de l'équation

$$P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n} = 0$$

ne peut dépasser le nombre de variations de signe des coefficients. En particulier, l'équation $P(x) = 0$ n'aura jamais plus de n racines positives; d'ailleurs l'équation $P(x) = 0$ ne pourra avoir n racines positives que, lorsque ses coefficients seront de signes alternés.

4. *Lemme. Les coefficients d'un polynome oscillateur sont de signes alternés; les extrema successifs d'un polynome oscillateur sont de signes contraires.*

En effet, soit d'abord $\alpha_0 = 0$. Alors l'équation dérivée

$$P'(x) = \alpha_1 A_1 x^{\alpha_1 - 1} + \cdots + \alpha_n A_n x^{\alpha_n - 1} = 0$$

devra avoir au moins $n - 1$ racines positives qui sont les valeurs de x à l'intérieur du segment 0 1, où $|P(x)|$ atteint son maximum absolu. De plus, $P'(x) = 0$ ne pouvant avoir d'autres racines positives, $|P(x)|$ atteindra, en outre, son maximum absolu aux deux bords: 0 et 1, et il ne pourra exister d'extrema relatifs entre deux extrema absolus; tous les $(n + 1)$ extrema seront donc nécessairement de signes contraires. Par conséquent, l'équation $P(x) = 0$ aura n racines positives; ses coefficients seront donc de signes alternés.

[1] Je ne connais pas d'autres polynomes oscillateurs que ceux dont les exposants forment une progression arithmétique. Il serait important de construire explicitement des polynomes oscillateurs, pour lesquels la loi des exposants soit différente.

Si $\alpha_0 > 0$, le polynome $P(x)$ s'annule pour $x = 0$. Par conséquent, son module maximum est atteint, cette fois, au moins en n points intérieurs au segment $0\ 1$ qui sont les racines de l'équation

$$P'(x) = \alpha_0 A_0 x^{\alpha_0 - 1} + \alpha_1 A_1 x^{\alpha_1 - 1} + \cdots + \alpha_n A_n x^{\alpha_n - 1} = 0.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \cdots, A_n$ sont donc de signes alternés; de plus, l'équation $P'(x) = 0$ n'ayant d'autres racines positifs, les extrema successifs de $P(x)$ sont également de signes alternés. *c.q.f.d.*

5. Théorème. *Si* $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ *est un polynome oscillateur et* $Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i x^{\alpha_i}$ *est un autre polynome contenant les mêmes puissances de x dans lequel un des coefficients* $B_{i_0} = A_{i_0}$ (en supposant $\alpha_{i_0} > 0$), *le maximum de* $|Q(x)|$ *est supérieur au maximum de* $|P(x)|$ *dans l'intervalle* $0\ 1$.

En effet, si le module de $Q(x)$ ne devenait pas supérieur au module maximum de $P(x)$, on aurait, aux $(n+1)$ points successifs $x_k (k = 0, 1, \cdots n)$, où le maximum de $|P(x)|$ est atteint,

$$(-1)^k . [P(x_k) - Q(x_k)] \geq 0$$

(ou bien une inégalité inverse en *tous* les $(n+1)$ points).

Par conséquent, l'équation

$$P(x) - Q(x) = 0$$

aurait au moins n racines positives; mais, puisqu'elle ne contient que n termes (à cause de $B_{i_0} = A_{i_0}$), ceci est imposible. Le théorème est donc démontré.

Réciproque. *Si le module maximum de* $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ *est inférieur au module maximum d'un polynome quelconque* $Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i x^{\alpha_i}$ *contenant les mêmes puissances de x et tel que* $B_{i_0} = A_{i_0}$, *le polynome* $P(x)$ *est un polynome oscillateur.*

En effet, admettons que $P(x)$ n'est pas un polynome oscillateur; de sorte que le nombre h de points x_k, où son module maximum L est atteint, est inférieur à $n+1$. Dans ces conditions, on pourra construire un polynome $R(x) = C_0 x^{\alpha_0} + \cdots + C_{i_0 - 1} x^{\alpha_{i_0} - 1} + C_{i_0 + 1} x^{\alpha_{i_0} + 1} + \cdots + C_n x^{\alpha_n}$ tel que $R(x_k) = P(x_k)$, car, aucun des x_k ne pouvant être nul, si $\alpha_0 > 0$, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_1^{a_h} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_h^{a_0} \; x_h^{a_1} \dots x_h^{a_h} \end{vmatrix} = D_0 x_1^{a_0} + \cdots + D_{i_0-1} x_1^{a_{i_0}-1} + D_{i_0+1} x_1^{a_{i_0}+1} + \cdots + D_h x_1^{a_h}$$

est différent de zéro, en vertu du théorème de DESCARTES. Entourons ensuite les points x_k de petits intervalles, où $R(x)$ et $P(x)$ conservent leurs signes, et remarquons qu'en dehors de ces intervalles $|P(x)| < L - \varepsilon$, ε étant un nombre positif déterminé. Par conséquent, le polynome

$$H(x) = P(x) - \lambda R(x) = (A_0 - \lambda C_0)x^{a_0} + \cdots + A_{i_0} x^{a_{i_0}} + \cdots + (A_n - \lambda C_n)x^{a_n}$$

aurait son module maximum inférieur à celui de $P(x)$, si l'on prenait le nombre positif λ assez petit pour avoir sur tout le segment o 1

$$\lambda |R(x)| < \varepsilon.$$

Il est donc nécessaire que le polynome $P(x)$ soit un polynome oscillateur.

6. Corollaires. a. *Un polynome quelconque*

$$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

de degré n *ne peut dans l'intervalle* o 1 *rester inférieur en valeur absolue au plus grand des nombres*

$$|A_0|, \dots, \left|\frac{A_{n-l} \cdot l!}{2^{2n-2l} \cdot n(2n-l-1)(2n-l-2)\dots(2n-2l+1)}\right|, \dots, \left|\frac{A_{n-1}}{n \cdot 2^{2n-2}}\right|, \left|\frac{A_n}{2^{2n-1}}\right|.$$

Réciproquement, si L *est le module maximum de* $P(x)$ *dans l'intervalle* o 1, *on a nécessairement*

$$|A_{n-l}| \leq \frac{2^{2n-2l} \cdot n(2n-l-1)(2n-l-2)\dots(2n-2l+1)}{l!} L. \tag{5}$$

Cela résulte de l'application du théorème précédent au cas, où $a_i = i$, pour lequel nous avons construit au § 2 le polynome oscillateur

$$P_{2n}(\sqrt{x}) = L \cos 2n \arccos \sqrt{x}.$$

Remarque. On voit pourtant que l'affirmation relative à A_0, évidente par le fait que $P(0) = A_0$, n'est pas une conséquence du théorème précédent.

b. *Un polynome de la forme*[1]

$$P(x) = A_0 x + A_1 x^3 + \cdots + A_n x^{2n+1}$$

[1] Voir aussi le mémoire de W. MARKOW »Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro«, (en russe) publié par l'Université de St. Pétersbourg, 1892.

ne peut rester dans l'intervalle o I *inférieur en valeur absolue au plus grand des nombres*

$$\left|\frac{A_0}{2n+1}\right|, \ldots, \left|\frac{A_{n-l}\,.\,l!}{2^{2n-2l}\,.\,(2n+1)(2n-2l)\ldots(2n-l)}\right|, \ldots, \left|\frac{A_n}{2^{2n}}\right|;$$

et réciproquement, si L est le module maximum de $P(x)$, on a nécessairement $|A_0| < (2n+1)L$, *etc.*

Cela résulte également de la considération du polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants $1, 3, \ldots, 2n+1$.

7. Théorème. *Il existe dans l'intervalle* o I *un polynome oscillateur et un seul relatif à une suite d'exposants donnée et ayant un de ses coefficients arbitrairement donné.*

En effet, il suffira de démontrer que parmis les polynomes de la forme

$$Q(x) = B_0 x^{\alpha_0} + \cdots + B_{i_0-1}x^{\alpha_{i_0}-1} + A_{i_0}x^{\alpha_{i_0}} + B_{i_0+1}x^{\alpha_{i_0}+1} + \cdots + B_n x^{\alpha_n},$$

où les exposants α sont donnés ainsi que le coefficient A_{i_0}, il en existe un dont le module maximum est le plus petit possible dans l'intervalle o I. Or le module maximum de chaque polynome $Q(x)$ est une fonction continue de ses coefficients B. La limite inférieure de ce maximum qui n'est pas nulle, en vertu du corollaire (6, a), ne dépasse pas certainement $|A_{i_0}|$; par conséquent, en vertu du même corollaire, on ne considérera que les coefficients B_i satisfaisant aux inégalités

$$|B_i| \leq \frac{2^{2\alpha_i\alpha_n}\,.\,(\alpha_n+\alpha_i-1)(\alpha_n+\alpha_i-2)\ldots(2\alpha_i+1)}{(\alpha_n-\alpha_i)!}|A_{i_0}|;$$

les valeurs des variables B_i formant des ensembles fermés, il existera certainement au moins un système de valeurs des B_i qui réalisera le minimum.

En vertu du théorème (5), le polynome oscillateur sera unique, pourvu que $\alpha_{i_0} > 0$. Donc, en général, tous les polynomes oscillateurs relatifs à une suite d'exposants donnée ne peuvent différer que par un facteur constant. Par conséquent, si l'on se donne arbitrairement le coefficient A_0, le facteur de proportionnalité se trouvera également déterminé sans ambiguité. Le théorème est donc démontré.

8. Théorème. *Si on a deux polynomes oscillateurs*

$$P(x) = x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_n x^{\alpha_n} \text{ et } Q(x) = x^{\alpha_0} + B_1 x^{\beta_1} + \cdots + B_n x^{\beta_n},$$

où $0 < \alpha_0 < \beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n < \alpha_n$, *le module maximum de $P(x)$ dans l'intervalle* o I *sera supérieur à celui de $Q(x)$.*

En effet, nous savons (lemme 4) que les coefficients de $P(x)$ sont de signes alternés; par conséquent, les coefficients de

$$Q(x) - P(x) = B_1 x^{\beta_1} - A_1 x^{\alpha_1} + B_2 x^{\beta_2} - \cdots + B_n x^{\beta_n} - A_n |x^{\alpha_n}$$

ne pourront présenter plus de n variations de signe.

L'équation

$$Q(x) - P(x) = 0 \tag{6}$$

aura donc, au plus, n racines positives. Si le module maximum de $Q(x)$ était supérieur ou égal à celui de $P(x)$, la différence $Q(x_k) - P(x_k)$ aurait le signe de $Q(x_k)$ (ou serait nulle) en tous les points x_k où $|Q(x)|$ est maximum. Par conséquent, l'équation (6) aurait nécessairement n racines positives $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, satisfaisant aux inégalités

$$x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq \xi_n \leq x_{n+1};$$

de sorte que dans l'intervalle $0\xi_1$ la différence $Q(x) - P(x)$ aurait le signe de B_1 qui est négatif, et, d'une façon générale, dans l'intervalle $\xi_i \xi_{i+1}$ la différence $Q(x) - P(x)$ aura le signe de $(-1)^{i+1}$. De plus, le nombre des x_i étant supérieur à celui des ξ_i; il y aura au moins un x_i tel que $\xi_{i-1} < x_i < \xi_i$, si l'on convient de remplacer dans cette inégalité ξ_0 par 0 et ξ_{n+1} par ∞. On aurait en ce point x_i

$$[Q(x_i) - P(x_i)] \cdot (-1)^i > 0,$$

et, par conséquent, aussi

$$Q(x_i) \cdot (-1)^i > 0.$$

Or, on a $Q(x_1) > 0$, (puisque, pour des valeurs positives voisines de 0, $Q(x)$ a le signe de son premier terme), donc $Q(x_2) < 0$, et, en général, $Q(x_i) \cdot (-1)^i < 0$. Nous arrivons ainsi à une contradiction.

Le théorème est donc démontré.

9. Théorème. *Si on a deux polynomes oscillateurs*

$$P(x) = A_0 x^{\alpha_0} + \cdots + A_{i-1} x^{\alpha_{i-1}} + x^m + A_{i+1} x^{\alpha_{i+1}} + \cdots + A_n x^{\alpha_n}$$

et

$$Q(x) = B_0 x^{\beta_0} + \cdots + B_{i-1} x^{\beta_{i-1}} + x^m + B_{i+1} x^{\beta_{i+1}} + \cdots B_n x^{\beta_n}$$

le module maximum de $P(x)$ est supérieur à celui de $Q(x)$, si $0 < \alpha_0 < \beta_0 < \cdots < \alpha_{i-1} < \beta_{i-1} < m < \beta_{i+1} < \alpha_{i+1} < \cdots < \beta_n < \alpha_n$.

En effet, les coefficients de l'équation

$$P(x) - Q(x) = A_0 x^{\alpha_0} - B_0 x^{\beta_0} + \cdots + A_{i-1} x^{\alpha_{i-1}} - B_{i-1} x^{\beta_{i-1}} - B_{i+1} x^{\beta_{i+1}}$$
$$+ A_{i+1} x^{\alpha_{i+1}} - \cdots - B_n x^{\beta_n} + A_n x^{\alpha_n} = 0$$

ne présentent pas plus de n variations de signes. Donc le nombre de racines positives de l'équation

$$P(x) - Q(x) = 0 \tag{6bis}$$

ne dépasse pas n. Si le module maximum de $P(x)$ n'était pas supérieur à celui de $Q(x)$, on aurait aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, où $|Q(x)|$ est maximum,

$$[P(x_k) - Q(x_k)] \,.\, Q(x_k) \leq 0;$$

ou bien, si l'on remarque que $Q(x_1)$ a le signe de A_0 qui est celui de $(-1)^i$, on en conclut que $Q(x_k)$ a le signe de $(-1)^{i+k-1}$, et par conséquent

$$[P(x_k) - Q(x_k)] \,.\, (-1)^{i+k} \geq 0. \tag{7}$$

En désignant par $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les racines de l'équation (6^{bis}), on en déduit que

$$x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq \xi_n \leq x_{n+1}.$$

D'autre part, la différence $P(x) - Q(x)$ aura pour de petites valeurs positives de x le signe de son premier terme A_0; de sorte que dans l'intervalle $0\,\xi_1$ on a $[P(x) - Q(x)] \,.\, (-1)^i > 0$, et dans un intervalle $\xi_{k-1}\,\xi_k$, on a, en général, $[P(x) - Q(x)] \,.\, (-1)^{i+k-1} > 0$.

Il y aurait donc au moins un point x_k, où

$$[P(x_k) - Q(x_k)] \,.\, (-1)^{i+k-1} > 0;$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (7).

Le théorème est donc démontré.

10. Corollaire. *Le polynome oscillateur*

$$P(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}$$

reste, dans l'intervalle $0\ 1$, *inférieur en valeur absolue à* $\frac{1}{2n+1}$; *au contraire, le module maximum du polynome* $P_1(x) = x + b_1 x^4 + \cdots + b_n x^{2n+2}$ *doit être supérieur à* $\frac{1}{2n+1}$.

En effet,

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} \cos(2n+1) \arccos x = x + B_1 x^3 + \cdots + B_n x^{2n+1}$$

est le polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants: $1, 3, \ldots 2n+1$; son module maximum étant égal à $\frac{1}{2n+1}$, le module maximum de $P(x)$ devra être inférieur et celui de $P_1(x)$ supérieur à $\frac{1}{2n+1}$ (en vertu du théorème 8).

11. Théorème. *Le module maximum E'_{2n} du polynome oscillateur*

$$P(x) = x + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{2n}$$

satisfait aux inégalités

$$\frac{1}{2n+1} > E'_{2n} > \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}, \tag{8}$$

si $n > 1$. Dans le cas, où $n = 1$, on a

$$E'_{2n} = E'_2 = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

On vérifie d'abord la dernière partie de l'énoncé, en remarquant que, pour $n = 1$, le polynome oscillateur se réduit à

$$P(x) = x - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) x^2,$$

son module maximum, $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$, étant atteint pour $x = 1$ et pour $x = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$.

Examinons à présent le cas de $n > 1$; l'inégalité

$$\frac{1}{2n+1} > E'_{2n}$$

résulte du § précédent. D'autre part, on a par hypothèse,

$$|x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{2n}| < E'_{2n} \tag{9}$$

sur le segment 0 1. Donc, a fortiori, pour toute valeur positive de u, aura-t-on également

$$\left| \frac{x}{1+u} + a_1 \left(\frac{x}{1+u}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{x}{1+u}\right)^{2n} \right| < E'_{2n}$$

ou bien

$$|x(1+\mu) + a_1 x^2 + \cdots + a'_n x^{2n}| \leq E'_{2n}(1+\mu)^2$$

En retranchant de cette dernière inégalité l'inégalité (9), on trouve une inégalité de la forme

$$|\mu(x + B_1 x^4 + \cdots + B_{n-1} x^{2n})| \leq E'_{2n}[(1+\mu)^2 + 1],$$

ou encore,

$$|x + B_1 x^4 + \cdots + B_{n-1} x^{2n}| \leq E'_{2n} \frac{(1+\mu)^2 + 1}{\mu}.$$

Or, d'après le corollaire précédent, le module du polynome $x + B_1 x^4 + \cdots + B_{n-1} x^{2n}$ doit dépasser $\frac{1}{2n-1}$ dans l'intervalle o 1. Donc,

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \frac{(1+\mu)^2 + 1}{\mu}$$

ou

$$E'_{2n} > \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{\mu}{(1+\mu)^2 + 1}.$$

En posant, enfin, pour rendre le second membre aussi grand que possible, $\mu = \sqrt{2}$, on obtient

$$E'_{2n} > \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

c. q. f. d.

12. Lemme. *Le module maximum E_{2n} du polynome oscillateur de la forme $P(x) = A_0 + x + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_n x^{2n}$ satisfait aux inégalités*

$$\frac{1}{2} E'_{2n} < E_{2n} < E'_{2n},$$

quel que soit $n > 0$.

En effet, l'inégalité $E_{2n} < E'_{2n}$ est une conséquence du théorème 5. D'autre part,

$$P(x) - A_0 = x + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_n x^{2n}$$

ne saurait être un polynome oscillateur. Par conséquent, son module maximum qui ne dépasse pas $E_{2n} \pm A_0 \leq 2E_{2n}$ est supérieur (en vertu du même théorème) à E'_{2n}. Donc, $2E_{2n} > E'_{2n}$ ou bien

$$E_{2n} > \frac{1}{2} E'_{2n}.$$

c. q. f. d.

Corollaire. *Le module maximum E_{2n} du polynome oscillateur de la forme $P(x) = A_0 + x + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \cdots + A_n x^{2n}$ satisfait aux inégalités*

$$\frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} < E_{2n} < \frac{1}{2n-1}, \tag{10}$$

quel que soit $n > 0$.

13 Théorème. *La meilleure approximation de $|x|$ sur le segment $(-h, +h)$ par un polynome de degré $2n$ s'annulant à l'origine est égale à hE'_{2n}, la meilleure approximation de $|x|$ sur le segment $(-h, +h)$ par un polynome quelconque de degré $2n$ est égale à hE_{2n}.*

En effet, soit d'abord $h = 1$. Si

$$R(x) = A_0 x + A_1 x^2 + \cdots + A_{2n-1} x^{2n}$$

était un polynome, s'annulant à l'origine, tel que, pour $-1 \leq x \leq 1$ on ait

$$\left| |x| - R(x) \right| < E'_{2n}, \tag{11}$$

on aurait aussi

$$\left| |x| - R(-x) \right| < E'_{2n}$$

et, a fortiori, pour $0 \leq x \leq 1$

$$\left| |x| - \frac{R(x) + R(-x)}{2} \right| < E'_{2n}.$$

Or cette inégalité est impossible, puisque le polynome

$$|x| - \frac{R(x) + R(-x)}{2} = x - A_1 x^2 - A_3 x^4 - \cdots - A_{2n-1} x^{2n}$$

ne peut rester inférieur, en valeur absolue, au module maximum du polynome oscillateur correspondant.

Au contraire, on peut certainement réaliser l'inégalité

$$\left| |x| - R(x) \right| < E'_{2n}, \tag{12}$$

pour $-1 < x < 1$, si $x - R(x)$ est un polynome oscillateur.

Du moment que l'inégalité (12) est réalisée, on aura aussi

$$\left|\left|\frac{x}{h}\right| - R\left(\frac{x}{h}\right)\right| \leq E'_{2n}$$

ou bien

$$\left||x| - hR\left(\frac{x}{h}\right)\right| \leq hE'_{2n} \tag{12bis}$$

sur le segment $(-h, +h)$; au contraire, on ne peut pas avoir sur le segment $(-h, +h)$

$$||x| - R_1(x)| < hE'_{2n},$$

car cela conduirait à l'inégalité

$$\left||x| - \frac{1}{h}R_1(x)\right| < E'_{2n}$$

sur le segment $(-1, +1)$ équivalente à l'inégalité (11) qui est impossible. La deuxième partie se démontre d'une façon identique.

14. *Remarque.* En appliquant le théorème (9) *on obtiendra par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent des inégalités analogues pour les meilleures approximations de* $x|x|$, $x^2|x|$ *etc. par des polynomes de degré* m*; l'on vérifiera qu'elles sont respectivement de l'ordre de* $\frac{1}{m^2}$, $\frac{1}{m^3}$ *etc.*

Il ne semble pas pourtant que l'on puisse obtenir des résultats plus précis par cette méthode élémentaire. Le problème de la détermination explicite des polynomes oscillateurs parait présenter, en général, des difficultés très considérables; et ce n'est que par l'emploi convenable des approximations successives que l'on parviendra dans chaque cas particulier à des solutions plus ou moins approchées du problème. A mesure que le nombre de termes du polynome augmente, le problème se complique; et il convient d'indiquer une méthode spéciale, si l'on a en vue le cas, où le nombre de termes est très grand. Ce dernier cas fera l'objet principal de l'étude qui va suivre. Indiquons cependant encore deux propositions élémentaires, dont la première, sans intervenir directement dans la suite, sera un de nos guides principaux, tandis que la seconde qui est une généralisation d'un théorème fondamental de M. de la Vallée Poussin, est un principe indispensable de vérification.

15. *Théorème. Les points intérieurs d'écart maximum:* $b_1, b_2, \cdots b_{n-1}$ *du polynome oscillateur* $Q(x)$ *relatif à la suite d'exposants:* $0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$*, et les points intérieurs d'écart maximum:* $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ *du polynome oscillateur* $P(x)$ *relatif à la suite d'exposants:* $k, 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ (où $k \gtreqless \alpha_i$) *se séparent mutuellement, c'est à dire satisfont aux inégalités:*

$$\beta_1 < b_1 < \beta_2 < b_2 < \cdots \beta_{n-1} < b_{n-1} < \beta_n.$$

En effet, par l'introduction d'un facteur convenable nous pouvons égaler les maxima des polynomes oscillateurs

$$P(x) = x^k + \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{a_i}, \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_i x^{a_i},$$

de sorte que le polynome

$$R(x) = P(x) - Q(x)$$

s'annule à l'origine, et le polynome

$$R_1(x) = P(x) + Q(x)$$

s'annule pour $x = 1$. Sauf ces racines évidentes, chacune des équations aura au plus n racines positives. Pour fixer les idées, supposons n pair, et $P(0) = Q(0) > 0$. On aura alors

$$R(0) = 0, \quad R(\beta_1) < 0, \quad R(\beta_2) > 0, \cdots, \quad R(\beta_n) > 0, \quad R(1) < 0$$

et

$$R_1(0) > 0, \quad R_1(\beta_1) < 0, \quad R_1(\beta_2) > 0, \cdots, \quad R_1(\beta_n) > 0, \quad R_1(1) = 0,$$

en excluant, pour le moment, l'hypothèse de $\beta_i = b_k$. $R(x)$ a donc une racine unique dans chaque intervalle $\beta_i \beta_{i+1}$ et $\beta_n 1$, et $R_1(x)$ a une racine unique dans $0\beta_1$ et dans chacun des intervalles $\beta_i \beta_{i+1}$. Mais il est impossible alors que l'intervalle $\beta_i \beta_{i+1}$ contienne à la fois b_k et b_{k+1}. En effet, il faudrait, puisque $R(x)$ ne s'annule qu'une seule fois entre β_i et β_{i+1}, que la suite des quatres nombres

$$R(\beta_i), \quad R(b_k), \quad R(b_{k+1}), \quad R(\beta_{i+1})$$

ne présente qu'une variation de signe; mais $R(b_k) \,.\, R(b_{k+1}) < 0$, donc, $R(\beta_i) \,.\, R(b_k) > 0$ et $R(b_{k+1}) \,.\, R(\beta_{i+1}) > 0$. Or, on a naturellement, quel que soit k, $R(b_k) \,.\, R_1(b_k) < 0$; d'où $R_1(\beta_i) R_1(b_k) < 0$ et $R_1(b_{k+1}) \,.\, R_1(\beta_{i+1}) < 0$; l'équation $R_1(x) = 0$ aurait donc, au moins, une racine dans chacun des intervalles: $\beta_i b_k$, $b_k b_{k+1}$, $b_{k+1} \beta_{i+1}$, c'est à dire trois racines entre β_i et β_{i+1}, ce qui est impossible.

De même, on a

$$R(0) = 0, \quad R(b_1) > 0, \quad R(b_2) < 0, \cdots, R(b_{n-1}) > 0, \quad R(1) < 0$$

et

$$R_1(0) > 0, \quad R_1(b_1) < 0, \quad R_1(b_2) > 0, \cdots, R_1(b_{n-1}) < 0, \quad R_1(1) = 0.$$

$R(x) = 0$ a donc une racine entre b_i et b_{i+1} $(i = 1, \cdots n-2)$ et une racine entre b_{n-1} et 1 ; il ne manque encore qu'une racine qui devra se trouver entre 0 et b_1. On voit également que $R_1(x) = 0$ admet une racine dans chacun de ces intervalles. D'où il résultera, comme précédemment, qu'un intervalle $b_i b_{i+1}$ ne peut contenir à la fois deux valeurs β_k et β_{k+1}.

On a donc

$$\beta_1 < b_1 < \beta_2 < \cdots b_{n-1} < \beta_n.$$

Mais il faut montrer encore l'impossibilité de l'hypothèse $\beta_i = b_k$. Il est clair d'abord que si cette circonstance se présentait, $\beta_i = b_k$ serait une racine double de $R(x) = 0$, par exemple, qu'il faudrait considérer comme appartenant à la fois aux intervalles $\beta_{i-1}\beta_i$, $\beta_i\beta_{i+1}$, $b_{k-1}b_k$, $b_k b_{k+1}$; dans chacun des deux premiers intervalles et dans l'un au moins des deux derniers $R(x) = 0$ n'aurait d'autres racines.

Or, si on a $R(\beta_i) = R(b_k) = 0$, cela prouve que

$$P(\beta_i) \,.\, Q(b_k) > 0,$$

et par conséquent,

$$P(\beta_{i+1}) \,.\, Q(b_{k+1}) > 0, \quad P(\beta_{i-1}) \,.\, Q(b_{k-1}) > 0.$$

On aurait donc les inégalités

$$R(\beta_{i+1}) \,.\, R(b_{k+1}) \leq 0, \quad R(\beta_{i-1}) \,.\, R(b_{k-1}) \leq 0,$$

ce qui est en contradiction avec la remarque que dans trois, au moins, des intervalles $\beta_{i-1}\beta_i$, $\beta_i\beta_{i+1}$, $b_{k-1}b_k$, $b_k b_{k+1}$, $R(x) = 0$ n'a d'autre racine que $\beta_i = b_k$. Le théorème est donc démontré.

Corollaire. *Si* $P(x) = x^\alpha + \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{2i}$ *est le polynome oscillateur relatif à la suite d'exposants:* $\alpha, 0, 2, 4, \cdots 2n$, où $\alpha \neq 2i$, *ses points intérieurs d'écart maximum:* $\beta_1, \cdots \beta_n$ *satisfont aux inégalités:*

$$0 < \beta_1 < \sin\frac{\pi}{2n} < \beta_2 < \sin\frac{2\pi}{2n} < \cdots \beta_{n-1} < \sin\frac{(n-1)\pi}{2n} < \beta_n < 1.$$

15[bis]. Lemme. *Si* $P(x)$ *est le polynome oscillateur relatif à la suite des exposants:* $0, \alpha_0, \alpha'_1, \cdots, \alpha'_n$, *il ne pourra pas y avoir entre deux de ses points d'écart* β_i *et* β_{i+1} *plus d'un point d'écart* b_k *du polynome oscillateur* $Q(x)$ *relatif à la suite d'exposants:* $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, *où* $0 < \alpha_0 < \alpha'_1 < \alpha_1 < \cdots \alpha'_n < \alpha_n$; *de plus, si*

$b_k = \beta_i$, l'un, au moins, des intervalles $\beta_i \beta_{i+1}$ ou $\beta_{i-1}\beta_i$ ne contiendra pas d'autre point d'écart de $Q(x)$.

En effet, formons, comme précédemment,

$$R(x) = P(x) - Q(x), \quad R_1(x) = P(x) + Q(x),$$

en supposant $P(1) = Q(1) > 0$, donc $R(1) = 0$. Soit toujours n pair, pour fixer les idées. On aura

$$R(0) < 0, \quad R(\beta_1) > 0, \cdots, \quad R(\beta_n) < 0, \quad R(1) = 0$$

et

$$R_1(0) < 0, \quad R_1(\beta_1) > 0, \cdots, \quad R_1(\beta_n) < 0, \quad R_1(1) > 0.$$

Chacune des équations $R(x) = 0$ et $R_1(x) = 0$ a, au plus, $n + 2$ racines positives, et d'ailleurs la différence entre le nombre de racines de $R(x)$ et $R_1(x)$ est impaire. Or la seconde équation a une seule racine dans chaque intervalle, ce qui fait $(n + 1)$ racines, et la première qui n'en a pas moins que $(n + 1)$, aura $(n + 2)$ racines, la dernière entre β_n et 1. On en conclut comme précédemment que chaque intervalle contient au plus une valeur b_k. Supposons à présent, que l'on ait $\beta_i = b_k$ et, par exemple,

$$R(\beta_i) = R(b_k) = 0.$$

Il est clair d'abord que l'on n'aura pas $\beta_i < b_{k+1} < b_{k+2} \leq \beta_{i+1}$; mais supposons que $\beta_i < b_{k+1} < \beta_{i+1}$; on aura donc $R(b_{k+1}) \cdot R(\beta_{i+1}) < 0$, et par conséquent une racine de $R(x)$ dans l'intervalle $b_{k+1}\beta_{i+1}$. De même, si l'on avait $\beta_i > b_{k-1} > \beta_{i-1}$, cela nous donnerait une seconde racine sur $\beta_{i-1} b_{k-1}$, et au total, cela ferait déjà $(n + 3)$ racines pour $R(x) = 0$ ce qui est impossible.

Corollaire. *Les points d'écart du polynome oscillateur $P(x) = x^a + \sum_{i=0}^{i=n} A_i x^{2i}$ satisfont aux inégalités*

$$\sin\frac{\pi}{2n} < \beta_2 \leq \sin\frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n + 1}, \quad \sin\frac{2\pi}{2n} < \beta_3 \leq \sin\frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n + 1}, \cdots$$

$$\sin\frac{(i - 1)\pi}{2n} < \beta_i < \sin\frac{\left(i - \frac{1}{2}\right)\pi}{2n + 1}.$$

si le premier point d'écart β_1 satisfait à l'inégalité $\beta_1 < \sin\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n + 1}$.

Cela résulte de la comparaison du polynome $P(x)$ avec le polynome oscillateur $Q(x) = \cos(2n+1) \arccos x$ qui est relatif à la suite d'exposants: $1, 3, \cdots 2n+1$, les bornes inférieures étant données par le corollaire précédent.

Remarque. Il résultera des calculs de la seconde partie que pour $\alpha = 1$, on a bien, pour n assez grand, $\beta_1 < \sin \frac{\pi}{4n}$; mais une démonstration élémentaire de ce fait m'échappe pour le moment.

16. *Théorème généralisé de M. de la Vallée Poussin.*[1] *S'il existe un polynome $P(x) = \sum_{h=0}^{h=n} A_h x^{a_h}$, tel que la différence $f(x) - P(x)$ prend en $(n+2)$ points successifs de l'intervalle $0\ 1$: $x_1, x_2, \cdots x_{n+2}$ des signes contraires, il est impossible de former un polynome $Q(x) = \sum_{h=0}^{h=n} B_h x^{a_h}$ tel que le module de la différence $f(x) - Q(x)$ soit en tous ces points inférieur à la plus petite des valeurs $|f(x_h) - P(x_h)|$.*

En effet, si l'on avait, quel que soit h, $|f(x_h) - P(x_h)| > |f(x_h) - Q(x_h)|$ il en résulterait que

$$f(x_h) - P(x_h) - f(x_h) + Q(x_h) = Q(x_h) - P(x_h)$$

a le signe de $f(x_h) - P(x_h)$. Par conséquent, l'équation

$$\sum_{h=0}^{h=n} (B_h - A_h) x^{a_h} = 0$$

aurait $n+1$ racines positives, ce qui n'est pas possible.

M. de la Vallée Poussin considère, en particulier, les polynomes $P(x)$ tels qu'aux points considérés toutes les différences $f(x_h) - P(x_h)$ sont égales, en valeur absolue. Il résulte du théorème démontré, que pour tout autre polynome $Q(x)$ de la même forme, l'une au moins des différences $f(x_h) - Q(x_h)$ sera supérieure en valeur absolue à la valeur absolue commune des différences $f(x_h) - P(x_h)$. Le polynome $P(x)$ est, pour cette raison, nommé polynome d'approximation relatif à l'ensemble de points considérés.

[1] Bulletins de l'Académie de Belgique, 1910. »Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée de l'angle.» M. de la Vallée Poussin ne considère que le cas, où $a_h = h$; dans ce cas l'intervalle 0 1 peut être remplacé par un intervalle quelconque moyennant la transformation $y = ax + b$.

Seconde Partie.

Propriétés asymptotiques de la meilleure approximation de $|x|$.

17. *Construction d'un polynome $R(x)$ approché de $|x|$.*

Nous allons définir a priori un polynome $R(x)$ par les conditions suivantes. Le polynome $R(x)$ de degré $2n$ doit s'annuler pour $x = 0$ et devenir égal à $|x|$ aux points $x_k = \cos \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}$ $(k = 0, 1, \cdots 2n - 1)$ qui sont racines du polynome

$$T(x) = \cos 2n \arccos x.$$

En déterminant le polynome $\frac{R(x)}{x}$ de degré $2n - 1$ par la formule de Lagrange, et en remarquant que

$$T'(x_k) = \frac{2n \sin 2n \arccos x_k}{\sqrt{1 - x_k^2}} = (-1)^k \cdot \frac{2n}{\sin \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}},$$

on a donc

$$R(x) = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x - \cos \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}} - \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x - \cos \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right].$$

D'autre part, on a manifestement, par un calcul semblable

$$x = \frac{xT(x)}{2n}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x - \cos \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}} + \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}{x - \cos \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{2n}}\right];$$

d'où

$$x - R(x) = \frac{xT(x)}{n}\sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}} =$$

$$= -\frac{xT(x)}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \cdot \sin \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x + \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}$$

Mais $R(x)$ ne peut contenir que des puissances paires de x. Par conséquent,

$$|x| - R(x) = T(x)\frac{xH(x)}{n}, \tag{13}$$

x étant toujours supposé positif dans le second membre, où l'on a fait, pour abréger,

$$H(x) = -\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}. \tag{14}$$

18. Théorème. *On a*

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{2n}[1+\varepsilon_n(x)], \tag{15}$$

où $\varepsilon_n(x)$ *tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{nx}$, *pour* $x \gtrless 0$, *et* $\varepsilon_n(0) = -1$.

La dernière affirmation est évidente. Pour voir que $\varepsilon_n(x)$ tend vers 0, si $x \gtrless 0$, remarquons que

$$H(x) = \int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{3\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \int_{\frac{5\pi}{4n}}^{\frac{7\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \cdots + \int_{\frac{(2n-3)\pi}{4n}}^{\frac{(2n-1)\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha,$$

en supposant n pair, pour fixer les idées, puisque

$$\int_a^b \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha = \frac{\sin b}{x+\cos b} - \frac{\sin a}{x+\cos a}. \tag{16}$$

Or, la fonction $\frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}$ étant croissante avec α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha < 2H(x) < \int_{\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos\alpha+1}{(x+\cos\alpha)^2}d\alpha.$$

Donc, en vertu de la formule (16)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{x+\cos\frac{\pi}{4n}}+\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{x+\sin\frac{\pi}{4n}}\right] < H(x) < \frac{1}{2}\left[\frac{2}{x}-\frac{\sin\frac{\pi}{4n}}{x+\cos\frac{\pi}{4n}}-\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{x+\sin\frac{\pi}{4n}}\right]$$

et, a fortiori,

$$\frac{1}{2x}\cdot\left(\frac{1-\frac{\pi^2}{32n^2}}{1+\frac{\pi}{4nx}}\right) < H(x) < \frac{1}{2x}\left[1+\frac{\pi}{4nx}+\frac{\pi^2}{32n^2}\right]. \qquad (17)$$

Par conséquent,

$$xH(x)=\frac{1}{2}(1+\varepsilon_n(x)),$$

où $\varepsilon_n(x)$ tend vers o, lorsque nx croît indéfiniment. D'où résulte la formule annoncée.

19. *Détermination d'une limite inférieure de* $E'_{2n}|x|$.

D'après le théorème (16), nous allons considérer $(n+1)$ intervalles du segment o 1, où la différence

$$x - R(x) = \frac{T(x)}{n}\cdot xH(x)$$

change successivement de signe; et si dans chacun de ces intervalles le module de cette différence devient supérieur à un nombre fixe A, nous en conclurons que $E'_{2n} > A$.

Or $xH(x)$ conserve son signe, et $T(x)$ change successivement de signe aux points: $\sin\frac{\pi}{4n}$, $\sin\frac{3\pi}{4n}$, $\cdots$, $\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n}$, qui déterminent ainsi sur le segment o 1 les $(n+1)$ intervalles voulus. Dans tous ces intervalles, sauf le premier $\left(0, \sin\frac{\pi}{4n}\right)$, considérons les points $\sin\frac{\pi}{2n}$, $\cdots$ $\sin\frac{n\pi}{2n}$, où $|T(x)|=1$. En utilisant l'inégalité (17), nous voyons qu'en tous ces points

$$xH(x) > \frac{1}{4}\left(1-\frac{\pi^2}{32n^2}\right),$$

et par conséquent,

$$|x - R(x)| > \frac{1}{4n}\left(1 - \frac{\pi^2}{32n^2}\right).$$

Dans le premier intervalle nous prendrons le point $\sin\frac{\pi}{8n}$, en remarquant que $T\left(\sin\frac{\pi}{8n}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Or, on voit aisément (en ne conservant que les deux derniers termes de la somme $H(x)$) que

$$H(x) > \frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{x + \sin\frac{\pi}{4n}} - \frac{\cos\frac{3\pi}{4n}}{x + \sin\frac{3\pi}{4n}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2n} + 2x\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{4n}}{\left(x + \sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x + \sin\frac{3\pi}{4n}\right)} >$$

$$> \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\left(x + \sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x + \sin\frac{3\pi}{4n}\right)} > \frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{1}{\left(x + \sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(x + \sin\frac{3\pi}{4n}\right)},$$

si l'on suppose $n > 2$.

Donc,

$$\sin\frac{\pi}{8n}\cdot H\left(\sin\frac{\pi}{8n}\right) > \frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{8n}}{\left(\sin\frac{\pi}{8n} + \sin\frac{\pi}{4n}\right)\left(\sin\frac{\pi}{8n} + \sin\frac{3\pi}{4n}\right)} >$$

$$> \frac{\pi}{2n+1}\cdot\frac{\frac{\pi}{8n}}{\left(\frac{\pi}{8n} + \frac{\pi}{4n}\right)\left(\frac{\pi}{8n} + \frac{3\pi}{4n}\right)} = \frac{8n}{21(2n+1)}.$$

Par conséquent, pour $x = \sin\frac{\pi}{8n}$, on a

$$|x - R(x)| > \frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)}.$$

Ainsi $E'_{2n}|x|$ est supérieur au plus petit des nombres, $\frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)}$ et $\frac{1}{4n}\left(1 - \frac{\pi^2}{32n^2}\right)$. Donc, finalement,

$$E'_{2n} > \frac{4\sqrt{2}}{21(2n+1)} \tag{18}$$

Cette inégalité est plus précise que l'inégalité (8) obtenue plus haut, dès que $n \geq 4$.

20. Théorème. *Si $P(x)$ est un polynome d'approximation de degré $2n$ ($n \geq 4$) de $|x|$ sur le segment $(-1, +1)$, l'équation*

$$P(x) - R(x) = 0$$

admet une racine et une seule dans chacun des $2n$ intervalles compris entre $\sin\frac{k\pi}{2n}$ et $\sin\frac{(k+1)\pi}{2n}$ $(k = -n, -(n-1), \ldots, 0, 1, \ldots, n)$.

En effet, pour toute valeur de n, on a sur tout le segment[1]

$$\left| |x| - P(x) \right| < \frac{2}{\pi(2n+1)},$$

et, d'autre part en tenant compte de l'inégalité (17), on constate qu'aux points $\sin\frac{k\pi}{2n}$, on a

$$\left| |x| - R(x) \right| > \frac{1}{2n}\left(\frac{1 - \frac{\pi^2}{32n^2}}{1 + \frac{\pi}{4n\sin\frac{\pi}{2n}}} \right)$$

quel que soit $|k| > 0$, avec $(|x| - R(x)) \cdot (-1)^k > 0$ (on suppose, pour fixer les idées, n pair).

Pour $n \geq 4$, on a

$$\frac{1}{2n}\left(\frac{1 - \frac{\pi^2}{32n^2}}{1 + \frac{\pi}{4n\sin\frac{\pi}{2n}}} \right) > \frac{2}{\pi(2n+1)};$$

[1] Cette inégalité que l'on pourrait, en utilisant les resultats obtenus plus loin, remplacer par une inégalité plus precise, résulte du développement de $|x|$ en série de polynomes trigonométriques $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

On a

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{T_2(x)}{1 \cdot 3} - \frac{T_4(x)}{3 \cdot 5} + \frac{T_6(x)}{5 \cdot 7} - \cdots\right]$$

(voyez mon mémoire de l'Academie Belgique). En s'arrêtant au terme de degré $2n$, on a un polynome de degré $2n$ qui fournit une approximation égale à $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \cdots\right] < \frac{2}{\pi(2n+1)}$

pour le voir il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{2n}\left(1-\frac{\pi^2}{32n^2}\right)>\frac{2}{\pi(2n+1)}\cdot\left(1+\frac{2n+\frac{1}{3}}{4n}\right),$$

ou

$$1-\frac{\pi^2}{32n^2}>\frac{6n+\frac{1}{3}}{\pi(2n+1)}.$$

Par conséquent, le polynome

$$P(x)-R(x)=(P(x)-|x|)+(|x|-R(x))$$

a en tous les points considérés le signe de

$$|x|-R(x).$$

Ainsi, aux points $\sin\frac{k\pi}{2n}$ $(k \gtrless 0)$

$$[P(x)-R(x)].(-1)^k>0. \tag{19}$$

D'autre part, pour $x=k=0$, $R(x)=0$ et $P(x)>0$, l'inégalité (19) a donc lieu également. Il y a, par conséquent, un nombre impair de racines de l'équation $P(x)-R(x)=0$ dans chaque intervalle $\left(\sin\frac{k\pi}{2n},\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)$; il y en a donc une et une seule. *C. q. f. d.*

Corollaire. *Un polynome quelconque $Q(x)$ de degré non supérieur à $2n$ qui fournit une approximation de $|x|$ inférieure à* $\frac{1}{2n}\left[\frac{1-\frac{\pi^2}{32n^2}}{1+\frac{\pi}{4n\sin\frac{\pi}{2n}}}\right]$ *jouit de la propriété que l'équation*

$$Q(x)-R(x)=0$$

admet une et une seule racine dans chaque intervalle $\left(\sin\frac{k\pi}{2n},\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2n}\right)$, *si on a* $Q(0)>0$.

21. *Expressions asymptotiques* de $|x|-R(x)$. Nous avons déjà obtenu une expression asymptotique très simple de $|x|-R(x)$ au § 18. Mais cette expression

n'a été déterminée que pour nx croissant indéfiniment. Il est nécessaire de se débarrasser de cette restriction. Puisqu'il s'agit de valeurs très grandes de n, nous pouvons supposer n pair, pour fixer les idées, ce que nous ferons toujours dans la suite, en remarquant qu'on a alors $T(x) = \cos 2n \arccos x = \cos 2n \arcsin x$.

Remarquons d'abord que l'on a identiquement

$$H(x) = -\sum_{k=1,3,\cdots,n-1} \frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\cdot\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right] - \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}$$

$$= \sum_{k=1,3,\cdots,n-1} \frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{k\pi}{2n} + \sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} =$$

$$= \sum_{k=1,3,\cdots,n-1} \frac{2x\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{k\pi}{2n} + \sin\frac{\pi}{2n}}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Posons ensuite

$$H_1(x) = \frac{\pi}{2n}\cdot\sum_{k=1,3,\cdots n-1} \frac{x\sin\frac{k\pi}{2n} + 1}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}. \tag{20}$$

On en conclut immédiatement que

$$H(x) = (1-\eta)\,.\,H_1(x), \tag{21}$$

où

$$0 < \eta < \frac{\pi^2}{24n^2}. \tag{22}$$

La différence $xH(x) - xH_1(x)$ tend donc *uniformément* vers 0, lorsque n croît indéfiniment.

Envisageons, enfin, la fonction

$$xH_2(x) = \frac{\pi x}{2n}\cdot\sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}} \tag{23}$$

qui joue un rôle fondamental dans ce qui suivra. Sa propriété essentielle est qu'elle est une fonction de $b = \frac{2nx}{\pi}$ seulement, et, en introduisant cette nouvelle variable, on a manifestement

$$x H_2(x) = \sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{b}{(b+k)^2 - \frac{1}{4}} = F(b). \tag{24}$$

Je dis que la différence $xH(x) - xH_2(x)$ tend aussi *uniformément* vers o.

Pour le voir, je prends un nombre positif fixe A, qui est supposé aussi grand qu'on veut, et je sépare les valeurs de x en deux classes: dans la première, $x < x_0 < \frac{\pi A}{2n}$, c'est à dire $b \leq A$, dans la seconde, $x > x_0$, c'est à dire $b > A$.

Soit d'abord $x > x_0$. En vertu de l'inégalité (17), on a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1 - \frac{x^2}{32n^2}}{1 + \frac{1}{2A}}\right] < xH(x) < \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2A} + \frac{x^2}{32n^2}\right].$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{b\,dz}{(b+z)^2 - \frac{1}{4}} < \sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{b}{(b+k)^2 - \frac{1}{4}} < \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{b\,dz}{(b+z)^2 - \frac{1}{4}} + \frac{b}{(b+1)^2 - \frac{1}{4}},$$

ou

$$\frac{b}{2}\log\frac{b+\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}} < F(b) < \frac{b}{2}\log\frac{b+\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}} + \frac{b}{(b+1)^2 - \frac{1}{4}},$$

ou encore,

$$\frac{b}{2b+1} - \frac{b}{(2b+1)^2} < F(b) < \frac{b}{2b+1} + \frac{b}{(b+1)^2 - \frac{1}{4}},$$

puisque $\log\frac{b+\frac{3}{2}}{b+\frac{1}{2}} = \frac{1}{b+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\left(b+\frac{1}{2}\right)^2} \cdots\cdots$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{A}\right) < F(b) < \frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{2A}\right)$$

et

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2A}+\frac{\pi^2}{32n^2}\right] < F(b) - xH(x) < \frac{1}{2}\left[1+\frac{3}{2A}-\frac{1-\frac{\pi^2}{32n^2}}{1+\frac{1}{2A}}\right] < \frac{1}{2}\left[\frac{2}{A}+\frac{\pi^2}{32n^2}\right].$$

Donc, finalement, pour $x > x_0\ (b > A)$, on a

$$|xH(x) - xH_2(x)| < \frac{1}{A}+\frac{\pi^2}{64n^2}. \tag{25}$$

22. Soit à présent $x \leq x_0$. Désignons par I_k le terme général de $xH_1(x)$, et par I'_k celui de $xH_2(x)$. Ainsi

$$I_k = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{x^2\sin\frac{k\pi}{2n}+x}{\left[x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}$$

$$= \frac{\frac{\pi b^2}{2n}\sin\frac{k\pi}{2n}+b}{\left[b+\frac{2n}{\pi}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[b+\frac{2n}{\pi}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}$$

et

$$I'_k = \frac{b}{(b+k)^2-\frac{1}{4}} = \frac{b}{\left(b+k-\frac{1}{2}\right)\left(b+k+\frac{1}{2}\right)}.$$

En développant les sinus en série, on a

$$I_k = \frac{b(1+\Theta x_0)}{\left\{b+\left(k-\frac{1}{2}\right)\left[1-\Theta_1\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{24n^2}\right]\right\}\left\{b+\left(k+\frac{1}{2}\right)\left[1-\Theta_2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{24n^2}\right]\right\}},$$

où Θ, Θ_1, Θ_2 sont positifs et inférieurs à 1.

En supposant d'abord $k+\frac{1}{2} < \frac{2n}{\pi}\sqrt[3]{x_0}$, on a donc

$$I_k = \frac{b(1+\Theta x_0)}{\left[b+\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\Theta'_1 x_0^{2/3}}{6}\right)\right]\left[b+\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{\Theta'_2 x_0^{2/3}}{6}\right)\right]} \leq I'_k\cdot\frac{1+\Theta x_0}{\left(1-\frac{\Theta' x_0^{2/3}}{6}\right)^2}.$$

où Θ'_1, Θ'_2, Θ' sont également positifs et inférieurs à 1. Ainsi

$$I'_k < I_k < I'_k (1 + 2 x_0^{2/3}).$$

D'autre part, si $k + \frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi} \sqrt[3]{x_0}$, on a

$$I'_k < I_k < \frac{b(1 + \Theta x_0)}{\left[b + \frac{2}{\pi}\left(k - \frac{1}{2}\right)\right]\left[b + \frac{2}{\pi}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{\pi}{2} b (1 + \Theta x_0) \left[\frac{1}{b + \frac{2}{\pi}\left(k - \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{b + \frac{2}{\pi}\left(k + \frac{1}{2}\right)}\right]$$

$\left(\text{puisque } \sin \frac{\pi h}{2} > h, \text{ pour } 0 < h < 1\right)$.

Par conséquent, k_0 étant le plus petit nombre entier satisfaisant à la condition $k + \frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi} \sqrt[3]{x_0}$, on a

$$\sum_{k=k_0}^{k=n-1} I'_k < \sum_{k=k_0}^{k=n-1} I_k < \frac{\pi b}{b + \frac{2}{\pi}\left(k_0 - \frac{1}{2}\right)} < \frac{\pi b}{b + \frac{2}{\pi}\left(\frac{2n\sqrt[3]{x_0}}{\pi} - 1\right)}$$

$$< \frac{\pi n x_0}{n x_0 + \left(\frac{2n\sqrt[3]{x_0}}{\pi} - 1\right)} < \frac{\pi^2}{2} x_0^{2/3}.$$

De plus, $\sum_n^\infty I'_k < \frac{1}{n}$. Donc, pour $x < x_0$, on a

$$-\frac{1}{n} < x H_1(x) - x H_2(x) < \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right) x_0^{2/3}$$

et, en vertu de (21),

$$-\frac{1}{n} - \frac{\pi^2}{24 n^2} < x H(x) - x H_2(x) < \left(2 + \frac{\pi^2}{2}\right) x_0^{2/3}. \tag{26}$$

Posons, enfin, $x_0 = \frac{1}{n^{3/5}}$. Dans ces conditions, l'inégalité (26) donne à fortiori

$$|x H(x) - x H_2(x)| < \frac{2 + \frac{\pi^2}{2}}{n^{2/5}} \tag{26bis}$$

et l'inégalité (25), qui a lieu pour $x > x_0$, devient

$$|x H(x) - x H_2(x)| < \frac{\pi}{2 n^{2/5}} + \frac{\pi^2}{64 n^2}. \tag{25bis}$$

Il est donc démontré que, pour toute valeur positive de x,

$$x H(x) = x H_2(x) + \beta_n(x),$$

où

$$|\beta_n(x)| < \frac{2 + \frac{\pi^2}{2}}{n^{2/5}}, \tag{27}$$

c'est à dire

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n}\left[F\left(\frac{2nx}{\pi}\right) + \beta_n(x)\right]. \tag{28}$$

Telle est l'expression asymptotique que nous allons utiliser dans la suite.

23. *Expressions diverses de la fonction* $F(b)$. Nous avons défini la fonction $F(b)$ par l'expression

$$F(b) = \sum_{1,3,\cdots\infty} \frac{b}{(b+k)^2 - \frac{1}{4}}. \tag{24}$$

Il est aisé de voir que cette fonction est étroitement liée à la fonction Γ. En effet, on a immédiatement

$$F(b) = 2b\left[\frac{1}{2b+1} - \frac{1}{2b+3} + \frac{1}{2b+5} - \frac{1}{2b+7} + \cdots\right]. \tag{29}$$

Or, on sait que

$$\psi(a) = \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right)$$

où γ est la constante d'Euler. Donc,

$$F(b) = \frac{b}{2}\left\{(\gamma - \gamma) - \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{1}{4}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{3}{4}}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{5}{4}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{b}{2} + \frac{7}{4}}\right)\right] - \cdots\right\}$$

$$= \frac{b}{2}\left[\psi\left(\frac{b}{2} + \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{b}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] \tag{30}$$

Indiquons une autre expression[1] de $F(b)$ qui se déduit de (29) par la transformation d'EULER; on obtient ainsi

$$F(b) = \frac{b}{2b+1}\left[1 + \frac{1}{2b+3} + \frac{1 \cdot 2}{(2b+3)(2b+5)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2b+3)(2b+5)(2b+7)} + \cdots\right]. \quad (31)$$

Remarquons que nous avons là une série hypergéometrique; ainsi, d'après les notations habituelles, on a l'expression

$$F(b) = \frac{b}{2b+1} F\left(1, 1, b + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

L'expression (31) conduit immédiatement au résultat trouvé plus haut que

$$F(\infty) = \frac{1}{2},$$

mais il convient encore d'en déduire que

$$F(b) < \frac{1}{2}. \quad (32)$$

En effet,

$$F(b) < \frac{b}{2b+1}\left[1 + \frac{1}{2b+3} + \frac{1 \cdot 2}{(2b+3)(2b+5)} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2b+3)(2b+5)(2b+7)}\right];$$

il suffit donc de vérifier que

$$2b[2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (2b+7) + (2b+5)(2b+7) + (2b+3)(2b+5)(2b+7)] <$$
$$< (2b+1)(2b+3)(2b+5)(2b+7),$$

ou

$$0 < 105 + 20b + 4b^2.$$

La fonction $F(b)$ peut aussi se présenter sous forme d'intégrale définie:

$$F(b) = b\int_0^1 \frac{z^{b-\frac{1}{2}}}{z+1}\,dz. \quad (33)$$

Remarquons, enfin, que $F(b)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\frac{F(b)}{b} + \frac{F(b+1)}{b+1} = \frac{1}{b+\frac{1}{2}}.$$

[1] Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II (Teil I_2). BRUNEL, »Bestimmte Intégrale«, § 12.

24. *Tables des valeurs de la fonction $F(b)$ avec l'approximation* 0,00055 *et de sa dérivée $F'(b)$ avec l'approximation* 0,001.

v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$
0	0,000	0,45	0,332	1,2	0,445	2,1	0,477
0,05	0,070	0,5	0,347	1,3	0,451	2,2	0,478
0,1	0,127	0,55	0,360	1,4	0,456	2,3	0,480
0,15	0,173	0,6	0,371	1,5	0,460	2,4	0,481
0,2	0,212	0,7	0,391	1,6	0,464	2,5	0,483
0,25	0,241	0,8	0,406	1,7	0,467	3	0,488
0,3	0,271	0,9	0,419	1,8	0,470	4	0,493
0,35	0,294	1	0,429	1,9	0,473	5	0,495
0,4	0,314	1,1	0,438	2	0,475	6	0,497

v	$F'(v)$	v	$F'(v)$
0	1,571	0,46	0,314
0,3	0,502	0,48	0,297
0,32	0,471	0,5	0,282
0,34	0,443	0,52	0,268
0,36	0,417	0,54	0,254
0,38	0,393	0,56	0,241
0,4	0,371	0,58	0,230
0,42	0,350	0,6	0,219
0,44	0,331	1	0,093

25. *Détermination d'une borne supérieure de E_{2n} pour des valeurs très grandes de n.* Nous verrons la raison qui conduit à envisager les polynomes de la forme

$$Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \frac{3a_2}{b^2 - b_2^2} + \cdots\right], \tag{34}$$

où $b_1 < b_2 < \cdots$ sont les racines successives de l'équation

$$T(x) = T\left(\frac{xb}{2n}\right) = \cos 2n \arcsin \frac{xb}{2n} = 0.$$

Bornons nous aux trois premières racines b_1, b_2, b_3. Je dis que, si n croît indéfiniment, l'approximation de $|x|$ par le polynome $Q(x)$ a pour valeur asymptotique l'approximation de $|x|$ par la fonction

$$Q_1(x) = R(x) + \frac{\cos \pi b}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} + \frac{3a_2}{b^2 - \frac{9}{4}} + \frac{5a_3}{b^2 - \frac{25}{4}}\right].$$

Je veux dire par là que, si μ_n est l'approximation fournie par $Q(x)$, et μ'_n l'approximation fournie par $Q_1(x)$, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{\mu'_n} = 1.$$

En effet, en vertu de (28),

$$|x| - Q(x) = \frac{T(x)}{n}\left[F(b) - B - \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} - \frac{3a_2}{b^2 - b_2^2} - \frac{5a_3}{b^2 - b_3^2} + \beta_n\right]$$

et

$$|x| - Q_1(x) = \frac{T(x)}{n}[F(b) + \beta_n] - \frac{\cos \pi b}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} + \frac{3a_2}{b^2 - \frac{9}{4}} + \frac{5a_3}{b^2 - \frac{25}{4}}\right].$$

Par conséquent, pour $b > A$, A étant suffisamment grand, le maximum de $||x| - Q(x)|$, aussi bien que celui de $||x| - Q_1(x)|$, aura la forme

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - B + \alpha_n\right),$$

où α_n est une quantité aussi petite que l'on veut. D'autre part, $T(x) = \cos 2n \arcsin \frac{\pi b}{2n} = \cos 2n\left[\frac{\pi b}{2n} + \theta\left(\frac{\pi b}{2n}\right)^3\right] = \cos\left(\pi b + \frac{\theta \pi^3 b^3}{4n^2}\right)$, où $0 < \theta < 1$. Donc, lorsque $\frac{A^3}{n^2}$ tendra vers 0, $\cos \pi b - T(x)$ et chacune des différences telle que $\frac{\cos \pi b}{b^2 - \frac{1}{4}} - \frac{T(x)}{b^2 - b_1^2}$ tendront également vers 0. Par conséquent, ou bien $n\mu_n$ et $n\mu'_n$ tendent vers $\frac{1}{2} - B$ (si c'est, pour $b > A$, que l'écart maximum de $|x| - Q(x)$ est atteint), ou bien, sans tendre nécessairement vers une limite fixe, $n\mu_n$ et $n\mu'_n$ sont supérieurs à $\frac{1}{2} - B$ et ont une différence qui tend vers 0. Dans les deux cas

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{\mu'_n} = 1.$$

Nous dirons aussi d'une façon générale que $Q_1(x)$ est une expression asymptotique de $Q(x)$, si l'approximation fournie par $Q_1(x)$ est asymptotique (au sens précis qui vient d'être indiqué) à celle que donne $Q(x)$.

Il faudrait déterminer les nombres B, a_1, a_2, a_3 de telle sorte que la fonction

$$S(b) = \Phi(b) \,.\, \cos \pi b$$

s'écarte le moins possible de zéro pour toutes les valeurs positives de b, où l'on a posé

$$\Phi(b) = F(b) - B - \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} - \frac{3a_2}{b^2 - \frac{9}{4}} - \frac{5a_3}{b^2 - \frac{25}{4}} \,.$$

Je signale ce problème, sans le traiter d'une façon générale. Remarquons seulement que, si l'on admet que[1] $0 < B < \frac{1}{2}$ et $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, ce problème est équivalent au suivant; déterminer la fonction $S(b)$ qui s'écarte le moins possible de zéro pour $0 \leq b \leq \frac{5}{2}$ et pour $b = \infty$. En effet, on a

$$|\Phi(\infty)| = \frac{1}{2} - B$$

et

$$|\Phi(b)| < \frac{1}{2} - B$$

lorsque $b > \frac{5}{2}$: il est donc inutile de considérer les valeurs de $b > \frac{5}{2}$.

J'ai résolu ce dernier problème avec une approximation du même ordre que celle des tables (24) des fonctions $F(b)$ et $F'(b)$; mais j'éprouve quelques difficultés à présenter systématiquement les approximations successives que j'ai faites. Je me bornerai d'indiquer a priori les coefficients trouvés et de calculer directement une borne supérieure de l'approximation fournie par le polynome correspondant.

26. Les coefficients B, a_1, a_2, a_3 doivent dans tous les cas satisfaire à l'égalité

$$|\Phi(0)| = |\Phi(\infty)|$$

ou

$$\frac{1}{2} - B = B - 4a_1 - \frac{4}{3} a_2 - \frac{4}{5} a_3. \tag{35}$$

Posons

$$B = 0{,}357;\; a_1 = 0{,}0401;\; a_2 = 0{,}0255;\; a_3 = 0{,}0245.$$

L'égalité (35) est vérifée; on a, en effet

$$|\Phi(0)| = |\Phi(\infty)| = 0{,}143.$$

[1] Voir le corollaire (15 bis).

Il est évident que $S(0) = \Phi(0) < 0$, et $S(b)$ va en croissant au début. Je dis que dans l'intervalle $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ $S(b)$ aura, au plus, trois extrema. Pour le voir, il suffit de remarquer que $S(b)$ qui admet une dérivée continue, devra avoir le même nombre[1] d'extrema que $n[\,|x| - Q(x)]$, qui tend uniformément vers $S(b)$ pour $b < \frac{5}{2}\cdot$

Or, $x - Q(x)$ admet au moins $n - 2$ extrema pour $x > \sin\frac{5\pi}{4n}$ et le nombre total d'extrema ne peut dépasser $n + 2$. Donc, si l'on exclut encore l'extremum de l'origine il ne reste que trois extrema possibles pour $0 < b \leq \frac{5}{2}\cdot$ On remarque que $S'(0) > 0$, $S'(1) < 0$, $S'(2) > 0$, $S'(3) < 0$. Donc dans chaque intervalle 0 1, 1 2, 2 3, il y aura un seul extremum.

Dans le premier intervalle je prend $b = 0{,}4$. Je trouve[2]

$$S(0{,}4) = \cos 72^\circ \left[0{,}314 - 0{,}357 + \frac{0{,}0401}{\frac{1}{4} - \frac{4}{25}} + \frac{0{,}0765}{\frac{9}{4} - \frac{4}{25}} + \frac{0{,}1225}{\frac{25}{4} - \frac{4}{28}}\right] = \cos 72^\circ \,.\, 0{,}4586 <$$

$$< \cos 72^\circ \,.\, 0{,}4598 < 0{,}1421.$$

Il faut s'assurer que l'extremum de l'intervalle 0 1 est inférieur à $0{,}143$. A cet effet, calculons, pour $b = 0{,}4$, la dérivée logarithmique $\frac{S'(b)}{S(b)}\cdot$ On a

[1] Il est peut-être utile d'insister sur ce point qui est une conséquence du fait suivant: si on a une suite de fonctions $F_n(b)$ qui tend uniformément vers une fonction $F(b)$, si en outre les fonctions $F(b)$ et $F_n(b)$ admettent des dérivées continues, et si, enfin, $F''(b_0) = A$, on pourra déterminer b et un nombre n assez grand tel que l'on ait $|F'_n(b) - A| < \varepsilon$ et $|b - b_0| < h$, ε et h étant aussi petits que l'on veut. En effet, on a $F(b_0 + \alpha) - F(b_0) = \alpha(A + \eta)$; supposons $\alpha < h$ et assez petit, pour avoir aussi $\eta < \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Or, pour n assez grand, on a, quelque soit b dans l'intervalle considéré, $|F_n(b) - F(b)| < \frac{\varepsilon\alpha}{4}\cdot$ Par conséquent,

$$F_n(b_0 + \alpha) - F_n(b_0) = \alpha(A + \eta) + \frac{\varepsilon'\alpha}{2},$$

avec $\varepsilon' < \varepsilon$. Donc, pour une certaine valeur de b $(b_0 < b < b_0 + \alpha)$, on a

$$F'_n(b) = A + \eta + \frac{\varepsilon'}{2}$$

ou

$$|F'_n(b) - A| < \varepsilon. \qquad c.q.f.d.$$

[2] Les égalités sont approchées et remplacées à la fin de chaque calcul par des inégalités exactes qu'on obtient en additionnant toutes les erreurs.

$$\frac{S'(0,4)}{S(0,4)} = \frac{F'(0,4) + \dfrac{2 \cdot 0,4 \cdot 0,0401}{\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{4}{25}\right)^2} + \dfrac{2 \cdot 0,4 \cdot 0,0765}{\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{4}{25}\right)^2} + \dfrac{2 \cdot 0,4 \cdot 0,1225}{\left(\dfrac{25}{4} - \dfrac{4}{25}\right)^2}}{0,4586} - \pi \operatorname{tg} 72^\circ =$$

$$= 9,481 - 9,669 = -0,188$$

D'où

$$S'(0,4) = -0,142 \cdot 0,188 = -0,0267.$$

Ainsi

$$0 > S'(0,4) > -0,03.$$

Donc, si $S(b)$ peut atteindre la valeur $0,143$, cela arrive pour $b < 0,4$, et il faut que $0,4 - b > \dfrac{0,009}{0,03} = 0,03$.

Pour être certain que le maximum n'atteint pas $0,143$, il suffira donc de remarquer que $S(0,375) < S(0,4)$.

Or,

$$F(0,375) = \cos 67^\circ 30' \left[0,304 - 0,357 + \frac{4,01}{\dfrac{1}{4} - \dfrac{9}{64}} + \frac{0,0765}{\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{64}} + \frac{0,1225}{\dfrac{25}{4} - \dfrac{9}{64}}\right] = 0,14157.$$

Cherchons ensuite le maximum de $|S(b)|$ dans l'intervalle $(1\ 2)$. Calculons $S(b)$, pour $b = 1,2$. On a

$$-S(1,2) = \cos 36^\circ \left[0,445 - 0,357 - \frac{0,0401}{\dfrac{36}{25} - \dfrac{1}{4}} + \frac{0,0765}{\dfrac{9}{4} - \dfrac{36}{25}} + \frac{0,1225}{\dfrac{25}{4} - \dfrac{36}{25}}\right] = \cos 36^\circ [0,088 -$$

$$- 0,03370 + 0,09444 + 0,02547] = \cos 36^\circ \cdot 0,17421 < \cos 36^\circ \cdot 0,175 < 0,1416.$$

Calculons encore

$$-S'(1,2) = \cos 36^\circ [0,065 + 0,0680 + 0,2788 + 0,0127] - \pi \sin 36^\circ \cdot 0,17421 < \cos 36^\circ \cdot 0,427 -$$

$$- \pi \sin 36^\circ \cdot 0,1736 < 0,34546 - 0,32056 < 0,025.$$

D'ailleurs, $S'(1,2) < 0$.

Donc, le module de $S(b)$ ne pourra atteindre $0,143$, c'est à dire augmenter de $0,0014$ que, si b augmente de plus que $\dfrac{0,0014}{0,025} = 0,056$. Or,

$$-S(1,25) = \cos 45^\circ \left[0,418 - 0,357 - \frac{0,0401}{\dfrac{25}{16} - \dfrac{1}{4}} + \frac{0,0765}{\dfrac{9}{4} - \dfrac{25}{16}} + \frac{0,1225}{\dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{16}}\right] = \cos 45^\circ [0,061$$

$$+ 0,11126 + 0,02613 - 0,03055] = \cos 45^\circ \cdot 0,19784 < 0,707 \cdot 0,19784$$

$|S(b)|$ a donc dépassé son maximum avant $b = 1{,}25$; ce maximum est donc inférieur à $0{,}143$.

Il reste encore à examiner l'intervalle $(2\ 3)$.

Calculons $S(2{,}2)$. On a

$$S(2{,}2) = \cos 36^\circ \left[0{,}148 - 0{,}137 - \frac{0{,}0401}{4{,}84 - 0{,}25} - \frac{0{,}0765}{4{,}84 - 2{,}25} + \frac{0{,}1225}{6{,}25 - 4{,}84}\right] < \cos 36^\circ \,.\, 0{,}17 < 0{,}1377.$$

D'autre part

$$0 > S'(2{,}2) > -0{,}04.$$

Le maximum de $S(b)$ ne saurait donc dépasser $0{,}143$ que s'il était atteint pour $b < 2{,}1$. Or on vérifie que $S'(2{,}1) > 0$.

Ainsi tous les maxima de $|S(b)|$ sont inférieurs ou égaux à $0{,}143$.

Il en résulte qu'avec le choix indiqué des coefficients on construit un polynome $Q(x)$ de degré $2n$ tel que, pour n assez élevé, on a

$$\big||x| - Q(x)\big| < \frac{0{,}143 + \varepsilon_n}{n},$$

où ε_n tend vers 0; a fortiori

$$E_{2n}|x| < \frac{0{,}286}{2n}, \tag{36}$$

pour n suffisamment grand.

Si l'on veut abaisser la borne supérieure, il faut prendre un nombre plus considérable de termes dans $Q(x)$, et il y a lieu de remarquer que les coefficients déjà trouvés n'éprouveront que des variations très faibles. Mais avant d'entreprendre cette nouvelle étude il sera essentiel de former une table plus exacte des fonctions $F(b)$ et $F'(b)$.

27. *Détermination d'une borne inférieure de* $E_{2n}|x|$.

Pour la détermination d'une borne inférieure de E_{2n} on pourra procéder de la façon suivante.

Prenons sur le segment $(-1, +1)$ les points $0, \pm\beta_1, \pm\beta_2, \cdots, \pm\beta_{i_0}$, $\pm\sin\frac{i_0\pi}{2n}, \pm\sin\frac{(i_0+1)\pi}{2n}, \cdots, \pm\sin\frac{n\pi}{2n}$ et déterminons le polynome[1] de degré non supérieur à $(2n+1)$ qui en tous ces points reçoit successivement les valeurs

[1] Ce sera, d'après le § 16, le polynome d'approximation de $|x|$ relatif à la suite considérée de points.

$|x| \pm \varrho$. Au sujet des β_i nous ferons ensuite l'hypothèse que $\sin \frac{(i-1)\pi}{2n} < \beta_i < \sin \frac{i\pi}{2n}$. Posons

$$S(x) = \sqrt{1-x^2} \, . \sin 2n \arccos x$$

et

$$S_1(x) = \frac{(x^2-\beta_1^2)\dots(x^2-\beta_{i_0}^2)\,.\,S(x)}{\left(x^2-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\left(x^2-\sin^2\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\left(x^2-\sin^2\frac{(i_0-1)}{2n}\pi\right)}.$$

En appliquant la formule classique d'interpôlation, le polynome cherché sera égal à

$$f(x) = S_1(x)\cdot\left[\sum_{i=i_0}^{i=n}\frac{\sin\frac{i\pi}{2n}-(-1)^i\varrho}{\left(x-\sin\frac{i\pi}{2n}\right)S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \sum_{i=i_0}^{i=n}\frac{\sin\frac{i\pi}{2n}-(-1)^i\varrho}{\left(x+\sin\frac{i\pi}{2n}\right)S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\varrho}{xS'_1(0)} + \sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{\beta_i+(-1)^i\varrho}{(x-\beta_i)S'_1(\beta_i)} + \sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{\beta_i+(-1)^i\varrho}{(x+\beta_i)S'_1(\beta_i)}\right]. \tag{37}$$

La condition que le degré de $f(x)$ soit inférieur à $2n+2$ conduit à l'équation suivante pour déterminer ϱ

$$2\sum_{i=i_0}^{i=n}\frac{\sin\frac{i\pi}{2n}-(-1)^i\varrho}{S'_1\left(\frac{i\pi}{2n}\right)} + 2\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{\beta_i+(-1)^i\varrho}{S'_1(\beta_i)} + \frac{\varrho}{S'_1(0)} = 0.$$

D'où

$$2n\varrho = \frac{2\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{\beta_i}{S'_1(\beta_i)} + 2\sum_{i=i_0}^{i=n}\frac{\sin\frac{i\pi}{2n}}{S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}}{-\frac{1}{2nS'_1(0)} - \sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(-1)^i}{nS'_1(\beta_i)} + \sum_{i=i_0}^{i=n}\frac{(-1)^i}{nS'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}}. \tag{38}$$

Or,

$$S'_1(\beta_i) = 2\beta_i\cdot\frac{(\beta_i^2-\beta_1^2)\cdots(\beta_i^2-\beta_{i_0}^2)}{\left(\beta_i^2-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\beta_i^2-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}\cdot S(\beta_i)$$

et

$$S'_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right) = 2n(-1)^i \frac{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)}{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)},$$

pour $i < n$, et

$$S'_1\left(\sin\frac{n\pi}{2n}\right) = S'_1(1) = 4n(-1)^n\cdot\frac{(1-\beta_1^2)\cdots(1-\beta_{i_0}^2)}{\left(1-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(1-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}.$$

Par conséquent, en posant

$$\beta_i = \frac{\lambda_i\pi}{2n},$$

où λ_i seront fixes, et n croîtra indéfiniment (i_0 sera également un nombre fixe), on a

$$\lim nS'_1(\beta_i) = \frac{\lambda_i\pi(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)}{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}\sin\lambda_i\pi.$$

Donc, le numérateur dans la formule (38) a la même limite que la somme

$$\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda_i^2-1)\cdots[\lambda_i^2-(i_0-1)^2]}{(\lambda_i^2-\lambda_1^2)\cdots(\lambda_i^2-\lambda_{i_0}^2)\sin\lambda_i\pi}$$

$$+\sum_{i=i_0}^{i=n}(-1)^i\cdot\frac{\sin\frac{i\pi}{2n}\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{n\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)},$$

dont la seconde partie peut être mise d'abord sous la forme

$$\sum_{i=i_0}^{i=n}(-1)^i\cdot\frac{n\sin\frac{i\pi}{2n}\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{n^2\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)}.$$

Or, pour n_0 suffisamment grand,

$$\left|\sum_{i=n_0}^{i=n}(-1)^i\cdot\frac{n\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{n^2\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_{i_0}^2\right)}\right| <$$

$$< \frac{n \sin \frac{n_0\pi}{2n} \cdot \left(\sin^2 \frac{n_0\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{n_0\pi}{2n} - \sin^2 \frac{(i_0 - 1)\pi}{2n}\right)}{n^2 \left(\sin^2 \frac{n_0\pi}{2n} - \beta_1^2\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{n_0\pi}{2n} - \beta_{i_0}^2\right)} <$$

$$< \frac{n \sin \frac{n_0\pi}{2n}}{n^2 \left[\sin^2 \frac{n_0\pi}{2n} - \beta_{i_0}^2\right]} < \frac{n_0}{n_0^2 - \frac{\lambda_{i_0}^2 \pi^2}{4}},$$

car les termes de cette série alternée vont en diminuant.

D'autre part, après avoir fixé n_0, on voit que la somme

$$\sum_{i=i_0}^{i=n_0-1} (-1)^i \frac{n \cdot \sin \frac{i\pi}{2n} \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{(i_0 - 1)\pi}{2n}\right)}{n^2 \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta_1^2\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta_{i_0}^2\right)}$$

tend vers

$$\frac{2}{\pi} \sum_{i=i_0}^{i=n_0-1} \frac{(-1)^i \cdot i (i^2 - 1) \cdots [i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(i^2 - \lambda_1^2) \cdots (i^2 - \lambda_{i_0}^2)},$$

lorsque n croît indéfiniment.

Par conséquent, le numérateur de la formule (38) a pour limite

$$\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2) \sin \lambda_i \pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=i_0}^{i=\infty} (-1)^i \cdot \frac{i (i^2 - 1) \cdots [i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(i^2 - \lambda_1^2) \cdots (i^2 - \lambda_{i_0}^2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2) \sin \lambda_i \pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \cdot m (m^2 - 1) \cdots [m^2 - (i_0 - 1)^2]}{(m^2 - \lambda_1^2) \cdots (m^2 - \lambda_{i_0}^2)} \tag{39}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{(\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2)} \left[\frac{1}{\sin \lambda_i \pi} + \frac{1}{\pi} \cdot f_1(\lambda_i)\right],$$

où

$$f_1(\lambda) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2m \cdot (-1)^m}{m^2 - \lambda^2}. \tag{40}$$

28. Le dénominateur de l'expression (38) aura la même limite que

$$\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdots (i_0 - 1)}{\lambda_1 \cdots \lambda_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{i=i_0} (-1)^i \frac{(\lambda_i^2 - 1) \cdots [\lambda_i^2 - (i_0 - 1)^2]}{\pi \lambda_i (\lambda_i^2 - \lambda_1^2) \cdots (\lambda_i^2 - \lambda_{i_0}^2)} \cdot \frac{1}{\sin \lambda_i \pi} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=i_0}^{i=n} \frac{\left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cdots \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \sin^2 \frac{(i_0 - 1)\pi}{2n}\right)}{\left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta_1^2\right) \cdots \left(n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda_{i_0}^2 \pi^2}{4}\right)}$$

En prenant n_0 suffisamment grand, on peut rendre la somme

$$\sum_{i=n_0}^{i=n} \frac{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2_{i_0}\pi^2}{4}\right)} < \sum_{i=n_0}^{i=n}\frac{1}{n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2_{i_0}\pi^2}{4}}$$

aussi petite qu'on le veut.

Donc

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=i_0}^{i=n}\frac{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\cdots\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\frac{(i_0-1)\pi}{2n}\right)}{\left(\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\beta_1^2\right)\cdots\left(n^2\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\frac{\lambda^2_{i_0}\pi^2}{4}\right)} =$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{i=i_0}^{i=\infty}\frac{(i^2-1)\cdots[i^2-(i_0-1)^2]}{(i^2-\lambda_1)\cdots(i^2-\lambda^2_{i_0})}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{(i^2-1)\cdots[i^2-(i_0-1)^2]}{(i^2-\lambda_1^2)\cdots(i^2-\lambda^2_{i_0})}.$$

Par conséquent, le dénominateur de (38) a pour limite

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1.2\cdots(i_0-1)}{\lambda_1\cdots\lambda_{i_0}}\right)^2-\sum_{i=1}^{i=i_0}(-1)^i.\frac{(\lambda^2_i-1)\cdots[\lambda^2_i-(i_0-1)^2]}{\pi\lambda_i(\lambda^2_i-\lambda_1^2)\cdots(\lambda^2_i-\lambda^2_{i_0})}\cdot\frac{1}{\sin\lambda_i\pi}+$$

$$+\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{(m^2-1)\cdots[m^2-(i_0-1)^2]}{(m^2-\lambda_1^2)\cdots(m^2-\lambda^2_{i_0})}= \tag{41}$$

$$=\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda^2_i-1)\cdots[\lambda^2_i-(i_0-1)^2]}{(\lambda^2_i-\lambda_1^2)\cdots(\lambda^2_i-\lambda^2_{i_0})}\left[\frac{(-1)^{i+1}}{\pi\lambda_i\sin\lambda_i\pi}+\frac{1}{\pi^2}f_2(\lambda_i)\right],$$

où

$$f_2(\lambda)=\frac{1}{\lambda^2}+2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m^2-\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{\pi}{\lambda}\operatorname{cotg}\pi\lambda. \tag{42}$$

Ainsi,

$$\lim_{n=\infty}2n\varrho=\frac{\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda^2_i-1)\cdots[\lambda^2_i-(i_0-1)^2]}{(\lambda^2_i-\lambda_1^2)\cdots(\lambda^2_i-\lambda^2_{i_0})}\left[\frac{\pi}{\sin\lambda_i\pi}+f_1(\lambda_i)\right]}{\sum_{i=1}^{i=i_0}\frac{(\lambda^2_i-1)\cdots[\lambda^2_i-(i_0-1)^2]}{(\lambda^2_i-\lambda_1^2)\cdots[\lambda^2_i-\lambda^2_{i_0}]}\left[\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i\sin\lambda_i\pi}+\frac{1}{\pi}f_2(\lambda_i)\right]}. \tag{43}$$

29. Il convient encore de faire les transformations suivantes. On sait que

$$\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}=\frac{1}{\lambda}+2\lambda\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m}{\lambda^2-m^2}.$$

Donc,

$$\frac{\pi}{\sin \pi\lambda} + f_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + 2\lambda \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\lambda^2 - m^2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2m(-1)^m}{m^2 - \lambda^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^m}{\lambda + m} = \frac{1}{\lambda} - 2\int_0^1 \frac{z^\lambda\, dz}{1+z} = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda + \frac{1}{2}} F\left(\lambda + \frac{1}{2}\right),$$

d'après les formules (33) et (40).

D'autre part, posons $\lambda_i = i - 1 + \varepsilon_i$. Dans ces conditions

$$\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda_i \sin \lambda_i \pi} + \frac{1}{\pi} f_2(\lambda_i) = \frac{1}{(i-1+\varepsilon_i)} \cdot \frac{1}{\sin \varepsilon_i \pi} + \frac{2}{\pi(i-1+\varepsilon_i)^2} - \frac{1}{(i-1+\varepsilon_i)} \operatorname{cotg} \pi\varepsilon_i =$$

$$= \frac{2}{\pi(i-1+\varepsilon_i)^2} + \frac{1-\cos\pi\varepsilon_i}{(i-1+\varepsilon_i)\sin\pi\varepsilon_i} = \frac{2}{\pi(i-1+\varepsilon_i)^2} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi\varepsilon_i}{2}}{i-1+\varepsilon_i}.$$

Posons enfin

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (x^2-1)\cdots[x^2-(i_0-1)^2], \\ \psi(x) &= (x^2-\lambda_1^2)\cdots(x^2-\lambda_{i_0}^2). \end{aligned} \tag{44}$$

Nous aurons ainsi

$$\lim_{n=\infty} 2n\varrho = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi'(\lambda_i)} \left[1 - \frac{2\lambda_i}{\lambda_i + \frac{1}{2}} F\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)\right]}{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=i_0} \frac{\varphi(\lambda_i)}{\psi'(\lambda_i)} \left[\frac{2}{\pi\lambda_i} + \operatorname{tg}\frac{\pi\varepsilon_i}{2}\right]} = B_{i_0}. \tag{45}$$

D'après le théorème (16), on a

$$E_{2n} > \varrho;$$

donc,

$$2n E_{2n} > B_{i_0} \tag{46}$$

pour $n = \infty$.

30. Il s'agit de déterminer les constantes λ_i de façon à rendre maximum[1] la valeur de B_{i_0}. Ce maximum, qui existe, évidemment, pour chaque valeur de

[1] Nous verrons plus loin que λ_i tend vers $i-1$, et la différence $\lambda_i - (i-1) = \varepsilon_i$ tend vers 0, comme $\frac{1}{i}$.

i_0, et va en croissant avec i_0, tend vers une limite déterminée, pour $i_0 = \infty$. Nous allons montrer plus loin que *cette limite est égale à la limite vers laquelle tend* $2nE_{2n}$. En d'autre termes

$$\lim_{i_0=\infty} \text{Max.}\, B_{i_0} = \lim_{n=\infty} 2nE_{2n}.$$

Or, le maximum de B_{i_0} et sa limite, pour $i_0 = \infty$, peut être calculé par approximations successives convergentes très rapidement.

Posons d'abord $i_0 = 1$. On aura

$$B_1 = \frac{1 - \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \dfrac{1}{2}} F\left(\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{2}{\pi\lambda_1} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi\lambda_1}{2}}.$$

Pour $\lambda_1 = 0{,}4$, on trouve

$$B_1 = \frac{1 - \dfrac{8}{9}\cdot 0{,}419}{\dfrac{5}{3{,}1416} + 0{,}727} = \frac{0{,}628}{2{,}318} = 0{,}2709$$

$$B_1 > 0{,}27.$$

Ainsi,

$$2nE_{2n} > 0{,}27 - \alpha_n,$$

où α_n tend vers 0.

Prenons ensuite $i_0 = 2$. On aura

$$B_2 = \frac{1 - \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \dfrac{1}{2}} F\left(\lambda_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{\lambda_1(\lambda_2^2 - 1)}{(1 - \lambda_1^2)}\left[\dfrac{1}{\lambda_2} - \dfrac{2}{\lambda_2 + \dfrac{1}{2}} F\left(\lambda_2 + \dfrac{1}{2}\right)\right]}{\dfrac{2}{\pi\lambda_1} + \operatorname{tg}\dfrac{\pi\lambda_1}{2} + \dfrac{\lambda_1(\lambda_2^2 - 1)}{1 - \lambda_1^2}\left[\dfrac{2}{\pi\lambda_2^2} + \dfrac{1}{\lambda_2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varepsilon_2}{2}\right]},$$

où $\lambda_2 = 1 + \varepsilon_2$.

Conservons $\lambda_1 = 0{,}4$ et posons $\lambda_2 = 1{,}14$. Nous aurons

$$B_2 = \frac{0{,}628 + \dfrac{0{,}2996}{2{,}1}\left[\dfrac{1}{1{,}14} - \dfrac{2}{1{,}64}\cdot 0{,}465\right]}{2{,}318 + \dfrac{0{,}2996}{2{,}1}\left[\dfrac{0{,}6366}{1{,}2996} + \dfrac{0{,}216}{1{,}14}\right]} = \frac{0{,}628 + 0{,}0442}{2{,}316 + 0{,}0958} = 0{,}2785.$$

L'erreur totale ne dépasse pas 0,0005. Donc

$$B_2 > 0{,}278 .$$

Ainsi

$$2nE_{2n} > 0{,}278 .$$

Finalement, nous avons, pour n assez grand,

$$0{,}278 < 2nE_{2n} < 0{,}286 . \tag{47}$$

Passons à présent à la démonstration des théorèmes qui montrent que chacune des méthodes que nous venons d'indiquer permet de calculer $2nE_{2n}$ avec une approximation infinie.

31. Théorème. *Le polynome d'approximation de* $|x|$ *sur le segment* $(-1, +1)$ *admet comme expression asymptotique*

$$G(x) = R(x) + \left(\frac{1}{2n} - E_{2n}\right) T(x) + \frac{\gamma_n(x)}{n}, \tag{48}$$

où $\gamma_n(x)$ *tend vers* 0, *dès que* nx *croît indéfiniment.*

La démonstration est assez longue et fait appel a des considérations de nature différente. Il y a lieu de remarquer que notre proposition serait établie, si l'on pouvait démontrer directement que l'une ou l'autre des méthodes employées pour le calcul approché de E_{2n} est capable de fournir une approximation indéfinie pour $2nE_{2n}$. Pour le moment, c'est la marche inverse que j'ai due adopter. Un des lemmes que je me bornerai d'énoncer, en renvoyant pour la démonstration à la page 6 du Mémoire de l'Académie de Belgique, est le suivant.

Lemme. *Si un polynome* $P(x)$ *de degré* n *reste, en valeur absolue, inférieur à* M *sur le segment* $(-1, +1)$, *sa dérivée restera, en valeur absolue, inférieure à* $\frac{nM}{\sqrt{1-h^2}}$ *dans l'intervalle* $(-h, +h)$.

32. On se rappelle la formule (15) que l'on peut écrire

$$2n\left[|x| - R(x) - \frac{T(x)}{2n}\right] = \varepsilon_n(x) \, . \, T(x). \tag{15bis}$$

Il est clair que la meilleure approximation $2nE_{2n}$ de $2n|x|$ par un polynome de degré $2n$ est la même que celle de $\varepsilon_n(x) \, . \, T(x)$; et on a la relation

$$P(x) = R(x) + \frac{1}{2n}[T(x) + \Omega(x)] \tag{49}$$

entre le polynome d'approximation $P(x)$ de $|x|$ et le polynome d'approximation $\Omega(x)$ de $\varepsilon_n(x) \,.\, T(x)$. Nous voulons trouver une expression asymptotique du polynome $\Omega(x)$. A cet effet, nous prenons un nombre A, aussi grand que l'on veut, et nous introduisons la fonction $\delta_n(x)$ telle que

$$\delta_n(x) = \varepsilon_n(x) \,.\, T(x), \text{ pour } |x| < \frac{A}{n}$$

et

$$\delta_n(x) = 0, \text{ pour } |x| \geqq \frac{A}{n}.$$

De cette façon, on a, en supposant α_n aussi petit que l'on veut

$$|\delta_n(x) - \varepsilon_n(x) \,.\, T(x)| < \alpha_n .$$

Il est évident que, si $\Omega_1(x)$ est le polynome d'approximation de $\delta_n(x)$, il servira d'expression asymptotique pour $\Omega(x)$. En effet, si k_n est l'écart maximum de $\Omega_1(x)$ par rapport à $\delta_n(x)$, on a la relation

$$|k_n - 2nE_{2n}| < \alpha_n ;$$

donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{k_n}{2nE_{2n}} = 1 . \tag{50}$$

C'est le polynome

$$\Omega_1(x) = c_0 + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^{2n} \tag{51}$$

que nous allons étudier.

L'équation $\Omega_1(x) - \delta_n(x) = 0$, aussi bien que l'équation $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) \,.\, T(x) = 0$ a nécessairement, au moins, une racine entre deux points d'écart, (c'est à dire entre deux points où le maximum de $|\Omega_1(x) - \delta_n(x)|$ est atteint). Or l'équation

$$\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) \,.\, T(x) = 0 \tag{52}$$

étant de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^4 + \cdots + A_{n+1} x^{2n} = 0,$$

ne peut avoir plus de $n+1$ racines positives. Par conséquent, le nombre de points d'écart sera $n+2$, et il y en aura un à l'origine. On a ainsi

$$\Omega_1(0) = -1 + k_n . \tag{53}$$

33. Démontrons à présent que $\Omega_1(x)$ *n'admet que des maxima positifs* M *et des minima négatifs* m, *tels que*

$$0{,}5 > M > 0{,}09 \text{ et } -0{,}73 < m < -0{,}09. \tag{54}$$

On voit d'abord que, pour $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$\lim |\varepsilon_n(x) \,.\, T(x)| = |(2F(b) - 1) \,.\, \cos \pi b| < 0{,}18;$$

donc, pour $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$-0{,}18 - k_n < \Omega_1(x) < 0{,}18 + k_n,$$

et entre deux racines de l'équation (52) $\Omega_1(x)$ admet un maximum M ou un minimum m qui satisfont nécessairement aux inégalités:

$$\begin{gathered} 0{,}5 > k_n + 0{,}18 > M > k_n - 0{,}18 > 0{,}09, \\ -0{,}09 > -k_n + 0{,}18 > m > -k_n - 0{,}18 > -0{,}6, \end{gathered} \tag{55}$$

puisque $0{,}3 > k_n > 0{,}27$.

Il faut examiner deux hypothèses. Soit d'abord $\Omega_1(0)$ un minimum. Dans ces conditions, on a constamment[1]

$$\Omega_1(x) > -1 + k_n;$$

et, puisque l'on a d'autre part

$$\varepsilon_n(x) \,.\, T(x) < 0,$$

lorsque $x < \frac{\pi}{4n}$, il en résulte que

$$\Omega_1(x) < k_n + 0{,}18$$

sur tout le segment $(-1, +1)$.

Donc, sur tout le segment

$$|\Omega_1(x) + 0{,}41 - k_n| < 0{,}59. \tag{56}$$

Par conséquent, en vertu du lemme énoncé plus haut on a dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{4n}, \frac{\pi}{4n}\right)$, pour n assez grand,

[1] L'impossibilité d'un minimum absolu différent de $\Omega_1(0)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$ sera mise en évidence par le raisonnement qui démontrera l'impossibilité de la seconde hypothèse

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < 1{,}18\,n. \tag{57}$$

Si l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$ contient à son intérieur au plus un seul point d'écart de $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) \,.\, T(x)$, il y aura n points, où $|\Omega_1(x)|$ atteint son maximum en satisfaisant aux inégalités (55); tous les maxima et minima de $\Omega_1(x)$ satisferont donc aux inégalités (54). Il s'agit à présent de voir que le nombre de points d'écart de $|\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)\,T(x)|$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$ est inférieur à 2.

En effet, soit $x_0 = \frac{\pi b_0}{2n}$ le premier point d'écart. On aura nécessairement

$$[2F(b_0) - 1]\cos\pi b_0 = \varepsilon_n(x_0) \,.\, T(x_0) > -1 + 2k_n > -0{,}444.$$

Mais la fonction

$$[2F(b) - 1]\cos\pi b$$

croît dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4n}\right)$, et on reconnait que, pour $b = 0{,}21$, elle se réduit à $-0{,}446$ (à $0{,}001$ près). Donc, $b_0 > 0{,}21$, ou $x_0 > \frac{0{,}21\,\pi}{2n}$. D'autre part, si x_1 est le second point d'écart, on a

$$\Omega_1(x_1) - \Omega_1(x_0) > 2k_n > 0{,}556,$$

et puisque

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < 1{,}18\,n,$$

donc

$$x_1 - x_0 > \frac{0{,}556}{1{,}18\,n} > \frac{0{,}47}{n},$$

d'où, enfin,

$$x_1 > \frac{0{,}47}{n} + \frac{0{,}21\,\pi}{2n} > \frac{\pi}{4n}.$$

Remarque. Par un raisonnement semblable on reconnaîtra que *la plus petite racine de $\Omega_1(x) = 0$ est supérieure à $\frac{\pi}{4n}$*. Cela résultera de l'inégalité

$0{,}27 + [1 - 2F(b)]\cos \pi b > 1{,}18 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi b}{2}\right]$ qui a lieu pour $0 < b < \frac{1}{2}$, comme on le vérifie facilement en utilisant le tableau (24).

Seconde hypothèse: $\Omega_1(0)$ est un maximum négatif. Dans ces conditions, l'équation $\Omega_1(x) = 0$ ne pourrait avoir plus de $(n-1)$ racines positives.

Si la plus petite racine a_1 de $\Omega_1(x) = 0$ était supérieure à $\frac{\pi}{4n}$, il y aurait, d'après ce qui précède, au moins une racine de $\Omega_1 = 0$ entre deux écarts maximum de $|\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x) \cdot T(x)|$; il n'y aurait donc que $n-1$ écarts maxima à droite de a_1; il y aurait donc 2 points d'écarts à gauche de a_1 (sans compter 0), et aussi à gauche de $\frac{\pi}{4n}$. De même, si $a_1 < \frac{\pi}{4n}$, il ne peut y avoir plus d'un point d'écart entre deux racines successives de $\Omega_1 = 0$. Donc, il faudrait en tout cas, que, pour $x \leq \frac{\pi}{4n}$, $x \leq a_1$, on ait deux points d'ecart (sans compter l'origine). Ainsi, au second point d'écart x_1 on a encore $\Omega_1(x_1) < 0$, d'où

$$\varepsilon_n(x_1) \cdot T(x_1) < -0{,}27.$$

Par conséquent,

$$x_1 < \frac{\pi}{6n}.$$

Soit, d'autre part,

$$m = -1 + k_n - h$$

la valeur du minimum de Ω_1 près de 0. La variation totale de Ω_1, lorsque x varie depuis 0 à x_1 en passant par le point, où Ω_1 est minimum et ensuite par le premier point d'écart x_0, est supérieure à

$$h + 2k_n > h + 0{,}55.$$

Mais on a, comme précédemment, dans le voisinage de l'origine

$$\left|\frac{d\Omega_1}{dx}\right| < (1{,}18 + h)\, n, \tag{58}$$

puisque

$$-1 + k_n - h \leq \Omega_1 < k_n + 0{,}18.$$

De sorte que x_1 satisfait à l'inégalité

$$x_1 (1{,}18 + h)\, n > h + 0{,}55;$$

donc

$$\frac{\pi}{6}(1{,}18 + h) > h + 0{,}55,$$

d'où

$$h < 0{,}15. \tag{59}$$

Par conséquent, au premier point d'écart x_0 on aurait

$$\varepsilon_n(x_0) . T(x_0) > -1 + 2k_n - h > -1 + 0{,}55 - 0{,}15 = -0{,}6,$$

d'où $x_0 > \frac{\pi}{15n}$, et $x_1 - x_0 < \frac{\pi}{6n} - \frac{\pi}{15n} = \frac{\pi}{10n}$; ce qui est en contradiction avec $x_1 - x_0 > \frac{0{,}55}{1{,}33\, n}$ qui résulte de (58) et (59). L'hypothèse que Ω_1 a un maximum négatif doit donc être rejetée.

Les inégalités (54) sont donc démontrées.

En d'autres termes *le polynome* $\Omega_1(x)$ *admet* $(2n+1)$ *maxima et minima sur le segment* $(-1, +1)$; *et, en outre, tant que* $|nx| > A$, *ces maxima ou minima sont égaux, en valeur absolue, à* k_n, *tandis que les autres sont, en valeur absolue, inférieurs à* $3k_n$ *et supérieurs à* $\frac{1}{4}k_n$.

34. Les équations

$$\Omega_1^2(x) - k_n^2 = 0 \tag{60}$$

et

$$\left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 . (x^2 - 1) = 0 \tag{61}$$

dont la seconde a toutes ses racines réelles, auront des racines communes: à savoir, toutes les racines qui, en valeur absolue, sont supérieures à $\frac{A}{n}$. Soient, d'autre part, $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$ toutes les racines positives de $\Omega_1(x) = 0$ inférieures ou égales à $\frac{A}{n}$. L'équation (60) aura au moins 2 racines positives (distinctes ou confondues) entre β_i et β_{i+1}, dans le cas où le maximum (ou minimum) de Ω_1 compris entre β_i et β_{i+1} est, en valeur absolue, supérieur ou égal à k_n. Dans le cas, où le maximum ou minimum correspondant est inférieur à k_n, l'équation (60) n'admet plus de racines réelles dans l'intervalle considéré, mais on peut démontrer que

Si l'on construit un trapèze $\beta_i\beta_{i+1}CD$ *ayant pour base* $\beta_i\beta_{i+1}$ *et pour hauteur* $\frac{4}{n}$

et dont les cotés lateraux $\beta_i D$ et $\beta_{i+1} C$ forment avec la base des angles intérieurs égaux à $\frac{3\pi}{2}$, il y aura au moins une racine de l'équation (60) *à l'intérieur du trapèze $\beta_i \beta_{i+1} CD$.*

En effet, sur une parallèle quelconque à la base $\beta_i \beta_{i+1}$ il y aura au moins un point, où la partie imaginaire de $\Omega_1(x)$ est nulle, car, si l'on parcourre cette parallèle de droite à gauche depuis le coté $\beta_{i+1} C$ jusqu'au coté $\beta_i D$ on fait varier l'argument de Ω_1 d'une quantité supérieure à π. Par conséquent, la courbe S, où la partie imaginaire de Ω_1 est nulle, passant par le point γ_i, racine de $\frac{d\Omega_1}{dx} = 0$ comprise entre β_i et β_{i+1}, rencontrera chaque parallèle à la base; mais toutes les racines de $\frac{d\Omega_1}{dx} = 0$ étant réelles, la courbe S n'aura pas de points multiples à l'intérieur du trapèze, de sorte que la partie réelle de Ω_1 variera dans le même sens, lorsqu'on suit la courbe S depuis γ_i jusqu'au premier point H d'intersection de S avec CD. Pour reconnaître que l'équation (60) admet une racine à l'intérieur de $\beta_i \beta_{i+1} CD$, il suffira donc de prouver que

$$\mu^2 = \Omega_1^2(H) > k_n^2. \tag{62}$$

A cet effet, prenons le polynome

$$T(x) = \cos 2n \arcsin x,$$

et désignons par φ son argument pour $x = H$; soit, pour fixer les idées $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Du point H menons une parallèle à $\beta_i D$ qui rencontre l'axe réel en un point E; soit x_0 la plus grande racine de $T(x) = 0$, telle que $x_0 < E$; menons ensuite la droite $x_0 H$ et perpendiculairement à celleci HE', le point E' étant également sur l'axe reel; on pourra alors déterminer entre E' et x_0 un point y_0 tel que l'argument de la fraction

$$\frac{H - y_0}{H - x_0}$$

soit égal à $-\varphi$, son module étant évidemment supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ceci posé, le produit

$$\frac{H - y_0}{H - x_0} \cos 2n \arcsin H$$

sera réel. Mais, par hypothèse, on a, en supposant $0 < \Theta < 1$,

$$H = \frac{\theta A}{n} + \frac{4i}{n}.$$

D'où, aux infiniments petits près,

$$\cos 2n \arcsin H = \cos(2\theta A + 8i) = \frac{1}{2}[(e^8 + e^{-8}) \cos 2\theta A + i(e^{-8} - e^8) \sin 2\theta A].$$

Donc,

$$|\cos 2n \arcsin H| = \frac{1}{2}\sqrt{e^{16} + e^{-16} + 2\cos 4\theta A} \geqq \frac{1}{2}(e^8 - e^{-8}) > \frac{1}{2}(e^8 - 1).$$

Par conséquent, l'équation à coefficients réels,

$$\Omega_1(x) = \frac{\mu''(x - y_0)}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x, \tag{63}$$

où

$$\mu'' = \frac{H - x_0}{H - y_0} \cdot \frac{\mu}{\cos 2n \arcsin H} < \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1}\mu,$$

aura une racine complexe égale à H (en supposant, pour fixer les idées, $\Omega_1(H) = \mu$).

Mais ceci exige que l'on ait précisement, comme je l'affirmais,

$$\mu > k_n.$$

En effet, s'il en était autrement, on tirerait de l'inégalité $\mu \leq k_n$ que

$$\mu'' < \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1} k_n < \frac{k_n}{84}$$

et, dans ces conditions, comme nous le verrons facilement, toutes les racines de l'équation (63) devraient être réelles, de sorte que H n'en serait pas une racine.

En effet, en écrivant

$$\frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x = \cos 2n \arcsin x + \frac{x_0 - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x,$$

on voit que, pour $-\frac{2A}{n} \leq x \leq \frac{2A}{n}$,

$$\left|\frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x\right| < 1 + 2n(x_0 - y_0) < 1 + 2n\left[\frac{4}{n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{\left(\frac{4}{n}\right)^2}{\frac{4}{n} - \frac{\pi}{2n}}\right] <$$

$$< 1 + 2n\left[\frac{8}{n} + \frac{\pi}{2n}\right] < 21,$$

puisque $E - x_0 < \frac{\pi}{2n}$.

Sur le reste du segment $(-1, +1)$, on a $\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\right| < 2$; donc a fortiori

$$\left|\frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n \arcsin x\right| < 21.$$

Par conséquent, si $\mu'' < \frac{k_n}{4 \cdot 21}$, le polynome

$$\Omega_1(x) - \mu'' \cdot \frac{x-y_0}{x-x_0}\cos 2n \arcsin x$$

aura le signe de $\Omega_1(x)$ en tous les points, où $\Omega_1(x)$ est maximum ou minimum: toutes les racines de ce polynome seraient réelles.

Ainsi l'équation (60) admet bien une racine à l'intérieur du trapèze $\beta_i\beta_{i+1}CD$.

En construisant le trapèze $\beta_i\beta_{i+1}C'D'$ symétrique à $\beta_i\beta_{i+1}CD$ par rapport à la base $\beta_i\beta_{i+1}$, on en conclut que l'équation (60) admet au moins une paire de racines réelles ou complexes à l'intérieur de la figure $\beta_iD'C'\beta_{i+1}CD$. En ajoutant la racine de (60) comprise entre 0 et β_1 et en remarquant que l'équation (60) est paire, on voit qu'elle n'a pas d'autres racines que celles que nous venons de trouver ainsi que les racines égales et de signe contraire.

35. Il résulte de ce qui précède que l'on doit avoir

$$4n^2[\Omega_1^2(x) - k_n^2] = \left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 \cdot (x^2-1)\,Y(x), \tag{64}$$

où

$$Y(x) = \frac{(x^2-\eta_0^2)[x^2-(\beta_1+\eta_1)^2][x^2-(\beta_1+\eta_2)^2]\ldots[x^2-(\beta_{k-1}+\eta_{2k-2})^2]}{x^2[x^2-(\beta_1+\varepsilon_1)^2]^2\ldots[x^2-(\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1})^2]^2},$$

avec $|\varepsilon_i| < \beta_{i+1}-\beta_i$ et $|\eta_{2i-1}| < \frac{4}{n}+\beta_{i+1}-\beta_i$, $|\eta_{2i}| < \frac{4}{n}+\beta_{i+1}-\beta_i$.

Par conséquent,

$$Y(x) = \frac{\left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\beta_1+\eta_1}{x}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{\beta_{k-1}+\eta_{2k-2}}{x}\right)^2\right]}{\left[1-\left(\frac{\beta_1+\varepsilon_1}{x}\right)^2\right]^2\cdots\left[1-\left(\frac{\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}}{x}\right)^2\right]^2}$$

$$= \left[1-\left(\frac{\eta_0}{x}\right)^2\right]\left[1+\frac{2(\varepsilon_1-\eta_1)\beta_1+\varepsilon_1^2-\eta_1^2}{x^2}+3\theta_1\left(\frac{\beta_2}{x}\right)^4\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1+\frac{2(\varepsilon_{k-1}-\eta_{2k-2})\beta_{k-1}+\varepsilon_{k-1}^2-\eta_{2k-2}^2}{x^2}+3\theta_{k-1}\left(\frac{\beta_k}{x}\right)^4\right]$$

où $|\theta_i| < 1$, lorsque $|nx| > 2A$.

Donc

$$Y(x) = 1 + h(1 + \varphi), \tag{65}$$

où

$$|h| < \left|\frac{\eta_0}{x}\right|^2 + \left|\frac{2(\varepsilon_1 - \eta_1)\beta_1 + \varepsilon_1^2 - \eta_1^2}{x^2}\right| + \cdots + \left|\frac{2(\varepsilon_{k-1} - \eta_{2k-2})\beta_{k-1} + \varepsilon^2_{k-1} - \eta^2_{2k-2}}{x^2}\right| + 6\sum_{i=2}^{i=k}\left(\frac{\beta_i}{x}\right)^4, \tag{66}$$

φ tendant vers o avec h.

Mais, lorsque x varie de β_i à β_{i+1}, $\Omega_1(x)$ passe par un maximum ou minimum qui, en valeur absolue, dépasse $\frac{1}{4}k_n$, de sorte que la variation totale de $\Omega_1(x)$ dans cet intervalle est supérieure à $\frac{1}{2}k_n > 0,13$. Donc, en vertu de l'inégalité (57) qui est valable pourvu que $\frac{A}{n}$ soit assez petit, on a

$$\beta_{i+1} - \beta_i > \frac{0,13}{1,18\,n} > \frac{1}{10\,n}.$$

On en conclut que

$$|\eta_{2i}| < \frac{4}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i < 41(\beta_{i+1} - \beta_i)$$

et

$$|\eta_{2i-1}| < 41(\beta_{i+1} - \beta_i).$$

Donc

$$|h| < \frac{\beta_1^2}{x^2} + \frac{42}{x^2}\left[(\beta_2 - \beta_1)\left(\frac{4}{n} + 6\beta_2\right) + \cdots + (\beta_k - \beta_{k-1})\left(\frac{4}{n} + 6\beta_k\right)\right] + \\ + 60\sum_{i=2}^{i=k}\left(\frac{\beta_i}{x}\right)^4(\beta_i - \beta_{i-1})n < \frac{336\,A}{n^2x^2} + \frac{504\,A^2}{n^2x^2} + \frac{60\,A^5}{n^4x^4}. \tag{67}$$

Par conséquent, on peut écrire

$$Y(x) = 1 + 2t\left[\frac{A^2}{n^2x^2} + \frac{A^5}{n^4x^4}\right], \tag{68}$$

où A étant supposé fixe, $|t|$ reste borné (inférieur à 500, par exemple), lorsque nx croît indéfiniment.

Or, de l'équation (64) on tire

$$\frac{d\Omega_1}{2n\sqrt{k_n^2-\Omega_1^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A^2}{n^2x^2}+\frac{A^5}{n^4x^4}\right)\right], \tag{69}$$

l étant borné comme t.

D'où

$$\arccos\frac{\Omega_1(x)}{\pm k_n} = 2n\int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\left[1+l\left(\frac{A^2}{n^2x^2}+\frac{A^5}{n^4x^4}\right)\right]$$

$$= 2n\arccos x + p\left[\int_x^1 \frac{A^2dx}{nx^2\sqrt{1-x^2}} + \int_x^1 \frac{A^5dx}{n^3x^4\sqrt{1-x^2}}\right] =$$

$$= 2n\arccos x + p\left[\frac{A^2\sqrt{1-x^2}}{nx} + \frac{A^5\sqrt{1-x^2}}{3n^3x^3}(1+2x^2)\right];$$

p étant borné, lorsque nx croît indéfiniment. En supposant n pair, c'est le signe $-$ qu'il faut prendre devant k_n.

Donc,

$$-\Omega_1(x) = k_n\cos[2n\arccos x + \varepsilon_n], \tag{70}$$

où ε_n tend vers 0 comme $\frac{1}{nx}$, le nombre A étant fixé d'avance aussi grand que l'on veut.

Par conséquent, le polynome d'approximation $P(x)$ a pour expression asymptotique

$$G(x) = R(x) + \frac{1}{2n}\left[\cos 2n \arccos x - k_n\cos(2n\arccos x+\varepsilon_n)\right] =$$

$$= R(x) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{k_n}{2n}\right)\cos 2n\arccos x + \frac{\gamma_n(x)}{n} = \tag{48}$$

$$= R(x) + \left(\frac{1}{2n} - E_{2n}\right)T(x) + \frac{\gamma_n(x)}{n},$$

où $\gamma_n(x)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{nx}$. *C. q. f. d.*

Remarque. Les formules (48) subsistent encore pour n impair, pourvu que l'on y pose $T(x) = \cos 2n\arcsin x$.

36. Théorème. *En reprenant les notations du* § 30, *on a* $\lim_{n=\infty} 2nE_{2n} = \operatorname{Max} B_p =$ Constante.

En effet, C étant un nombre suffisamment grand, on aura, aux points $\left|\sin\frac{i\pi}{2n}\right| > \frac{c}{n}$, et aux points $\beta_i \leq \frac{c}{n}$ d'écart maximum,

$$|x| - G(x) = \pm E_{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

où ε_n est aussi petit qu'on veut, si n croît indéfiniment.

Par conséquent, si on construit le polynome d'approximation de $|x|$ relatif à cette suite de points, comme nous l'avons fait au § 27, on trouvera, en choisissant i_0 assez grand, que la meilleure approximation ϱ en ces points est

$$\varrho = \left(E_{2n} - \frac{\varepsilon}{n}\right)$$

avec $0 < \varepsilon < \operatorname{Max}|\varepsilon_n|$.

Donc, a fortiori

$$\lim 2n E_{2n} = \operatorname{Max}. B_\infty = \text{Constante}.$$

C. q. f. d.

37. Théorème. *En désignant par δ_i le maximum du module de l'expression de la forme*

$$S(b) = \cos \pi b \left[F(b) - B - \frac{a_1}{b^2 - \frac{1}{4}} - \cdots - \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - \left(\frac{2i-1}{2}\right)^2}\right]$$

qui s'écarte le moins de 0, *lorsque* $b \geq 0$, *on a* $2\lim\limits_{i=\infty} \delta_i = \lim\limits_{n=\infty} 2n E_{2n}$.

En effet, d'après le § 25, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{n\mu_n}{\delta_i} = 1, \tag{71}$$

où μ_n est la meilleure approximation de $|x|$ par un polynome de degré $2n$ de la forme

$$\begin{aligned} Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{n}\left[B + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \cdots + \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - b_i^2}\right] = \\ R(x) + \frac{T(x)}{2n} + \frac{T(x)}{n}\left[B - \frac{1}{2} + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \cdots + \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - b_i^2}\right], \end{aligned} \tag{34}$$

en posant, comme auparavant $b = \frac{2nx}{\pi}$, et en désignant par b_1, b_2, $\cdots$ les racines successives de l'équation

$$T\left(\frac{\pi b}{2n}\right) = \cos 2n \arcsin \frac{\pi b}{2n} = 0.$$

Le produit

$$Z(x) = T(x)\left[B - \frac{1}{2} + \frac{a_1}{b^2 - b_1^2} + \cdots + \frac{(2i-1)a_i}{b^2 - b_i^2}\right]$$

représente un polynome pair arbitraire de degré $2n$ ayant $2n - 2i$ racines égales à $\pm \sin\left(i + h - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}$, pour $h = 1, 2, \cdots n - i$.

Prenons i très grand par rapport au nombre A, dont dépend

$$\Omega_1(x) = -k_n \cos[2n \arcsin x + \varepsilon_n],$$

où ε_n tend vers 0 comme $\frac{1}{nx}$, et déterminons les coefficients de $Z(x)$ par la condition que $Z(x) = 0$ admette les $2i$ plus petites racines de $\Omega_1(x) = 0$, et de plus que $1 - 2B = k_n$. La dernière condition exprime que, pour x très grand $\frac{2Z(x)}{\Omega_1(x)}$ tend vers 1, c'est à dire que les coefficients de x^{2n} au numérateur et au dénominateur sont égaux. Par conséquent, on a

$$\frac{2Z(x)}{\Omega_1(x)} = \frac{\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[x^2 - \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{1}{2} + \alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}\right]\left[x^2 - \sin^2\left(i + \frac{3}{2} + \alpha_{i+1}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[x^2 - \sin^2\left(n - \frac{1}{2} + \alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}\right]} \quad (72)$$

où α_k est une quantité de l'ordre de $\frac{1}{k}$.

Je dis que, i étant pris assez grand, ce rapport différera aussi peu que l'on veut de 1, lorsque n croîtra indéfiniment, pour $x = \sin\left(\frac{i+h}{2n}\right)\pi$, où h diffère d'un entier positif ou nul de moins que $\varrho < \frac{1}{2}$, ou bien est une quantité négative quelconque. Pour fixer les idées, posons $h = 0$, car on verra sans peine qu'il n'y aura aucun changement essentiel à faire dans le calcul pour les autres valeurs considérées de h. On aura donc

$$\frac{2Z\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}{\Omega_1\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\right)}=\frac{\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}{\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}\right]\cdots\left[\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}\right]}=$$

$$\left[1+\frac{\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}}\right]\cdots$$

$$\cdots\left[1+\frac{\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}}\right].$$

Il suffira par conséquent de montrer que la somme

$$\frac{\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}}+\cdots+\frac{\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin^2\frac{i\pi}{2n}-\sin^2\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}}$$

tend vers o. Or celle-ci tendra vers o en même temps que la somme

$$\frac{\sin\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}-\sin\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{i\pi}{2n}-\sin\left(i+\frac{1}{2}+\alpha_i\right)\frac{\pi}{2n}}+\cdots+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{i\pi}{2n}-\sin\left(n-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}\right)\frac{\pi}{2n}},$$

donc, en même temps que la somme

$$\frac{\alpha_i}{\frac{1}{2}+\alpha_i}+\frac{\alpha_{i+1}}{\frac{3}{2}+\alpha_{i+1}}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{n-i-\frac{1}{2}+\alpha_{n-1}}.$$

Mais nous avons remarqué qu'on peut fixer un nombre D tel que $\alpha_k<\frac{D}{k}$. Il suffit donc de prouver que la série $\frac{D}{\frac{i}{2}+D}+\frac{D}{\frac{3(i+1)}{2}+D}+\cdots$

ou

$$S=\frac{1}{i}+\frac{1}{3(i+1)}+\frac{1}{5(i+2)}+\cdots$$

prolongée indéfiniment a une somme aussi petite que l'on veut, si i est pris assez grand. Or, ceci est évident, puisque

$$S < \int_0^\infty \frac{dx}{(2x+1)(x+i)} + \frac{1}{i} = \frac{\log 2i}{2i-1} + \frac{1}{i}.$$

Du fait que, pour $h \leqq 0$, $\frac{2Z(x)}{\Omega_1(x)}$ diffère infiniment peu de 1, on conclut que

$$n[Q(x) - G(x)] = \varepsilon$$

tend vers 0, lorsque $|x| \leqq \sin\frac{i\pi}{2n}$; de sorte que pour ces valeurs de x le rapport du maximum de $|Q(x) - |x||$ au maximum de $|G(x) - |x||$ qui est égal à

$$1 + \frac{\varepsilon}{n \,.\, \text{Max.}\, |G(x) - |x||}$$

tend vers 1.

D'autre part, dès que nx devient suffisamment grand, $2n(G(x) - |x|)$ diffère infiniment peu de $\Omega_1(x)$, et son maximum sera atteint en des points $\sin\frac{b\pi}{2n}$, où b diffère infiniment peu d'un entier positif. En ces points on a, à des infiniment petits près,

$$|2Z(x)| = |\Omega_1(x)| = k_n;$$

et, si x s'écarte de ces points, de sorte que b varie d'une quantité finie, par exemple, supérieure à $\frac{1}{4}$, on pourra indiquer un nombre fixe $\theta < 1$, tel que (aux infiniment petits près)

$$|2Z(x)| = |\Omega_1(x)| < \theta k_n.$$

On en conclut que $|2Z(x)|$ a aussi un maximum égal à k_n pour b infiniment voisin d'un entier positif. Puisque entre deux racines de $Z(x)$, il n'existe qu'un seul maximum de $|Z(x)|$, le maximum de $2|Z(x)|$ dans ces intervalles est égal à k_n; c'est à dire que dans ces intervalles également le rapport du maximum de $|Q(x) - |x||$ à celui de $|G(x) - |x||$ tend vers 1. Donc

$$\lim_{n=\infty} \frac{2n\mu_n}{k_n} = 1,$$

et, en tenant compte de (71), on a finalement

$$2\lim_{i=\infty} \delta_i = \lim_{n=\infty} k_n = \lim_{n=\infty} 2n\, E_{2n}$$

Les deux derniers théorèmes montrent respectivement que les méthodes que nous avons suivies, soit pour déterminer une borne supérieure (§§ 25—26) de $2nE_{2n}$, soit pour en donner une borne inférieure (§§ 27—30), permettent de calculer $\lim\limits_{n=\infty} 2nE_{2n}$ avec une approximation infinie par défaut, comme par excès.

38. *Généralisations.* Je voudrais, en terminant, faire observer que l'étude particulière de la meilleure approximation de $|x|$ faite dans ce Mémoire est susceptible d'importantes généralisations.[1]

En se reportant au § 15, on voit d'abord que les méthodes employées peuvent, sans modifications essentielles, être appliquées à l'étude de la meilleure approximation $E_{2n}[x^{\alpha}]$ de x^{α} par un polynome pair de degré $2n$ sur le segment 0 1. On devra trouver, en particulier, que *le produit* $(2n)^{\alpha} \cdot E_{2n}[x^{\alpha}]$ *tend vers une limite parfaitement déterminée* $\lambda(\alpha)$, *lorsque* n *croît indéfiniment.*

Mais on peut généraliser de plusieures manières le théorème 15.

Nous dirons que le polynome

$$P(x) = A_0 + A_1 x^{\alpha_1} + \cdots + A_k x^{\alpha_k} + \cdots + A_{k+n} x^{\alpha_{k+n}}$$

est un polynome oscillateur *d'ordre* $(k+n)$ et de *genre* k, s'il possède $(n+1)$ extrema égaux et de signes alternés dans l'intervalle 0 1.

Ceci posé, voilà un théorème, dont la démonstration est pareille à celle du théorème (15):

Si $Q(x) = B_0 + B_1 x_{\alpha_1} + \cdots + B_{k+n} x^{\alpha_{k+n}}$ *est le polynome oscillateur d'ordre* $(k+n)$ *et de genre* 0, *il ne peut y avoir plus d'un point d'écart maximum* b_i *du polynome* $P(x)$ *de même ordre et de genre différent de* 0 *entre deux points d'écart* β_i *et* β_{i+1} *de* $Q(x)$; *d'ailleurs, si* P *a un point d'écart confondu avec un point d'écart* β_i *de* Q, *il n'en aura pas d'autres dans les intervalles* $\beta_i\beta_{i+1}$ *et* $\beta_i\beta_{i-1}$.

On en déduit immédiatement que, *si le rapport* $\frac{k}{n+k}$ *du genre d'un polynome oscillateur à son ordre tend vers* 0, *on a*

$$\lim_{n=\infty} (\beta_i - b_i) = 0$$

Ainsi, en particulier, dans le cas, où $\alpha_i = i$, on a

$$\lim_{n=\infty} b_i = \lim_{n=\infty} \cdot \frac{1 - \cos\frac{i\pi}{n}}{2}. \tag{73}$$

[1] Il serait très intéressant de rechercher, si la limite de $2n\,E_{2n}$ est une transcendante nouvelle, ou bien s'exprime au moyen des transcendantes connues. Sans résoudre cette question, je signalerai, comme une coïncidence curieuse, que l'on a aussi $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0{,}282$ (à 0,0005 près).

Nous pouvons en tirer la conséquence suivante:

Si la fonction $f(x)$ jouit de la propriété qu'à une infinité de valeurs de n on peut faire correspondre des nombres k tels que les rapports $\frac{k}{n}$ et $\frac{E_{n+k}[f(x)]}{E_n[f(x)]}$ tendent vers o, *les polynomes d'approximation de $f(x)$ de ces degrés n auront des expressions asymptotiques, dont les points d'écart b_i satisferont à la condition*

$$\lim b_i = \lim \frac{1 - \cos \frac{i\pi}{n}}{2}.$$

En particulier, *toutes les fonctions analytiques* (régulières sur le segment o 1) *jouissent de cette propriété.*[1]

En effet, soit π_{n+k} le polynome d'approximation de $f(x)$ de degré $(n+k)$, et soit π'_n le polynome d'approximation de degré n de π_{n+k}, on voit que

$$|f(x) - \pi'_n(x)| \leq E_n[f(x)] + 2E_{n+k}[f(x)];$$

la condition que $\frac{E_{n+k}}{E_n}$ tend vers o, exprime donc que $\pi'_n(x)$ est une expression asymptotique du polynome d'approximation de degré n de $f(x)$. Mais

$$\pi_{n+k} - \pi'_n$$

sera un polynome oscillateur d'ordre $n+k$ et de genre k, dont les points d'écart jouiront de la propriété indiquée, puisque $\frac{k}{n}$ tend vers o.

Pour voir que toutes les fonctions analytiques satisfont à la condition du théorème, rappellons que pour toute fonction analytique on peut indiquer un nombre $\varrho < 1$, tel que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{E_n} < \varrho.$$

Il existera donc une infinité de valeurs de n tels que, si petit que soit ε, on ait

$$\frac{E_{n+k}}{E_n} < (\varrho + \varepsilon)^k;$$

de sorte que ce rapport pourra tendre vers o en même temps que $\frac{k}{n}$. c. q. f. d.

Les fonctions analytiques ne sont pas les seules pour lesquelles la distribution asymptotique des points d'écart des polynomes d'approximation satisfait à la condition (73).

[1] Voir ma Note des Comptes Rendus, 26 novembre, 1912 »Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques».

PERIODISCHE FUNKTIONEN

UND

SYSTEME VON UNENDLICH VIELEN LINEAREN GLEICHUNGEN.

Von

PAUL STÄCKEL

IN HEIDELBERG.

§ 1. Bedingungen für die Periodizität einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion.

Die vorliegenden Untersuchungen beziehen sich auf die Frage, wann die durch eine vorgelegte Potenzreihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

definierte analytische Funktion $f(z)$ der Funktionalgleichung

$$f(z+c) = f(z) \tag{2}$$

mit konstantem c genügt, wann also durch die Potenzreihe $P(z)$ eine analytische Funktion von z mit der primitiven Periode c dargestellt wird.[1] Im Allgemeinen wird die Potenzreihe $P(z)$ nur ein Element der Funktion $f(z)$ liefern; nur wenn sie unbeschränkt konvergent ist, kann sie mit der ganzen transzendenten Funktion $f(z)$ zusammenfallen. Hierin liegt eine grosse Schwierigkeit; denn im Allgemeinen wird man, um die Periodizität festzustellen, über den Konvergenzbereich der

[1] Dieselbe Frage habe ich in einer Abhandlung gleichen Titels behandelt, die in der *Festschrift*, HEINRICH WEBER *zu seinem siebzigsten Geburtstag gewidmet*, Leipzig 1912 erschienen ist. Die hier in den §§ 1 und 2 mitgeteilten Ergebnisse finden sich, in etwas anderer Darstellung, schon dort; dagegen werden in § 3 Untersuchungen weitergeführt, die dort nur begonnen worden sind.

Reihe $P(z)$ hinausgehen müssen. Mittel hierzu geben die klassischen Methoden, die G. Mittag-Leffler in seinen Abhandlungen über die analytische Darstellung monogener Funktionen entwickelt hat. Im Folgenden soll jedoch nur von dem alten, elementaren Verfahren der Gewinnung neuer Funktionselemente in Form von Potenzreihen mittels analytischer Fortsetzung Gebrauch gemacht werden. Es wird sich zeigen, dass man bereits auf diesem Wege zu Ergebnissen kommt, die Beachtung verdienen.

Wenn die Reihe (1) den Konvergenzkreis K_0 vom Radius ϱ besitzt, so wird die Funktion $f(z)$ vermöge der Gleichung (2) auch für die Kreise K_m erklärt, die um die Punkte $z = mc$ mit dem Radius ϱ beschrieben sind, wo m irgend eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Ist nun ϱ kleiner als die Hälfte des absoluten Betrages γ von c, so werden die Kreise K_m und K_{m+1} nicht übereinander greifen, und es werden zwar die betreffenden Stücke der analytischen Funktion $f(z)$ durch das Verfahren der Fortsetzung auseinander hervorgehen, es wird jedoch aussichtslos sein, auf diese Art notwendige und hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten a_n herzuleiten. Es genügt sogar noch nicht, dass diese Kreise ein gemeinsames Gebiet haben, man wird vielmehr fordern müssen, dass bei der Fortsetzung schon der erste Schritt zum Ziele führt, dass also die Umgebung des Punktes $z = c$ dem Kreise K_0 angehört oder, mit anderen Worten, dass *der Konvergenzradius* ϱ *der Reihe* $P(z)$ *grösser als* γ *ist.*

Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Gleichung (2) die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z+c)^n}{n!}, \tag{3}$$

in der der absolute Betrag von z kleiner als $\varrho - \gamma$ sein muss, und es wird daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} a_n \frac{c^{n-\nu} z^{\nu}}{(n-\nu)!\,\nu!},$$

oder, da der Weierstrass'sche Doppelreihensatz angewandt werden darf:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{\infty} a_{n+s} \frac{c^s}{s!} \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Demnach ergeben sich, unter den gemachten Voraussetzungen, als notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die durch die Reihe (1) definierte Funktion die Periode c besitzt, für die Koeffizienten a_n die Gleichungen

$$a_n = \sum_{s=0}^{\infty}{}' a_{n+s} \frac{c^s}{s!}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

die sich sofort in die Gestalt:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

bringen lassen; dass die additive Konstante a_0 in den Gleichungen (5) nicht vorkommt, mithin a_0 willkürlich bleibt, kann nicht überraschen.

Hiermit ist folgendes Ergebnis gewonnen:

Sämtliche Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

mit dem gemeinsamen Konvergenzradius ϱ, die periodische Funktionen mit einer Periode c definieren, deren absoluter Betrag kleiner als ϱ ist, ergeben sich, wenn die Koeffizienten a_n den Bedingungen unterworfen werden, dass

I. Das grösste Element der abgeleiteten Menge der Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

gleich dem reziproken Werte von ϱ ist (Bedingung von Cauchy).

II. Das System der unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen für die Grössen a_n:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

bei geeigneter Wahl von c identisch erfüllt ist.

Die Bedingung, dass der absolute Betrag von c kleiner als ϱ sein soll, ist unentbehrlich, denn sie sichert erst die Konvergenz der in den Gleichungen (5) auftretenden unendlichen Summen.

Während im Vorhergehenden ϱ als bekannt angesehen wurde, kann auch die Periode c gegeben, d. h. nach den Reihen (1) gefragt werden, deren Konvergenzradius ϱ grösser als der absolute Betrag γ von c ist und die eine analytische Funktion $f(z)$ mit der Periode c erzeugen. Die Antwort liefert der folgende Lehrsatz:

Alle Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!},$$

deren Konvergenzradius ϱ grösser als der absolute Betrag γ einer gegebenen Grösse c ist und die Funktionen $f(z)$ mit der Periode c erzeugen, ergeben sich, wenn

I. Die Koeffizienten a_n so gewählt werden, dass das System der unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt ist.

II. Die Unbekannten a_n in diesen Gleichungen der Schrankenbedingung unterworfen werden, dass das grösste Element der abgeleiteten Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

kleiner ist als der reziproke Wert von γ.

Die Schrankenbedingung ist wiederum notwendig, damit die unendlichen Summen konvergieren; wenn sie durch eine schärfere Bedingung ersetzt wird, so erhält man nur einen Teil der gesuchten Reihen.

§ 2. Über die Lösung des Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen für die unendlich vielen Koeffizienten einer Potenzreihe, die eine periodische Funktion definiert.

Die Koeffizienten a_n jeder Potenzreihe (1), deren Konvergenzradius ϱ grösser als der absolute Betrag γ einer gegebenen Grösse c ist und die durch Fortsetzung eine Funktion $f(z)$ mit der Periode c erzeugt, genügen dem System von unendlich vielen linearen homogenen Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots); \tag{5}$$

dabei sind die Unbekannten der Schrankenbedingung unterworfen, dass das grösste Element der abgeleiteten Menge der Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

kleiner als der reziproke Wert von γ ist. Versucht man, auf die Lösung des Systems (5) die Methoden anzuwenden, die bis jetzt für Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten entwickelt worden sind, so ist das Ergebnis, dass sie in dem vorliegenden Falle gänzlich versagen.

Bei den meisten Untersuchungen werden nämlich nur »reguläre» Lösungen in Betracht gezogen, bei denen, abgesehen von anderen Forderungen, die Schrankenbedingung erfüllt sein muss, dass die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^2|$$

konvergiert.[1] Dass die bei den Gleichungen (5) vorliegende CAUCHYsche Schrankenbedingung einen weit grösserer Bereich von Lösungen umfasst, als die regulären Lösungen, ist leicht einzusehen; das System (5) wird nämlich im Falle der Exponentialfunktion e^z durch die Werte

$$a_n = 1$$

befriedigt, die augenscheinlich keine reguläre Lösung darstellen. Aber auch die Sätze, die H. v. KOCH über nichtreguläre Lösungen aufgestellt hat,[2] erweisen sich als unzureichend. Unter den von ihm betrachteten Bedingungen hat ein System von linearen homogenen Gleichungen dann und nur dann eine von der trivialen Null-Lösung verschiedene Lösung, wenn die unendliche Determinante des Systems verschwindet, während diese bei dem System (5) den Wert 1 besitzt.

Um so bemerkenswerter ist es, dass sich das System (5) unter einer Schrankenbedingung auflösen lässt, die der vorher ausgesprochenen CAUCHYschen Bedingung sehr nahe kommt und unter der im besonderen alle Potenzreihen enthalten sind, bei denen die abgeleitete Menge der Menge der reellen, positiven Werte

$$\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}$$

ein grösstes Element aufweist, das kleiner ist als der reziproke Wert von

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma;$$

da $\frac{1}{2}\sqrt{5} = 1{,}1180\ldots$ ist, so kommt diese Grenze dem Werte γ nahe.

Sobald der Radius des Konvergenzkreises der Potenzreihe (1) grösser als $\frac{1}{2}\gamma$ ist, verhält sich die durch sie erzeugte Funktion $f(z)$ mit der Periode c regulär in einem Streifen (S), der sich ergibt, wenn zu der durch die Punkte $z = 0$ und $z = c$ gelegten Geraden beiderseits im Abstande

[1] Man vergleiche die umfassende Darstellung, die ERHARD SCHMIDT in den Rend. Circ. mat. Palermo, 25 (1908), S. 53—77 gegeben hat.

[2] *Sur la convergence des déterminants infinis*, Rend. Circ. mat. Palermo, 28 (1909), S. 255—266.

$$\sigma = \sqrt{\varrho^2 - \frac{1}{4}\gamma^2}$$

die Parallelen gezogen werden. Setzt man

$$w = e^{\frac{2\pi i z}{c}},$$

so entspricht dem Rechteck in der z-Ebene mit den Eckpunkten

$$z = \pm \frac{ic\sigma}{\gamma}, \qquad z = c \pm \frac{ic\sigma}{\gamma}$$

in der w-Ebene ein Kreisring (R), der von den beiden Kreisen mit dem Mittelpunkt $w = 0$ und den Radien

$$r_1 = e^{\frac{2\pi\sigma}{\gamma}}, \qquad r_2 = e^{-\frac{2\pi\sigma}{\gamma}}$$

begrenzt wird. Nach einer bekannten Schlussweise[1] ist $f(z)$ als Funktion von w angesehen in dem Ringe (R) eindeutig und regulär und lässt sich daher nach dem LAURENTschen Satze in Form einer Summe

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu w^\nu$$

darstellen. Mithin hat man für die Funktion $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{\frac{2\pi i \nu z}{c}}, \tag{6}$$

bei der die Periodizität in Evidenz gesetzt ist, und zwar findet in dem Streifen (S) der Breite 2σ absolute und gleichförmige Konvergenz statt. Im besonderen gilt dies für den Kreis, der um den Punkt $z = 0$ mit dem Radius σ beschrieben ist. Man darf daher für ihn den WEIERSTRASS'schen Doppelreihensatz anwenden, also die Exponentialausdrücke nach Potenzen von z entwickeln und darauf nach Potenzen von z ordnen. Dann aber ergeben sich durch Vergleichung mit der ursprünglichen Reihe (1) die Formeln:

$$a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

in denen die unendlichen Summen absolut konvergent sind.

[1] Vgl. etwa W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 1. Bd., Leipzig 1907, S. 407.

Die Ausdrücke (7) für die Koeffizienten a_n lassen sich jedoch nur dann zur Auflösung der Gleichungen (5) benutzen, wenn die in diesen Gleichungen auftretenden unendlichen Summen konvergieren, das heisst, wenn die zugehörige Potenzreihe (1) in einem Kreise konvergiert, dessen Radius grösser als γ ist. *Mithin muss*

$$\sigma > \gamma$$

sein. Die Formeln (7) liefern daher nur diejenigen Reihen (1), bei denen die durch Fortsetzung entspringende analytische Funktion $f(z)$ mit der Periode c sich in einem Streifen (S) regulär verhält, dessen Breite grösser als 2γ ist. Da aber die Breite von (S), wenn keine besonderen Voraussetzungen über die Potenzreihe (1) gemacht werden,

$$\sqrt{4\varrho^2 - \gamma^2}$$

beträgt, so sind unter den Reihen, die sich aus den Formeln (7) ergeben, sicher sämtliche Reihen enthalten, deren Konvergenzradius ϱ so gross ist, dass

$$\sqrt{4\varrho^2 - \gamma^2} > 2\gamma$$

wird, bei denen also

$$\varrho > \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma$$

ausfällt; dagegen ergeben sich von den Reihen, deren Konvergenzradius zwischen γ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma$ liegt, nur diejenigen, aus denen durch Fortsetzung eine Funktion $f(z)$ hervorgeht, die sich in einem Streifen (S) der Breite $2\sigma > 2\gamma$ regulär verhält. Dass es Potenzreihen der zweiten Art gibt, bei denen die Breite des zugehörigen Streifens (S) kleiner als 2γ ist, lässt sich leicht beweisen; hierzu genügt es, einen Pol in einen der beiden Schnittpunkte der Kreise K_0 und K_1 zu legen.

Nachdem die Konvergenzfrage geklärt ist, kann man leicht zeigen, dass durch die Ausdrücke (7) für die Unbekannten a_n die Gleichungen (5) identisch erfüllt sind. Man erhält nämlich

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t}\frac{c^t}{t!} = \sum_{t=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2\pi i}{c}\right)^{n+t}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^{n+t}\frac{c^t}{t!}\right\} = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n\cdot\sum_{t=1}^{\infty}\left\{\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\frac{(2\pi i\nu)^t}{t!}A_\nu \nu^n\right\}$$

und weiter, weil wegen der absoluten Konvergenz die Reihenfolge der Summationen vertauscht werden darf:

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t}\frac{c^t}{t!} = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\frac{(2\pi i\nu)^t}{t!}\right\}A_\nu \nu^n.$$

Diese Summe verschwindet aber, da bekanntlich, wenn ν irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet, die Identitäten bestehen:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(2\pi i \nu)^t}{t!} = e^{2\pi i \nu} - 1 = 0. \tag{8}$$

Das Ergebnis der vorhergehenden Untersuchungen lässt sich in den folgenden Lehrsatz zusammenfassen:

Betrachtet man die Gesamtheit der LAURENTschen *Entwicklungen:*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu w^\nu,$$

die in Ringen mit den Radien

$$r_1 = e^{2\pi\tau},\quad r_2 = e^{-2\pi\tau} \qquad (\tau > 1)$$

konvergieren und bildet aus den Grössen A_ν die Koeffizienten a_n mittels der Formeln:

$$a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \cdot \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n,$$

so ergeben sich von den Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!},$$

aus denen durch Fortsetzung analytische Funktionen $f(z)$ mit der Periode c des absoluten Betrages γ entspringen:

1) sämtliche Reihen, deren Konvergenzradius grösser als

$$\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma$$

ist.

2) von den Reihen, deren Konvergenzradius zwischen γ und $\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\gamma$ liegt, nur diejenigen, bei denen die zugehörige Funktion $f(z)$ sich in einem Streifen (S) regulär verhält, dessen Breite grösser als 2γ ist.

Hierbei ist zu beachten, dass die Radien r_1 und r_2 von γ unabhängig sind und dass c in den Formeln für die Koeffizienten a_n nur ausserhalb des Summenzeichens vorkommt, und zwar so, dass das Produkt

$$a_n \cdot c^n$$

von c unabhängig ist. Der Grund ist leicht zu erkennen; wird nämlich

$$z = cz'$$

gesetzt, so geht die betrachtete Funktion $f(z)$ in eine Funktion $g(z')$ mit der Periode 1 über.

Bemerkenswert ist ferner der Umstand, dass die Ausdrücke für die gesuchten Koeffizienten a_n:

$$a_n = \left(\frac{2\pi i}{c}\right)^n \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu \nu^n \tag{7}$$

die unendlich vielen Grössen

$$A_\nu \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

enthalten, die nur den leicht anzugebenden Schrankenbedingungen unterworfen sind, welche die Konvergenz der LAURENTschen Entwicklung im Ringe sichern, dass sie im übrigen aber ganz beliebig bleiben. Das System der unendlich vielen linearen Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

zeigt also in dieser Beziehung ein Verhalten, das von dem Verhalten der Systeme endlich vieler linearer Gleichungen gänzlich abweicht.

§ 3. Besondere Lösungen des Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen, das die Bedingung der Periodizität ausdrückt.

Wenn man die Menge der periodischen Funktionen $f(z)$ in Klassen einteilen will, so werden diejenigen als die einfachsten an die erste Stelle kommen, bei denen für die Koeffizienten a_n ein möglichst einfaches Bildungsgesetz besteht. Erfahrungen, die man auf anderen Gebieten der Analysis gemacht hat, legen es nahe, als ein solches Bildungsgesetz eine Rekursionsformel r-ter Stufe zu nehmen, nach der ein jeder Koeffizient a_{n+r} aus den r vorhergehenden Koeffizienten a_n, $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+r-1}$ mittels derselben linearen Gleichung

$$a_{n+r} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 a_{n+2} + \cdots + \lambda_{r-1} a_{n+r-1} \tag{9}$$

erhalten wird. Dies soll im Folgenden geschehen. Dabei wird sich zugleich eine gewisse Ergänzung der vorhergehenden Untersuchungen ergeben. Bei diesen wurde nämlich zur Herleitung der Auflösung (7) der unendlich vielen linearen Gleichungen (5) die Exponentialfunktion e^z und deren Periodizität benutzt, die in den Gleichungen (8) zur Geltung kommt. Es entsteht daher die Frage, ob sich die Funktion e^z nicht unmittelbar aus den Gleichungen (5) herleiten lässt. Es wird sich zeigen, dass die Exponentialfunktion in der Tat eine gewisse Ausnahmestellung einnimmt.

Es sei zunächst $r = 1$, also

$$a_{n+1} = \lambda_0 a_n. \tag{9'}$$

Hieraus folgt, dass

$$a_n = \lambda_0^{n-1} a_1 \tag{10'}$$

ist, wo der Koeffizient a_1 willkürlich bleibt. Ferner gilt nach (9') die Identität

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = \lambda_0 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} a_{n-1+t} \frac{c^{t-1}}{t!},$$

aus der sich sofort ergibt, dass die sämtlichen Gleichungen (5) auf die einzige Gleichung

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t \frac{c^{t-1}}{t!} = 0$$

zurückkommen. Diese Gleichungen sind demnach erfüllt, wenn bei gegebenem c die von Null verschiedene Grösse λ_0 aus der Gleichung

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 c)^{t-1}}{t!} = 0 \tag{11}$$

bestimmt wird.[1] Nachdem dieses geschehen ist, wird

$$P(z) = a_0 + \frac{a_1}{\lambda_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_0 z)^n}{n!}.$$

Es empfiehl sich daher, die beständig konvergente Potenzreihe

[1] Im Nenner der Gleichung (11) und in den Nennern der beiden vorhergehenden Gleichungen ist in der *Festschrift* (S. 402) $p!$ an Stelle von $t!$ gesetzt worden: dieser Druckfehler ist zu verbessern.

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{12}$$

einzuführen. Dann wird die ebenfalls beständig konvergente Potenzreihe

$$P(z) = b_0 + b_1 \,.\, E(\lambda_0 z),$$

wo b_0 und b_1 willkürliche Konstanten bezeichnen, die vorgeschriebene Periode c besitzen, falls λ_0 aus der Gleichung

$$E(\lambda_0 c) - 1 = 0 \tag{11'}$$

bestimmt wird.

Die ganze Schwierigkeit läuft mithin darauf hinaus, dass eine (von Null verschiedene) Wurzel der Gleichung

$$E(z) = 1 \tag{11''}$$

gefunden werden soll. Hat diese Gleichung eine von Null verschiedene Wurzel c, so besitzt sie unzählig viele solche Wurzeln, denn aus der Periodizität erschliesst man sofort, dass mit der Gleichung $E(c) = 0$ auch die Gleichungen $E(\nu c) = 0$ erfüllt sind, in der ν eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Es ist bekannt, dass

$$c = 2\pi i$$

ist, woraus sich

$$\lambda_0 = \frac{2\pi i}{c}$$

ergibt. Die Ausnahmestellung der Funktion $E(z) = e^z$ ist darin begründet, dass zum Beweise dieses Lehrsatzes weitere Hilfsmittel herangezogen werden müssen. Es wäre sehr zu wünschen, dass die hierbei benutzten Methoden eine historisch-kritische Darstellung fänden. Hier möge nur bemerkt werden, dass zwei Verfahrungsarten am gebräuchlichsten sind. Bei den Beweisen wird entweder der durch das Integral

$$z = \int_1^E \frac{du}{u}$$

erklärte Logarithmus der komplexen Veränderlichen E benutzt oder die Gleichung (11'') in die beiden Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = 0$$

zerlegt, deren identisches Bestehen für $z = 2\pi i$ aus dem Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen hervorgeht. Vom methodischen Standpunkte aus verdient das erste Verfahren ohne Zweifel den Vorzug, wenn auch das zweite seine didaktischen Vorteile haben mag.

Nunmehr werde $r = 2$ gesetzt, sodass

$$a_{n+2} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} \tag{9''}$$

ist. Hierbei muss λ_0 von Null verschieden sein, während λ_1 verschwinden darf.

Der Fall $\lambda_1 = 0$, der einer besonderen Behandlung bedarf, möge zuerst untersucht werden. Um die Formeln geschmeidiger zu machen, setze man

$$\lambda_0 = \mu^2.$$

Dann folgt aus den Gleichungen (9''):

$$a_{2\nu+1} = \mu^{2\nu} \cdot a_1, \quad a_{2\nu+2} = \mu^{2\nu} \cdot a_2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10''}$$

Ferner gilt die Identität

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = \mu^2 \cdot \sum_{t=1}^{\infty} a_{n-2+t} \frac{c^{t-1}}{t!},$$

sodass die sämtlichen Gleichungen (5) auf die zwei Gleichungen

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_t \frac{c^{t-1}}{t!} = 0, \quad \sum_{t=1}^{\infty} a_{t+1} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0$$

zurückkommen. Mithin ist nach (10''):

$$\begin{cases} a_1 \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(\mu c)^{2\nu}}{(2\nu+1)!} + \dfrac{a_2}{\mu} \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(\mu c)^{2\nu+1}}{(2\nu+2)!} = 0, \\ a_2 \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(\mu c)^{2\nu}}{(2\nu+1)!} + \mu a_1 \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{(\mu c)^{2\nu+1}}{(2\nu+2)!} = 0; \end{cases} \tag{12}$$

man hat also zwei lineare homogene Gleichungen für die beiden in den Gleichungen (12) auftretenden unendlichen Summen, und diese müssen beide gleich Null sein, weil die Determinante der Gleichungen nicht verschwinden kann. Sonst wäre nämlich bei geeigneter Wahl des Vorzeichens von μ:

$$a_2 = \mu \cdot a_1$$

und daher nach (10''):

$$a_n = \mu^{n-1} \cdot a_1,$$

das heisst, es würde der Fall $r = 1$ vorliegen. Mithin muss die Grösse μc den beiden Gleichungen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!} = 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = 0$$

genügen. Diese sind gleichzeitig für

$$z = 2\pi i$$

erfüllt, demnach ist bei gegebenem c

$$\mu = \frac{2\pi i}{c}$$

zu setzen, und die allgemeinste Lösung der Aufgabe wird:

$$P(z) = b_0 + b_1 \sin\frac{2\pi z}{c} + b_2 \cos\frac{2\pi z}{c},$$

wo b_0, b_1, b_2 willkürliche Konstanten bedeuten.

Jetzt möge λ_1 von Null verschieden sein. Dann werden die Koeffizienten a_n lineare, homogene Funktionen von a_1 und a_2, etwa

(10*) $$a_n = \varphi_n a_1 + \psi_n a_2;$$

hierbei sind φ_n und ψ_n Funktionen von λ_0 und λ_1, die ebenso wie die a_n den Rekursionsformeln (9'') genügen, aus denen sie sich nämlich ergeben, wenn beziehungsweise $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ und $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ gesetzt wird. Wenn sich nun auch die φ_n und ψ_n mittels Determinanten explizite herstellen lassen, so werden die Formeln doch so verwickelt, dass die wirkliche Durchführung der Rechnungen erhebliche Schwierigkeiten bietet. Indessen lassen sich auch ohne die Benutzung der expliziten Ausdrücke für φ_n und ψ_n einige Schlüsse ziehen.

Zunächst erkennt man, dass das Bestehen der beiden ersten Gleichungen des Systemes (5) das Bestehen aller übrigen nach sich zieht. Werden in diesen Gleichungen für die a_n die Ausdrücke (10*) eingesetzt, so erhält man die Relationen:

$$
(13) \qquad \begin{cases} a_1 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_n c^{t-1}}{t!} + a_2 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\psi_n c^{t-1}}{t!} = 0, \\ a_1 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_{n+1} c^{t-1}}{t!} + a_2 \cdot \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{\psi_{n+1} c^{t-1}}{t!} = 0. \end{cases}
$$

Wenn man hierin, wie bei dem Fall $\lambda_1 = 0$, die Grössen a_1 und a_2 als willkürliche Konstanten ansehen wollte, so würden sich *vier* Gleichungen für die beiden Unbekannten λ_0 und λ_1 ergeben, während man in jenem Falle *zwei* Gleichungen für λ_0 bekommen hatte, die jedoch eine gemeinsame Lösung besassen. Ob das auch hier stattfindet, muss unentschieden bleiben. Wenn man jedoch die Grössen a_1 und a_2 ebenfalls als Unbekannte ansieht, so muss die Determinante des Systems (13) verschwinden, und es ergibt sich eine einzige Gleichung zwischen λ_0 und λ_1, gleichzeitig wird aber

$$a_2 = \varkappa a_1,$$

wo $\varkappa$ eine Funktion von λ_0 und λ_1 bedeutet. Man wird daher erwarten dürfen, dass es eine von zwei willkürlichen Konstanten abhängige Funktionenschar gibt, die der Aufgabe genügt. Wenn es auch nicht möglich ist, diese Funktionen explizite herzustellen, so lässt sich doch zeigen, dass sie *notwendig ganze transzendente Funktionen von z sind.*

Zum Beweise beachte man, dass nach den Gleichungen (10*):

$$P(z) = a_0 + a_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{z^n}{n!} + a_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{n!}$$

wird, sodass alles auf die Untersuchung der Funktionen

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{z^n}{n!}, \quad \Psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \frac{z^n}{n!}$$

ankommt. Es wird genügen, die Funktion $\Phi(z)$ zu betrachten, da sich der Beweis für $\Psi(z)$ ganz ähnlich gestaltet. Nunmehr werde eine positive Grösse σ so gewählt, dass sie grösser als 1, $|\lambda_0|$, $|\lambda_1|$ ist. Dann folgt aus der Gleichung

$$\varphi_{n+2} = \lambda_0 \varphi_n + \lambda_1 \varphi_{n+1}$$

die Ungleichheit

$$|\varphi_{n+2}| < [|\varphi_n| + |\varphi_{n+1}|] \cdot \sigma,$$

und man erhält jetzt, weil

$$\varphi_1 = 1, \ \varphi_2 = 0$$

ist, der Reihe nach die Ungleichheiten:

$$|\varphi_3| < \sigma,$$

$$|\varphi_4| < \sigma . \sigma,$$

$$|\varphi_5| < (\sigma + \sigma^2) . \sigma < 2\sigma^3,$$

$$|\varphi_6| < (\sigma^2 + 2\sigma^3) . \sigma < 4\sigma^4.$$

$$|\varphi_7| < (2\sigma^3 + 4\sigma^4) . \sigma < 8\sigma^5,$$

sodass allgemein

$$|\varphi_n| < 2^{n-4}\sigma^{n-2}$$

wird. Die Reihe für die Funktion $\Phi(z)$ konvergiert daher mindestens ebenso stark wie die Reihe für die Funktion $e^{2\sigma z}$.

Für den Fall einer beliebigen Stufenzahl r möge nur bemerkt werden, dass die unendlich vielen linearen Gleichungen (5) für die Koeffizienten a_n auf die r ersten zurückkommen und dass man in ähnlicher Weise wie für $r = 2$ Reihen erhält, die mindestens ebenso stark konvergieren wie die Funktion $e^{r\sigma z}$, wo σ eine Konstante bedeutet.

Karlsruhe i. B., im Oktober 1912.

ÜBER EINE KLASSE VON GANZEN FUNKTIONEN UND IHRE ANWENDUNG AUF DIE ZAHLENTHEORIE.

Von

J. F. STEFFENSEN

in Kopenhagen.

Die folgenden Auseinandersetzungen sind in der Hauptsache ein Auszug aus meiner dänisch geschriebenen Habilitationsschrift »Analytiske Studier med Anvendelser paa Taltheorien».[1] Da ich in der zitierten, ziemlich umfangreichen Arbeit alle Beweise in Detail gegeben habe, darf ich mich hier auf die Wiedergabe der wesentlichsten Resultate nebst einigen Andeutungen des Beweisganges beschränken. Derjenige Leser, der die vollständigen Beweise zu besitzen wünscht, wird sie dann leicht — nötigenfalls unter Zuhilfenahme des dänischen Originals — selbst rekonstruieren können.

Der Zweck meiner Arbeit war ursprünglich, die nicht nur in der elementaren, sondern leider auch in der analytischen Zahlentheorie eingebürgerten diskontinuierlichen Funktionen durch analytische Funktionen zu ersetzen. Wie man in der Theorie der Gammafunktion das nur für ganze, positive Argumente definierte *Fakultät* durch eine analytische Funktion, die *Gammafunktion*, ersetzt, so kann man prinzipiell in der analytischen Zahlentheorie die nur für ganze, äquidistante Argumente definierte zahlentheoretische Funktion durch eine zweckmässige *Interpolation* als analytische Funktion ausgestalten. Dies war schon lange bekannt, aber die Simplifikation, durch welche die Methode erst fruchtbar werden konnte, war bis jetzt ausgeblieben. Zwar hat von Koch[2] die Divisorfunktion als ganze Funktion in einer Weise definiert, welche im wesentlichen mit der in dieser Arbeit vorgeschlagenen identisch ist; aber er hat die Konsequenzen nicht

[1] Kopenhagen 1912 (Vilhelm Tryde). XIV + 148 S.

[2] C. R. de l'Ac. des Sciences, Paris, vol. 118 (1894) S. 850.

gezogen, indem er die Primzahlfunktion in künstlicher Weise aus der Divisorfunktion ableitet, anstatt zu erkennen, dass diese beiden Funktionen und viele andere aus einem und demselben Prinzip einfach abgeleitet werden können.

Dieses Prinzip ist die sehr naheliegende, vielleicht zuerst von HADAMARD[1] ausdrücklich angegebene, Interpolationsformel

$$g(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi} \sum \frac{a_m (-1)^m}{t-m}, \tag{1}$$

wo offenbar $g(m) = a_m$.

Nachdem ich die Bedeutung dieser Formel für die analytische Zahlentheorie erkannt hatte, fasste ich übrigens meine Aufgabe etwas weiter, indem es wünschenswert erschien, die Funktionenklasse $g(t)$ nach verschiedenen Richtungen hin genauer zu untersuchen, um schliesslich die zahlentheoretischen Anwendungen folgen zu lassen.

Für meinen Zweck ist es gewöhnlich bequemer, die folgende Interpolationsformel zu benutzen

$$f(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} b(x), \tag{2}$$

wo

$$b(x) = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n}\right) f(n). \tag{3}$$

Es wird hierbei vorausgesetzt, dass (3) gleichmässig in jedem endlichen Bereich konvergiert, welcher keinen der Punkte $x = 1, 2, \ldots n, \ldots$ enthält (auch nicht auf seiner Begrenzung). Dann stellt (2) eine ganze Funktion dar.

Sehr oft werde ich die speziellere, jedoch für die zahlentheoretischen Anwendungen genügende Voraussetzung machen

$$f(n) = O(n^{1-\delta}) \qquad (\delta > 0), \tag{4}$$

wodurch bekanntlich ausgedrückt wird, dass

$$\limsup_{n=\infty} \frac{|f(n)|}{n^{1-\delta}} < \infty.$$

Man kann übrigens leicht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Partialbruchreihe, deren Pole ganze Zahlen sind, angeben. Sie lautet:

[1] La série de TAYLOR et son prolongement analytique, Paris 1901 (»Scientia«), S. 27.

Es sei $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_\nu$ *konvergent; dann ist* $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{x+\nu} a_\nu$ *gleichmässig konvergent in jedem endlichen Bereich, welcher keine ganze Zahl enthält, und umgekehrt.*

Der Beweis erfolgt sofort, wenn man bemerkt, dass

$$\frac{\nu}{x+\nu} = 1 - \frac{x}{\nu} + \frac{x^2}{\nu^2} \cdot \frac{\nu}{x+\nu}.$$

Man kann (2) gewissermassen als die *Umkehrung* von (3) betrachten; durch (2) wird dann der Koeffizient der Partialbruchreihe (3) als ganze Funktion des Index gegeben. Über eine Klasse von Partialbruchreihen, welche (3) als Spezialfall enthält, beweise ich das folgende Umkehrtheorem:

Es sei die Partialbruchreihe

$$B(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n - x}$$

gleichmässig konvergent in jedem endlichen Bereich, welcher kein ω_n *enthält. Die Zahlen* ω_n *bezeichnen die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen der ganzen Funktion*

$$\int_{\cdot}^{\cdot} e^{\Phi(x)} dx,$$

wo $\Phi(x)$ *eine beliebige ganze Funktion ist. Es sei ferner* $\psi(x)$ *eine ganze Funktion mit der Eigenschaft* $\psi(\omega_n) = 1$ *für alle* n. *Dann kann man setzen*

$$f(x) = -\psi(x)\, e^{-\Phi(x)} \left(\int_{\cdot}^{\cdot} e^{\Phi(x)} dx\right) B(x),$$

wo $f(x)$ *eine ganze Funktion ist, welche für* $x = \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$ *die Werte* $f(\omega_\nu)$ *annimmt.*

Ganz ähnliche Umkehrtheoreme erhält man für die Dirichlet'schen Reihen. Für die Anwendungen auf die analytische Zahlentheorie ist der folgende Satz fundamental:

Es sei eine Dirichlet'sche *Reihe*

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{\infty} r^{-x} f(r) \tag{5}$$

gegeben, wo $\sum r^{-2} f(r)$ *konvergent vorausgesetzt wird; mann kann dann setzen*

$$f(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} x^{\nu}\varphi(\nu+1), \tag{6}$$

wo $f(x)$ eine ganze Funktion ist, welche für $x = 1, 2, \ldots r, \ldots$ die Werte $f(r)$ annimmt. Die Reihe $\Sigma x^{\nu}\varphi(\nu+1)$ ist mindestens für $|x| < 1$ konvergent.

Der Satz folgt sogleich, wenn man (3) nach Potenzen von x entwickelt und (5) benutzt, also

$$h(x) = \sum_{1}^{\infty} x^{\nu}\varphi(\nu+1) \qquad (|x| < 1). \tag{7}$$

Aus (6) erhält man beispielsweise die folgenden Darstellungen von zahlentheoretischen Funktionen, welche als Koeffizienten in DIRICHLET'schen Reihen auftreten (als ganze Funktionen):

$$\tau(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} x^{\nu} s_{\nu+1}^{2}, \tag{8}$$

wo $\tau(n)$ die Anzahl der Divisoren von n bezeichnet, während s_n wie gewöhnlich für $\zeta(n)$ steht;

$$\tilde{\omega}(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} x^{\nu}\, l\, s_{\nu+1}, \tag{9}$$

wo $\tilde{\omega}(n)$ die bekannte RIEMANN'sche Funktion ist, welche für $n = p^r$, wo p eine Primzahl und r eine ganze positive Zahl ist, den Wert $\frac{1}{r}$ annimmt, aber für alle anderen ganzen Werte verschwindet;

$$\Lambda(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} x^{\nu}\frac{\zeta'(\nu+1)}{\zeta(\nu+1)}, \tag{10}$$

$$\mu(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} x^{\nu} s_{\nu+1}^{-1}, \tag{11}$$

$$\lambda(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_{1}^{\infty} x^{\nu}\frac{s_{2\nu+2}}{s_{\nu+1}}, \tag{12}$$

wo $\Lambda(n)$, $\mu(n)$, $\lambda(n)$ die in LANDAU's Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen[1] benutzte Bedeutung haben;

[1] Leipzig und Berlin 1909, vol. I—II; im folgenden als »LANDAU« zitiert.

$$\frac{\varphi_0(x)}{x} = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_1^\infty x^\nu \frac{s_{\nu+1}}{s_{\nu+2}}, \tag{13}$$

wo $\varphi_0(n)$ die gewöhnlich mit $\varphi(n)$ bezeichnete EULER'sche Funktion ist;

$$\frac{\sigma(x)}{x} = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\sum_1^\infty x^\nu s_{\nu+1} s_{\nu+2}, \tag{14}$$

wo $\sigma(n)$ die Summe aller Divisoren von n bedeutet.

Wie in dem Falle der Partialbruchreihen kann man auch hier ein Umkehrtheorem für eine viel allgemeinere Klasse von Reihen aufstellen. Es lautet:

Es sei eine DIRICHLET'sche *Reihe*

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \omega_r^{-x} f(\omega_r)$$

gegeben, wo

$$\frac{f(\omega_r)}{\omega_r} = O(r^{-1-\delta}) \qquad (\delta > 0).$$

Die Zahlen ω_n ($\omega_1 \neq 0$) bezeichnen die nach wachsenden absoluten Beträgen geordneten Nullstellen der ganzen Funktion

$$\int_0^x e^{\Phi(x)}\,dx,$$

wo $\Phi(x)$ eine beliebige ganze Funktion ist. Es sei ferner $\psi(x)$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft $\psi(\omega_n) = 1$ für alle n. Dann kann man setzen

$$f(x) = -\psi(x)\,e^{-\Phi(x)}\left(\int_0^x e^{\Phi(x)}\,dx\right)\sum_0^\infty x^\nu \varphi(\nu+1) \qquad (|x| < |\omega_1|),$$

wo $f(x)$ eine ganze Funktion ist, welche für $x = \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\nu, \ldots$ die Werte $f(\omega_\nu)$ annimmt.

Um die durch (2) und (3) definierte Klasse von ganzen Funktionen näher zu studieren, müssen wir die verschiedenen Darstellungsweisen, welche sie zulässt, untersuchen, im besonderen ihre Produktentwicklung, Potenzreihe, Faktoriellenreihe und Integraldarstellung.

Die Form der WEIERSTRASS'schen *Produktentwicklung* unserer Funktionenklasse hängt bekanntlich von der Verteilung der Nullstellen ab. Hierüber hat man zuerst den Satz:

Es sei $f(n) \geqq 0$ für alle n. Dann hat $f(x)$ lauter reelle Nullstellen; diejenigen Nullstellen, welche nicht dem Faktor $\sin 2\pi x$ angehören, sind alle positiv.

Der Satz wird sogleich bewiesen, indem man in (3) $x = \xi + i\eta$ setzt und den reellen Teil von dem imaginären trennt.

Unter der genannten Voraussetzung $f(n) \geqq 0$ hat, wie aus (3) erhellt, $b(x)$ höchstens eine Nullstelle zwischen ν und $\nu + 1$. Werden die Nullstellen von $f(x)$ mit α_r bezeichnet, ist also $\Sigma |\alpha_r|^{-2}$ konvergent, so muss $f(x)$ die Form

$$f(x) = e^{A(x)} \cdot x^2 \prod_{r=3}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right) e^{\frac{x}{\alpha_r}} \tag{15}$$

haben, wo $A(x)$ eine ganze Funktion bezeichnet.

Durch ganz elementaren Betrachtungen über die Variation des Vorzeichens von (3) beweist man übrigens den folgenden Satz über die genaue Anzahl der Nullstellen von $f(x)$:

Es sei $f(n) \geqq 0$ für alle n, und es sei N eine solche positive ganze Zahl, dass $f(N) \neq 0$, während ε eine genügend kleine positive Grösse bezeichnet. Dann hat $f(x)$ innerhalb eines Kreises mit Zentrum im Nullpunkte und Radius $N + \varepsilon$ genau $4N + 1$ Nullstellen.

Wir werden jetzt die Voraussetzung $f(n) \geqq 0$ fallen lassen. Unter der Annahme (4) erhält man aus (3), indem $x = \xi + i\eta$,

$$\left| \frac{b(x)}{x} \right| < \sum_{1}^{\infty} \frac{K}{n^{\delta} \sqrt{(\xi - n)^2 + \eta^2}}. \tag{16}$$

Eine nähere Untersuchung dieses Majorantwertes zeigt, dass $\frac{b(x)}{x}$ gleichmässig verschwindet, wenn sich x ins Unendliche entfernt, ohne einem Pole von $b(x)$ unendlich nahe zu kommen. Andrerseits ist bekanntlich $\sin 2\pi x = O(e^{2\pi|x|})$. Mit Bezug auf die Pole findet man aus (2) und (3) für $x = \nu + h$ ($|h| \leqq \lambda$) den Majorantwert $f(\nu + h) = O(\nu^2)$. Zusammen genommen besagt dies, dass man für das Maximum $M(r)$ des absoluten Betrages von $f(x)$ für $|x| = r$ die Ungleichheit

$$M(r) < e^{r^{1+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon \text{ beliebig klein } > 0) \tag{17}$$

hat, welche von einem gewissen Werte von r ab stattfindet.

Aus (17) folgt nach dem Satz von Hadamard, dass $f(x)$ die folgende Form hat

$$f(x) = k e^{ax} \cdot x^2 \prod_{r=3}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_r}\right) e^{\frac{x}{\alpha_r}}, \tag{18}$$

wo übrigens

$$k = -\sum_1^\infty \frac{f(n)}{n^2}. \tag{19}$$

Man erhält die *Potenzreihe* für $f(x)$, indem man die Potenzreihe für $b(x)$ oder (7) mit der Potenzreihe für $-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi}$ multipliziert, also

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_2^\infty a_\nu x^\nu, \\ a_\nu &= -\varphi(\nu) + \frac{(2\pi)^2}{3!}\varphi(\nu-2) - \frac{(2\pi)^4}{5!}\varphi(\nu-4) + \cdots \end{aligned}\right\}. \tag{20}$$

Da $f(x)$ eine ganze Funktion ist, konvergiert diese Potenzreihe für jedes endliche x. Die Entwickelung für a_ν enthält nur eine *endliche* Anzahl von Gliedern und bricht mit $\varphi(2)$ oder $\varphi(3)$ ab, je nachdem ν gerade oder ungerade ist.

Man erhält zum Beispiel aus (20)

$$\tilde{\omega}(x) = \sum_2^\infty x^\nu \left(-l s_\nu + \frac{(2\pi)^2}{3!} l s_{\nu-2} - \frac{(2\pi)^4}{5!} l s_{\nu-4} + \cdots\right), \tag{21}$$

$$\tau(x) = \sum_2^\infty x^\nu \left(-s_\nu^2 + \frac{(2\pi)^2}{3!} s_{\nu-2}^2 - \frac{(2\pi)^4}{5!} s_{\nu-4}^2 + \cdots\right), \tag{22}$$

$$\mu(x) = \sum_2^\infty x^\nu \left(-\frac{1}{s_\nu} + \frac{(2\pi)^2}{3!}\frac{1}{s_{\nu-2}} - \frac{(2\pi)^4}{5!}\frac{1}{s_{\nu-4}} + \cdots\right). \tag{23}$$

Überhaupt können die Koeffizienten der Mehrzahl der in der analytischen Zahlentheorie auftretenden Potenzreihen dieser Art einfach durch die »Potenzsummen» s_ν ausgedrückt werden,[1] doch erfordert die Reihe für $\Lambda(x)$ auch Kenntnis von $\zeta'(\nu)$. In Bezug auf die VON KOCH'sche Divisorfunktion hat dieser Verfasser schon erkannt, dass ihre Koeffizienten rationale Polynome in π sind.

In Bezug auf die Grössenordnung von a_ν ist, da $f(x)$ das Geschlecht 1 hat, nach POINCARÉ

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu \sqrt[\nu]{\nu!} = 0, \tag{24}$$

[1] In Bezug auf die numerischen Werte der s_ν siehe die in N. NIELSEN »Handbuch der Theorie der Gammafunktion» S. 39 angegebene Literatur.

also speziell

$$a_\nu = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu!}}\right). \tag{25}$$

Man kann dieses Resultat verschärfen, indem man in (2) die Identität

$$\frac{\sin 2\pi(x-n)}{x-n} = \int_0^{2\pi} \cos(x-n)\,t\,dt$$

einführt und differentiiert. Man erhält

$$\left.\begin{aligned} a_{2r} &= \frac{(-1)^r}{2\pi(2r)!}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\int_0^{2\pi} t^{2r}\cos nt\,dt, \\ a_{2r+1} &= \frac{(-1)^r}{2\pi(2r+1)!}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)\left[\frac{(2\pi)^{2r+1}}{n} + \int_0^{2\pi} t^{2r+1}\sin nt\,dt\right], \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

woraus durch leichte Rechnungen

$$\left.\begin{aligned} |a_\nu| &< K\frac{(2\pi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}, \\ K &= \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{|f(n)|}{n^2}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Entwickelt man $f(x)$ nach Potenzen von lx, so erhält man eine für jeden endlichen Wert von lx geltende Potenzreihe

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^{\infty} g_n (lx)^n, \\ g_n &= \frac{1}{n!}\sum_2^{\infty} a_\nu \nu^n, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} |g_n| &< \frac{K}{n!}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(2\pi)^{\nu-1}\nu^n}{(\nu-1)!} \\ &< \frac{K}{2\pi}(n+1)\left(\frac{e}{l\frac{n+1}{2\pi}}\right)^{n+1} - \frac{K}{n!}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Über die Möglichkeit, Reihen von der Form (28) für numerische Rechnungen zu benutzen, gibt (29) leider keinen Aufschluss.

Der Versuch, $f(x)$ in eine *Faktoriellenreihe*, das heisst in eine Reihe nach den Polynomen

$$x^{(n)} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$$

zu entwickeln, führt auf interessante Resultate. Wir nehmen zum Ausgangspunkt NEWTON's Formel für Interpolation mit dividierten Differenzen[1]

$$\left.\begin{aligned} u(x) = u(a) &+ (x-a)\,\delta(a,b) + (x-a)(x-b)\,\delta(a,b,c) + \cdots \\ &+ (x-a)(x-b)\ldots(x-g)\,\delta(a,b,\ldots,h) \\ &+ (x-a)(x-b)\ldots(x-h)\,\delta(a,b,\ldots,h,x), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wo

$$\delta(a,b,\ldots,h,x) = \frac{u(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-h)} + \sum \frac{u(e)}{(e-a)(e-b)\ldots(e-x)}. \tag{31}$$

Für die spezielle Argumentenreihe

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ \ldots,\ n,\ -n$$

erhält man hieraus

$$\begin{aligned} x(x^2-1)\ldots(x^2-n^2) \sum_{\nu=-n}^{\nu=n}{}' \frac{-u(\nu)}{\nu(\nu^2-1)\ldots(\nu^2-n^2)(\nu-x)} \\ = u(0) + \frac{x}{1}\,\Delta u(0) + \cdots + \frac{x(x^2-1)\ldots[x^2-(n-1)^2]\,.\,(x-n)}{(2n)!}\,\Delta^{2n} u(-n), \end{aligned}$$

wo im Nenner der Faktor $(\nu - r)$ für $r = \nu$ ausgelassen wird. Um in dieser Formel n ohne Grenzen wachsen lassen zu dürfen, kann man $\sum' \left|\frac{u(\nu)}{\nu}\right|$ konvergent annehmen. Man erhält dann durch einfache Überlegungen den Satz:

Es sei $\sum_{-\infty}^{\infty}{}' \left|\frac{u(\nu)}{\nu}\right|$ *konvergent; dann hat man*

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\sin\pi x}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^\nu u(\nu)}{\nu - x} = u(0) &+ \\ + \sum_{0}^{\infty}{}' \left[\binom{x+r}{2r+1}\Delta^{2r+1} u(-r) + \binom{x+r}{2r+2}\Delta^{2r+2} u(-r-1)\right], \end{aligned}\right| \tag{32}$$

[1] THIELE: Interpolationsrechnung, S. 5 (Leipzig 1909).

eine Reihe, die gleichmässig in jedem endlichen Bereich konvergiert. Jede ganze Funktion von dem Typus

$$u(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu u(\nu)}{\nu - x}$$

lässt sich daher unter der gegebenen Voraussetzung in eine Faktoriellenreihe der genannten Art entwickeln.

Man erhält z. B. für $u(0) = 1$, $u(\nu) = 0 \; (\nu \neq 0)$,

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 + \sum_{0}^{\infty} \frac{(0 - x^2)(1 - x^2)(4 - x^2) \ldots (r^2 - x^2)}{[(r+1)!]^2} \tag{33}$$

und für $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{\pi} = 1 + \sum_{0}^{\infty} \frac{\left(0 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(4 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(r^2 - \frac{1}{4}\right)}{[(r+1)!]^2}. \tag{34}$$

Eine wichtige Folgerung aus (32) ist, dass *die Interpolationsformel von* de la Vallée-Poussin [1] — welche nichts als die linke Seite von (32) für eine *endliche* Anzahl von $u(\nu)$ ist — *sich immer in eine beständig konvergierende Faktoriellenreihe der genannten Art entwickeln lässt.* Bei dieser Entwicklung ersetzt man natürlich die fehlenden Funktionswerte durch Nullen.

Unsere Funktionenklasse $f(x)$ gehört zum Typus $u(x)$; um ihre Entwicklung nach (32) zu erhalten, ersetzt man einfach darin x durch $2x$ und setzt

$$u(0) = u(-n) = u(2n+1) = 0,$$

$$u(2n) = \frac{f(n)}{n}.$$

Hinreichende Bedingungen für die Entwicklung einer ganzen Funktion in eine Interpolationsreihe sind neuerdings von G. Faber [2] elementar aufgestellt worden.[3] Die Faber'sche Bedingungen scheinen jedoch auf die Funktionenklasse $f(x)$ nicht unmittelbar anwendbar zu sein.

[1] Académie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, 1908, S. 319.

[2] Mathematische Annalen, vol. 70 (1911), S. 48.

[3] Das exakte Restglied in Newton's Formel ist von J. L. W. V. Jensen angegeben worden Bull. de l'Ac. Royale de Danemark, 1894, S. 251).

Der wichtigste Bestandteil von $f(x)$, nämlich die meromorphe Funktion $b(x)$, kann unter gewissen — freilich ziemlich einschränkenden — Bedingungen nach *Fakultäten* (in englischer Bezeichnungsweise »inverse Faktoriellen») entwickelt werden.

Es muss offenbar eine Identität von der Form

$$\sum_{1}^{n} \frac{(-1)^{\nu+1}\nu a_\nu}{x+\nu} = \sum_{1}^{n} \frac{\nu!\, b_\nu}{(x+1)\ldots(x+\nu)} \tag{35}$$

bestehen. Man erhält durch den allgemeinen Induktionsbeweis

$$b_r = a_r - \binom{r+1}{1} a_{r+1} + \binom{r+2}{2} a_{r+2} - \cdots + (-1)^{n-r}\binom{n}{n-r} a_n. \tag{36}$$

Indem man in (35) n ohne Grenzen wachsen lässt, erhält man den folgenden Satz:[1]

Es sei

$$\beta_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{r+\nu}{\nu} a_{r+\nu} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

und $\sum_{1}^{\infty} r^N \beta_r$ *konvergent; es sei ferner der absolute Betrag der Summe der ersten* m *Glieder von* (37) *kleiner als eine von* m *und* r *unabhängige Konstante; dann ist*

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}\nu a_\nu}{x+\nu} = \sum_{1}^{\infty} \frac{r!\, \beta_r}{(x+1)\ldots(x+r)}, \tag{38}$$

wo die Partialbruchreihe in jedem endlichen Bereich, und die Fakultätenreihe in jedem endlichen, ganz rechts von der Geraden $\Re(x) = -N$ *liegenden Bereich (nach Ausschneiden der Pole) gleichmässig konvergiert.*[2]

Diese Bedingungen sind für alle N immer erfüllt, wenn die Reihe $\sum_{0}^{\infty} a_\nu t^\nu$ einen Konvergenzradius grösser als 2 hat. In diesem Falle findet also die Beziehung (38) immer statt (Satz von Pincherle).[3]

Wir werden schliesslich $b(x)$ und somit $f(x)$ mittels *bestimmter Integrale* darstellen. Man kann auf die Potenzreihe (7) die allgemeinen Summations-

[1] Cfr. Hilfsatz von H. Bohr in »Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori», Kopenhagen 1910, S. 58—59.

[2] Über Beziehungen zwischen Partialbruchreihen und Fakultätenreihen siehe ferner N. Nielsen: Handbuch der Theorie der Gammafunktion §§ 96, 97.

[3] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 2, p. 225—6; 1888.

formeln[1] anwenden; wir werden in (5) der Bequemlichkeit halber $f(r) = O(r^{1-\delta})$ annehmen und erhalten zuerst (LINDELÖF, S. 61, Formel IV) die Formel

$$b(x) = \frac{1}{2}x\varphi(2) + \int_1^{\infty} x^\tau \varphi(\tau+1)\,d\tau + ix\int_0^{\infty} \frac{x^{it}\varphi(2+it) - x^{-it}\varphi(2-it)}{e^{2\pi t}-1}\,dt, \tag{39}$$

welche für $|x| < 1$, $|\text{Arg.}\,x| < 2\pi$ gültig ist. Hier ist $x^z = e^{zlx}$, wo lx den Hauptwert des Logarithmus bezeichnet. Das zweite der in (39) auftretenden Integrale stellt für $|x| > 0$, $|\text{Arg.}\,x| < 2\pi$ eine holomorphe Funktion dar. Das Integral

$$I(x) = \int_1^{\infty} x^\tau \varphi(\tau+1)\,d\tau \qquad (|x| < 1) \tag{40}$$

muss deshalb eine Funktion mit denselben Singularitäten (Polen) wie $b(x)$ und ausserdem einem kritischen Punkt in $x = 0$ darstellen. Das Studium der Funktion $f(x)$ ist demnach wesentlich auf eine Untersuchung des Integrals $I(x)$ reduziert.

Man erhält eine Bestätigung dieses Resultats, indem man in (40) die DIRICHLET'sche Reihe für $\varphi(\tau+1)$ einführt. Man erhält dadurch die wichtige Formel

$$\sum_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2}\frac{1}{lr - lx} = \int_0^{\infty} x^t \varphi(t+2)\,dt \tag{41}$$

oder

$$\sum_1^{\infty} \frac{f(r)}{r^2}\frac{1}{z + lr} = \int_0^{\infty} e^{-zt}\varphi(t+2)\,dt, \tag{42}$$

wodurch eine Reihe von neuen Beziehungen zwischen zahlentheoretischen Funktionen und den zugehörigen DIRICHLET'schen Reihen hergestellt ist. Die linke Seite von (42) konvergiert gleichmässig in jedem endlichen Bereich (nach Ausschneiden der Pole in gewöhnlicher Weise); die rechte Seite konvergiert gleichmässig für $\Re(z) > \eta > 0$.

Durch Anwendung einer anderen Summationsformel [LINDELÖF, S. 111, Formel (4)] erhält man die Darstellung

[1] E. LINDELÖF: Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905, chap. III (als »LINDELÖF« zitiert).

$$b(x) = -\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi i z} - 1} dz, \tag{43}$$

wo $0 < a < 1$, $1 - \delta < a$.[1] In $x^z = e^{zlx}$ bedeutet lx nicht mehr den Hauptwert, sondern hat unterhalb der positiven Achse einen anderen Wert. Das Integral in (43) konvergiert, wenn x nicht der Strecke $0 \cdots + \infty$ angehört. Die Konvergenz ist gleichmässig in jedem endlichen Bereich, welcher keinen Teil dieser Strecke enthält.

Für $f(x)$ erhält man demnach die Hauptdarstellung

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi i z} - 1} dz, \tag{44}$$

welche unter den soeben angegebenen Bedingungen gültig ist. Wenn x der verbotenen Strecke angehört, kann man jedoch $f(x)$ aus (44) durch einen Grenzübergang erhalten.

Man kann in (44) $a = 1$ setzen, wenn man zum Integral $-\frac{1}{2} x \varphi(2)$ addiert (Lindelöf, S. 116). Wir setzen zur selben Zeit $x = -\xi$ und verstehen jetzt wieder unter l den Hauptwert des Logarithmus. Führt man die Bezeichnung

$$\Xi(t, \xi) = \sum_1^\infty \frac{f(r)}{r^2} \sin\left(t \,.\, l \frac{\xi}{r}\right) \tag{45}$$

ein, so kann (44) demnach in reeller Form geschrieben werden

$$f(-\xi) = \frac{\xi \sin 2\pi\xi}{2\pi} \left[-\frac{1}{2}\varphi(2) + 2\int_0^\infty \frac{\Xi(t, \xi)}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} dt \right]. \tag{46}$$

Als sehr speziellen Fall erhält man für $f(1) = 1$, $f(r) = 0\,(r > 1)$ die leicht zu verifizierende Formel

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\xi} = 2\int_0^\infty \frac{\sin(t \,.\, l\xi)}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} dt. \tag{47}$$

[1] Wenn die Dirichlet'sche Reihe für $\varphi(s)$ für $\Re(s) > 1$ absolut konvergiert, braucht man die Bedingung $1 - \delta < a$ nicht.

Nachdem wir einige der wichtigsten Darstellungen unserer Funktionenklasse untersucht haben, wird es von Wichtigkeit sein, *die endliche Summe* $\sum\limits_1^{n-1} f(x)$, welche von besonderem Interesse für die analytische Zahlentheorie ist, zu studieren.

Wir benutzen die Bezeichnung

$$\Psi_{\nu+1}(n) = \sum_{x=1}^{n-1} x^\nu; \tag{48}$$

diese Summe lässt sich bekanntlich mittels BERNOUILLI'scher Zahlen ausdrücken; man findet

$$\Psi_{\nu+1}(n) = \frac{n^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{n^\nu}{2} + \sum_{r=1}^{\nu-1} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{B_r}{r+1} \binom{\nu}{r} n^{\nu-r}, \tag{49}$$

wo

$$B_{2m} = 0; \quad B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \ldots.$$

Wendet man dies auf (20) an, so erhält man zunächst *für jedes positive ganze n*

$$\sum_1^{n-1} f(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \Psi_{\nu+1}(n). \tag{50}$$

Man findet z. B. für die Summe $\sum\limits_1^{n-1} \tilde{\omega}(x)$, welche mit der Primzahlmenge eng verwandt ist und als »Menge der dividierten Primzahlpotenzen» bezeichnet worden ist, den exakten Ausdruck

$$\sum_1^{n-1} \tilde{\omega}(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} \Psi_{\nu+1}(n) \left(- l s_\nu + \frac{(2\pi)^2}{3!} l s_{\nu-2} - \frac{(2\pi)^4}{5!} l s_{\nu-4} + \cdots\right). \tag{51}$$

Wir werden später sehen, wie man (50) so modifizieren kann, dass man eine ganze Funktion von n bekommt.

Auch die Faktoriellenreihen für $f(x)$ und für $\frac{f(x)}{x}$ lassen sich leicht gliedweise summieren und zwar so, dass man unmittelbar ersieht, dass man hier eine ganze Funktion von n bekommt. Wir werden jedoch die schwer verwendbaren Ausdrücke nicht hier niederschreiben.

Man kann ferner die Plana-Cauchy'sche Summationsformel[1] auf $\frac{f(x)}{x}$ anwenden[2]; dies gibt

$$\sum_m^n \frac{f(\nu)}{\nu} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(m)}{m} + \frac{f(n)}{n}\right] + \int_m^n \frac{f(\tau)}{\tau}\, d\tau - 2\int_0^\infty \frac{q(m,t) - q(n,t)}{e^{2\pi t} - 1}\, dt. \tag{52}$$

wo

$$q(\tau, t) = \frac{1}{2i}\left[\frac{f(\tau + it)}{\tau + it} - \frac{f(\tau - it)}{\tau - it}\right]. \tag{53}$$

Diese Darstellung ist jedoch von unserm gegenwärtigen Gesichtspunkte aus von wenig Wert, da die rechte Seite von (52) im Allgemeinen keine analytische Funktion von n darstellt. Dieses ist zwar der Fall, wenn z. B.

$$\frac{f(z+it)}{z+it} = O\left(\frac{e^{2\pi|t|}}{|t|^{1+\varepsilon}}\right) \qquad (\varepsilon > 0) \tag{54}$$

für alle z, welche einem zweidimensionalen Bereich angehören, und für $z = m$; aber unsere Funktionenklasse $f(x)$ befriedigt im Allgemeinen nicht die Bedingung (54). Man findet nämlich aus (16) durch einfache Rechnungen gleichmässig für alle ξ, welche zwischen zwei beliebigen endlichen Grenzen liegen,

$$\frac{b(x)}{x} = \left\{\begin{matrix} O(\eta^{-\delta}) & (0 < \delta < 1) \\ O(\eta^{-1} l\eta) & (\delta = 1) \\ O(\eta^{-1}) & (\delta > 1) \end{matrix}\right\} \tag{55}$$

oder

$$f(x) = \left\{\begin{matrix} O(e^{2\pi\eta}\, \eta^{1-\delta}) & (0 < \delta < 1) \\ O(e^{2\pi\eta}\, l\eta) & (\delta = 1) \\ O(e^{2\pi\eta}) & (\delta > 1) \end{matrix}\right\}, \tag{56}$$

Relationen, die weniger genau als (54) sind.

Auch die Reihe (28) kann gliedweise durch die Plana-Cauchy'sche Formel summiert werden; man erhält dadurch neue exakte Ausdrücke für die Primzahlmenge und ähnliche Funktionen. Wir werden jedoch hierauf nicht näher eingehen.

[1] Lindelöf S. 61 Formel III.

[2] Nicht aber auf $f(x)$, welches an sich eine ziemliche Beschränkung ist.

Dagegen müssen wir eine Summationsformel besprechen, welche der Formel von LUBBOCK[1] darin ähnlich ist, dass sie nicht die Kenntnis der Differentialquotienten, sondern nur die der äquidistanten Differenzen der zu summierenden Funktion voraussetzt. Die neue Formel lässt sich leicht durch die sogenannten »symbolischen» Methoden formell ableiten,[2] lässt sich aber für unsere Funktionenklasse streng begründen. Man hat nämlich identisch

$$\int_0^n F(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 F(x+k)\,dx, \tag{57}$$

wo nur vorausgesetzt wird, dass $F(x)$ in dem Intervall $0 \ldots n$ integrabel ist.

Hat die Funktion die Form

$$F(x+k) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu F(\nu+k)}{\nu - x}$$

$$= -\frac{\sin \pi (x+k)}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^\nu F(\nu)}{\nu - (x+k)},$$

so erhält man aus (32) für alle k

$$F(x+k) = F(k) + \sum_0^\infty \left[\binom{x+r}{2r+1} \Delta^{2r+1} F(k-r) + \binom{x+r}{2r+2} \Delta^{2r+2} F(k-r-1) \right]$$

und durch Einsetzen in (57)

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^{n-1} F(k) = \int_0^n F(x)\,dx - \sum_0^\infty \Big[& P_{2r+1} \Delta^{2r} (F(n-r) - F(-r)) + \\ & + P_{2r+2} \Delta^{2r+1} (F(n-r-1) - F(-r-1)) \Big] \end{aligned} \right\}, \tag{58}$$

wo

$$P_{2r+1} = \int_0^1 \binom{x+r}{2r+1} dx, \quad P_{2r+2} = \int_0^1 \binom{x+r}{2r+2} dx = 2 P_{2r+3}. \tag{59}$$

Man findet

[1] Cambridge Philosophical Transactions 1829; siehe auch Institute of Actuaries' Text Book II S. 467 (10 Ed., London 1887).

[2] THIELE: Interpolationsrechnung § 29 (Leipzig 1909).

$$P_1 = \frac{1}{2}$$

$$P_3 = -\frac{1}{24}$$

$$P_5 = \frac{11}{1440}$$

$$P_7 = -\frac{191}{120960}$$

$$P_9 = \frac{2497}{7257600}$$

und durch den »Zweiten Mittelwertsatz«

$$|P_{2r+1}| \leq \frac{1}{(8r+4)\binom{2r}{r}}. \qquad (r > 0). \tag{60}$$

Wenn ferner

$$\lim_{r \to \infty} P_{2r+1} \Delta^{2r}[F(n-r) - F(-r)] = 0,$$

eine Voraussetzung, die z. B. immer erfüllt ist, wenn $F(\pm m) = O(1)$, so kann man schreiben

$$\left.\begin{aligned} \sum_0^{n-1} F(k) = \int_0^n F(x)dx - \frac{1}{2}[F(n) - F(0)] - \\ - \sum_0^\infty P_{2r+1} \Delta^{2r-1}[F(n-r) + F(n-r+1) - F(-r) - F(-r+1)]. \end{aligned}\right| \tag{61}$$

Wenn mann (58) und (61) mit den gewöhnlichen Summationsformeln[1] vergleicht, so erhellt, dass während diese letzteren durchgehends »halbkonvergent» sind, (58) *und* (61) *immer konvergieren, wenn* $F(x)$ *zum Typus* $u(x)$ *gehört.*

Mit anderen Worten: $\sum_0^{n-1} F(k)$ kann dann als die Summe einer *ganzen Funktion* von n, nämlich $\int_0^n F(x)dx$, und einer beständig konvergenten Reihe von Kor-

[1] Lindelöf S. 75—83.

rektionsgliedern dargestellt werden, so dass das Summationsproblem hauptsächlich auf die Berechnung der ganzen Funktion $\int\limits_0^n F(x)dx$ zurückgeführt ist.

Um den Satz auf $\frac{f(x)}{x}$ anzuwenden[1], setzt man

$$F(0) = F(-r) = F(2r + 1) = 0,$$

$$F(2r) = \frac{f(r)}{r};$$

man erhält dann, wenn in (58) $2n$ für n gesetzt wird,

$$\sum_0^{n-1} \frac{f(r)}{r} = 2\int\limits_0^n \frac{f(x)}{x}\, dx + \text{Korrektionsglieder}. \tag{62}$$

Dass die Summe durch das *zweifache* Integral approximiert wird, ist eigentümlich und stammt von den vielen Nullstellen der Funktion $f(x)$ her.

Wir fragten oben nach den analytischen Eigenschaften von (50). A. Hurwitz[2] hat die allgemeine Frage gelöst:

Die Differenzengleichung

$$F_1(z + 1) - F_1(z) = F(z), \tag{63}$$

wo $F(z)$ eine gegebene ganze Funktion ist, durch eine ganze Funktion zu integrieren.

Es sei in der Tat

$$F(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu \tag{64}$$

überall konvergent und

$$g(z) = \sum_0^\infty \frac{n!\, a_n}{(2\pi i z)^{n+1}} \tag{65}$$

für $|z| > l$ konvergent;[3] die erste ganze Zahl $> l$ werde durch $r + 1$ bezeichnet;

[1] Auf $f(x)$ selbst ist er nicht anwendbar.

[2] Acta Mathematica XX S. 285.

[3] Auch der Fall, dass (65) nirgends konvergiert, wird von Hurwitz behandelt; wir brauchen dies hier nicht.

endlich werden die Summen $\pi_{m,r}$ eingeführt, definiert durch

$$\pi_{m,r}(z) = -m! \sum_{k=+1}^{k=+r}{}' \frac{1 - e^{2k\pi i z}}{(2k\pi i)^{m+1}}, \tag{66}$$

wo k sämtliche positiven und negativen ganzen Zahlen von ± 1 bis $\pm r$ inklusive durchläuft.

Der Satz von Hurwitz lautet dann mit unserer Bezeichnung (48):

Eine ganze Funktion, welche (63) *befriedigt, ist*

$$F_1(z) = \sum_0^\infty a_m [\Psi_{m+1}(z) - \pi_{m,r}(z)], \tag{67}$$

eine Reihe, die gleichmässig in jedem endlichen Bereich konvergiert. Sämtliche ganzen Lösungen werden erhalten, indem man zu (67) *eine beliebige ganze Funktion mit der Periode* 1 *addiert.*

Für $F_1(z)$ gibt Hurwitz die Integraldarstellung an

$$F_1(z) = \int_C \frac{e^{2\pi i z\zeta} - 1}{e^{2\pi i \zeta} - 1} g(\zeta) d\zeta, \tag{68}$$

wo über einen Kreis C um den Nullpunkt mit einem Radius grösser als l aber kleiner als $r + 1$ integriert wird.

Wegen (27) kann man diesen Satz auf $F(z) = f(z)$ mit $l = 1$, $r = 1$ anwenden und hat also

$$\sum_1^{z-1} f(x) = \sum_{\nu=2}^\infty a_\nu [\Psi_{\nu+1}(z) - \pi_{\nu,1}(z)], \tag{69}$$

wo die rechte Seite eine ganze Funktion ist; für $z = n$ wird diese Formel mit (50) *identisch. Die Integraldarstellung* (68) *gilt hier, wenn C einen Radius zwischen* 1 *und* 2 *hat.*

Hierdurch kann man z. B. die Menge von dividierten Primzahlpotenzen als ganze Funktion in einer Form darstellen, in welche die Primzahlen selbst nicht eingehen.

In der übrigens sehr schönen Abhandlung von Hurwitz scheint es der Aufmerksamkeit des Verfassers entgangen zu sein, dass (69) sich durch eine kleine Modifikation der allgemeinen Summationsformel darstellen lässt. Man hat in der Tat

$$
\left.
\begin{aligned}
\sum_{1}^{z-1} f(x) = \int_0^z f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\Big[f(z) - f(0)\Big] + 2\int_0^\infty \frac{q(z,\,t) - q(0,\,t)}{e^{2\pi t}(e^{2\pi t} - 1)}\,dt \,+ \\
+ 2z\int_0^1 f(z\tau)\cos 2\pi z(1-\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
\right\} \tag{70}
$$

wo

$$
q(z,\,t) = \frac{1}{2\,i}[f(z+it) - f(z-it)]. \tag{71}
$$

Man erkennt dieses nach einigen Rechnungen, wenn man die rechten Seiten von (69) und (70) nach Potenzen von z entwickelt.

Die Formel (70) behält ihre Gültigkeit, wenn man überall $f(s)$ durch $\frac{f(s)}{s}$ ersetzt.

Man kann (70) etwas vereinfachen, wenn nicht verlangt wird, dass die $\sum\limits_{1}^{z-1} f(x)$ darstellende ganze Funktion mit der Hurwitz'schen identisch sein soll. Das letzte Glied in (70) kann nämlich folgendermassen geschrieben werden

$$
2\cos 2\pi z\int_0^z f(t)\cos 2\pi t\,dt + 2\sin 2\pi z\int_0^z f(t)\sin 2\pi t\,dt;
$$

für *ganze* z wird dies auf

$$
2\int_0^z f(t)\cos 2\pi t\,dt
$$

reduziert. Man hat also die Summationsformel

$$
\sum_{1}^{z-1} f(x) = \int_0^z (1 + 2\cos 2\pi\tau) f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}[f(z) - f(0)] + 2\int_0^\infty \frac{q(z,\,t) - q(0,\,t)}{e^{2\pi t}(e^{2\pi t} - 1)}\,dt, \tag{72}
$$

wo die rechte Seite eine ganze Funktion von z darstellt. Diese Summationsformel ist die einfachste, welche wir aufstellen können, wenn gefordert wird, dass sie eine ganze Funktion darstellen soll.

Man erhält zum Beispiel für die Menge der dividierten Primzahlpotenzen, als ganze Funktion aufgefasst,

$$\sum_{1}^{z-1} \tilde{\omega}(x) = \int_{0}^{z} (1 + 2 \cos 2\pi\tau)\,\tilde{\omega}(\tau) d\tau - \frac{1}{2}\tilde{\omega}(z) + 2\int_{0}^{\infty} \frac{q(z, t) - q(0, t)}{e^{2\pi t}(e^{2\pi t} - 1)} dt, \tag{73}$$

wo

$$q(z, t) = \frac{1}{2i}[\tilde{\omega}(z + it) - \tilde{\omega}(z - it)]. \tag{74}$$

Eine Summationsformel, welche (72) als Spezialfall enthält, ist von LINDELÖF gegeben worden;[1] dieser Verfasser hat jedoch nicht die Eigenschaften der Formel als analytische Funktion der oberen Summationsgrenze vor Augen. Jedenfalls sind durch unsere Untersuchung die Resultate von HURWITZ und LINDELÖF in einen interessanten Zusammenhang gebracht worden.

Wir werden hier nur noch die einleuchtende Summationsformel

$$\sum_{1}^{\nu} f(n) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} b(z) dz \tag{75}$$

erwähnen, von welcher wir später einen wichtigen Gebrauch machen werden. Der Integrationsweg γ ist ein passend gewählter Kreis um den Nullpunkt.

Zum Summationsproblem gehört noch die Frage über den Zusammenhang zwischen $\sum \frac{f(n)}{n}$ und $\sum f(n)$. Auch in den Fällen, wo die Summationsformel direkt auf beide Summen anwendbar ist, muss mann — wie von LANDAU hervorgehoben — gewöhnlich vorziehen, nur die eine direkt zu berechnen und den Übergang auf die andere durch partielle Summation auszuführen. Man hat hierzu, indem wir die Bezeichnungen

$$S(x) = \sum_{1}^{x} f(n), \quad S_1(x) = \sum_{1}^{x} \frac{f(n)}{n} \tag{76}$$

einführen, die Formeln

$$S(x) = x S_1(x) - \sum_{1}^{x-1} S_1(n), \tag{77}$$

$$S_1(x) = \frac{1}{x+1} S(x) + \sum_{1}^{x} \frac{S(n)}{n(n+1)}. \tag{78}$$

[1] LINDELÖF S. 63.

Die Benutzung von (78) ist einfach, wenn $S(x)$ positiv ist. Es kann jedoch bisweilen notwendig sein, auf (77) zurückzugreifen, da ja nicht alle unsere Summationsformeln $S(x)$, sondern bisweilen nur $S_1(x)$ geben. In diesem Falle kann der folgende einfache Satz nützlich sein:

Es sei $S_1(x)$ eine integrable, positive, nicht abnehmende Funktion von x. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} S(x) &= xS_1(x) - \int_1^x S_1(t)\,dt + [S_1(x) - S_1(1)]\,\varepsilon_x, \\ &\quad 0 \leq \varepsilon_x \leq 1. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Wir gehen jetzt zu der für die Zahlentheorie so wichtigen Frage über die *asymptotischen Formeln* über. Zuerst werden wir die asymptotischen Eigenschaften der Funktion $f'(-\nu)$ untersuchen; man hat nach (2)

$$\left.\begin{aligned} f'(-\nu) &= -b(-\nu) \\ &= \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\nu}\right) f(n). \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Wir müssen hier die Bemerkung einschieben, dass man in gewissen Fällen aus (80) die exakte Formel

$$\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) \tag{81}$$

gewinnt, nämlich wenn für gegebenes ν und alle n die Relation $f(\nu + n) = f(n)$ besteht, das heisst, *wenn $f(n)$ periodisch in n mit der Periode ν ist.* Dies ist zwar ein sehr spezieller, aber ziemlich wichtiger Fall, da DIRICHLET'sche Reihen mit periodischen Koeffizienten in der analytischen Zahlentheorie häufig auftreten. Der einfachste Fall ist $f(n) = 1$ für alle n; man erhält dann für $f(x)$ eine ganze Funktion, welche für ganze, positive Werte von x den Wert 1 annimmt, nämlich

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}[C + \Psi(1 - x)],$$

wo Ψ die GAUSS'sche Funktion und C die EULER'sche Konstante bedeutet. Hieraus erhält man, wie zu erwarten war,

$$f'(-\nu) = \sum_1^{\nu} \frac{1}{n}$$

$$= \Psi(1+\nu) + C.$$

Unsere Betrachtungsweise liefert aber auch eine Darstellung von $\sum_1^{x} \frac{1}{n}$ als ganze Funktion von x, nämlich [durch Differentiation der Formel für das spezielle $f(x)$]

$$f'(-x) = \sum_1^{x} \frac{1}{n}$$

$$= [C + \Psi(1+x)] \cos 2\pi x + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \Psi'(1+x)$$

oder noch einfacher die andere Funktion

$$\sum_1^{x} \frac{1}{n} = C + \Psi(1+x) + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \Psi'(1+x).$$

Es lässt sich jetzt zeigen, dass (81) in solchen Fällen, wo sie ihre exakte Gültigkeit verliert, noch immer eine asymptotische Formel liefern kann. Wir nehmen zunächst $f(n) = O(1)$ an, eine Bedingung, welche z. B. von $\tilde{\omega}(n)$, $\mu(n)$, $\lambda(n)$, $\frac{\varphi_0(n)}{n}$ erfüllt ist. Summiert man in (80) rechts von 1 bis N und untersucht das Restglied, so erhält man, indem wir die Bezeichnung

$$S(N) = \sum_1^{N} |f(n)| \tag{82}$$

einführen,

$$\sum_1^{N} \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + O\left[\frac{\nu}{N} + \frac{S(N)}{\nu}\right] \qquad (f(n) = O(1)), \tag{83}$$

welche nützlich sein kann, wenn man eine vorläufige Kenntniss der Grössenordnung von $S(N)$ besitzt. Für $N = \nu$ erhält man speziell

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + O(1) \qquad (f(n) = O(1)). \tag{84}$$

Man kann sich von der Voraussetzung $f(n) = O(1)$ frei machen, indem man schreibt

$$\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + \sum_1^\nu \frac{f(n)}{n+\nu} - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k\nu+1}^{n=k\nu+\nu} \frac{\nu}{n+\nu} \frac{f(n)}{n},$$

woraus nach einer kleinen Rechnung

$$\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n} = f'(-\nu) + O\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{S(k\nu)}{k\nu}\right). \tag{85}$$

Diese Formel ist auch genauer als (83); ist z. B. $\overline{S}(N) = O\left(\frac{N}{lN}\right)$, so erhält man für $\nu = \frac{N}{\sqrt{lN}}$ den besten Wert des Restgliedes in (83) nämlich $O\left(\frac{1}{\sqrt{lN}}\right)$, während das Restglied in (85) sich als $O\left(\frac{1}{lN}\right)$ ergibt.

Man kann übrigens eine vorläufige Idee von der Grössenordnung von $\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n}$ bekommen in dem Fall, wo $f(n) \geqq 0$ für alle n, da alsdann

$$\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n} \leqq \sum_1^\infty \frac{2\nu}{n+\nu} \frac{f(n)}{n}$$

oder

$$\sum_1^\nu \frac{f(n)}{n} \leqq 2 f'(-\nu) \qquad (f(n) \geqq 0). \tag{86}$$

Während alle diese Formeln weniger genau sind als diejenigen, welche durch Benutzung der Eigenschaften spezieller Formen von $f(x)$ abgeleitet werden können, besitzen unsere Formeln andrerseits eine grosse Allgemeinheit, welche sie zur vorläufigen Orientierung geeignet machen. Es wird hierbei die Kenntnis von $f'(-\nu)$ vorausgesetzt; wir besitzen zwei Darstellungen dieser Funktion, wo von der Zahlenfolge $f(n)$ kein Gebrauch gemacht wird. Erstens ist nach (20)

$$\left.\begin{aligned} f'(-\nu) &= \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (-\nu)^{n-1}, \\ a_n &= -\varphi(n) + \frac{(2\pi)^2}{3!}\varphi(n-2) - \frac{(2\pi)^4}{5!}\varphi(n-4) + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

wodurch $f'(-\nu)$ als ganze Funktion von ν definiert ist.

Noch wichtiger ist die aus (43) fliessende Darstellung

$$\left.\begin{aligned} f'(-\nu) &= -b(-\nu) \\ &= \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(-\nu)^z \varphi(z+1)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz, \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

wo $0 < a < 1$, $1 - \delta < a$. Hier kann ν jede komplexe oder reelle Zahl bedeuten, welche nicht der Strecke $0 \cdots -\infty$ angehört. Die durch (87) und (88) dargestellten analytischen Funktionen werden natürlich nur für ganze, positive ν als identisch vorausgesetzt.

Lindelöf[1] hat untersucht, wie Integrale von der Form (88) sich asymptotisch verhalten. Aus seinen Resultaten folgt für unsere Funktionenklasse der Satz:

Die durch das Integral (88) *dargestellte meromorphe Funktion von* ν *ist* $= \nu^a \varepsilon(\nu)$, *wo* $\varepsilon(\nu)$ *gleichmässig verschwindet, wenn* ν *sich ins Unendliche entfernt innerhalb eines Winkels, welcher nicht die negative Achse enthält.*

Speziell ist also für ganze, positive ν

$$f'(-\nu) = \nu^a \varepsilon(\nu). \tag{89}$$

Wenn die Dirichlet'sche Reihe für $\varphi(z+1)$ absolut konvergiert für $\Re(z) > 0$, kann man a *beliebig klein*, doch fest und > 0 annehmen. Durch Vergleich mit (86) erhält man den Satz:

Die Summe $\sum\limits_1^{\nu} \frac{f(n)}{n}$, wo $f(n) \geq 0$, *wächst langsamer als* ν^a.

Dieser Satz ist zwar trivial für $f(n) = O(1)$, kann aber Bedeutung erhalten, wenn $f(n)$ ohne Grenzen mit n wachsen kann.

Es folgt ferner aus Lindelöf's Resultaten der folgende Satz:

Es sei $\varphi(z+1)$ *holomorph für* $\Re(z) \geq 0$, *und es sei in diesem Bereiche* $\varphi(z+1) = O(e^{\varepsilon \cdot |z|})$, *wo* ε *beliebig klein aber* > 0 *ist; dann konvergiert* $-b(-\nu)$ *gleichmässig gegen* $\varphi(1)$, *wenn* ν *sich ins Unendliche entfernt innerhalb eines Winkels, welcher nicht die negative Achse enthält.*

Speziell konvergiert $f'(-\nu)$ in diesem Falle gegen $\varphi(1)$, wenn ν mit ganzen, positiven Werten ohne Grenzen wächst.

Der Kern der soeben abgeleiteten asymptotischen Formeln kann bequem, wenn auch etwas ungenau, so ausgedrückt werden:

[1] Lindelöf S. 113—119.

$$\textit{Der prinzipale Teil von } \sum \frac{f(n)}{n} \textit{ ist } f'(-\nu). \tag{I}$$

Desgleichen hat man nach (62) den Satz:

$$\textit{Der prinzipale Teil von } \sum \frac{f(n)}{n} \textit{ ist } 2 \int \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau. \tag{II}$$

Man kann hierzu den, wie wir sehen werden, viel genaueren Satz fügen:

$$\textit{Der prinzipale Teil von } \sum \frac{f(n)}{n} \textit{ ist } \int (1 + 2 \cos 2\pi\tau) \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \tag{III}$$

und zwar besteht hier ausserdem ein analoger Satz für $\sum f(n)$.

Um dieses einzusehen, muss man das in (72) auftretende Integral

$$J(z) = 2 \int_0^\infty \frac{q(z, t)}{e^{2\pi t}(e^{2\pi t} - 1)} dt$$

möglichst genau unter Zugrundelegung der Annahme $f(n) = O(n^{1-\delta})$ abschätzen, indem wir z positiv ganz annehmen und auf die Definition von $f(x)$ durch (2) und (3) zurückgreifen. Man erhält in dieser Weise nach einigen Rechnungen, welche wir hier unterlassen müssen, die zwei Hauptformeln

$$\sum_1^n \frac{f(\nu)}{\nu} = \int_0^n (1 + 2 \cos 2\pi\tau) \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau - J(0) + O(n^{-1} + n^{-\delta}) ln \tag{90}$$

und

$$\sum_1^n f(\nu) = \int_0^n (1 + 2 \cos 2\pi\tau) f(\tau) d\tau + O(1 + n^{1-\delta}) ln. \tag{91}$$

Als eine spezielle Anwendung von (91) können wir $f(x) = \tilde{\omega}(x)$ und $\delta = 1$ setzen; man erhält

$$\sum_1^n \tilde{\omega}(\nu) = \int_0^n (1 + 2 \cos 2\pi\tau) \tilde{\omega}(\tau) d\tau + O(ln), \tag{92}$$

so dass man, um das asymptotische Verhalten der Primzahlmenge zu erkennen, nur *die verhältnismässig einfache ganze Funktion von n*

$$\int_0^n (1 + 2 \cos 2\pi\tau)\,\tilde{\omega}(\tau)\,d\tau$$

zu studieren braucht.

Man erhält leicht die Potenzreihe der ganzen Funktion

$$\int_0^z (1 + 2 \cos 2\pi\tau)\,f(\tau)\,d\tau,$$

nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^z (1 + 2 \cos 2\pi\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \sum_3^\infty \frac{z^\nu}{\nu} \Gamma_{\nu-1}, \\ &\Gamma_\nu = -\frac{1+2}{1}\varphi(\nu) + \frac{(1+2^3)(2\pi)^2}{3!}\varphi(\nu-2) - \frac{(1+2^5)(2\pi)^4}{5!}\varphi(\nu-4) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (93)$$

Speziell findet man für die Menge der dividierten Primzahlpotenzen die asymptotische Formel

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^z \tilde{\omega}(\nu) = O(lz) + \sum_3^\infty K_\nu z^\nu, \\ &K_\nu = \frac{1}{\nu}\left[-\frac{1+2}{1} l s_{\nu-1} + \frac{(1+2^3)(2\pi)^2}{3!} l s_{\nu-3} - \frac{(1+2^5)(2\pi)^4}{5!} l s_{\nu-5} + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

Eine andere Klasse von asymptotischen Formeln wird durch Anwendung der Integraldarstellung (44) für $f(x)$ erhalten. Da diese Darstellung leider nicht für positive x gilt, muss man zuerst einen Hilfsatz ableiten. Es sei $\varepsilon_\nu > 0$ eine Grösse, welche für $\nu = \infty$ verschwindet. Man erhält aus (2) und (3)

$$f(\nu + i\varepsilon_\nu) = -\frac{\sin 2\pi i \varepsilon_\nu}{2\pi} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n - \nu - i\varepsilon_\nu} - \frac{1}{n}\right) f(n)$$

und durch Benutzung von $f(n) = O(n^{1-\delta})$ nach Rechnungen, welche unterbleiben können,

$$f(\nu + i\varepsilon_\nu) = f(\nu) + O(1 + \nu^{1-\delta})\,\varepsilon_\nu\, l\nu. \quad (95)$$

Speziell wird

$$f\left(\nu + \frac{i}{\nu}\right) = f(\nu) + O(\nu^{-1} + \nu^{-\delta})\, l\nu. \quad (96)$$

Unter Anwendung dieser Formel erhält man aus der Integraldarstellung (44) nach einer leichten Rechnung

$$f(\nu) = i \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\left(\nu + \frac{i}{\nu}\right)^{z-1} \varphi(z+1)}{e^{2\pi i z} - 1}\, dz + O(\nu^{-1} + \nu^{-\delta})\, l\nu. \tag{97}$$

Es ist hier ν positiv und ganz vorausgesetzt worden; für komplexe ν kann man im Integral, welches jedoch für solche Werte nicht die Funktion f darstellt, $\nu + \frac{i}{\nu} = s$ setzen; das Integral konvergiert dann absolut und gleichmässig für alle s innerhalb des endlichen Teils eines jeden Winkels, welcher nicht die positive Achse einschliesst. Man kann z. B. immer einen rechteckigen Bereich in der Ebene der komplexen Variablen ν bestimmen, welcher die Punkte $\nu = 1, 2, \ldots, N$ enthält und innerhalb dessen das Integral absolut und gleichmässig konvergiert.

Man kann übrigens in (97), ohne den Genauigkeitsgrad einzubüssen, die unendlichen Integrationsgrenzen z. B. durch $\frac{1}{2} - i\nu^3$ und $\frac{1}{2} + i\nu^3$ ersetzen.

Nimmt man ε von ν unabhängig an und setzt $a = \frac{1}{2}$, so erhält man aus (44) für ganze positive ν

$$f(\nu + i\varepsilon) = \frac{\sin 2\pi i \varepsilon}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it}\, \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right)}{e^{-2\pi t} + 1}\, dt,$$

also

$$f(\nu) = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it}\, \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right)}{e^{-2\pi t} + 1}\, dt, \tag{98}$$

was sich auf

$$f(\nu) = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \int\limits_{0}^{\infty} (\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it}\, \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right) dt \tag{99}$$

reduzieren lässt. Man findet hieraus die asymptotische Formel

$$f(\nu) = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \int\limits_{0}^{\nu^2} (\nu + i\varepsilon)^{\frac{1}{2}+it}\, \varphi\left(\frac{3}{2} + it\right) dt + O\left(e^{-\frac{\nu}{2}}\right). \tag{100}$$

Wichtiger als diese Formeln ist eine asymptotische Formel für $\sum_{1}^{\nu} f(n)$, welche man aus (75) unmittelbar erhält, indem man für $b(z)$ die Integraldarstellung (43) einsetzt. Man integriert dann auf dem Kreis γ von $\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon$ in positiver Richtung nach $\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon$ und sucht für das Integral den Limes dieser Integration für $\varepsilon = 0$. Das Resultat ist[1]

$$2\pi i \sum_{1}^{\nu} f(n) = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\left(\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right)^{z+1} - \left(\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon\right)^{z+1}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz. \tag{101}$$

Indem man die Bezeichnung

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{x^{z+1}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz \tag{102}$$

einführt, kann (101) folgendermassen geschrieben werden

$$\sum_{1}^{\nu} f(n) = \lim_{\varepsilon=0} \left[\Phi\left(\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right) - \Phi\left(\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon\right)\right]. \tag{103}$$

Die Funktion $\Phi(x)$ kann offenbar im Allgemeinen *keine eindeutige Funktion sein;* es ist demnach notwendig, bei der Benutzung von (101) zu berücksichtigen, in welcher Weise man von $\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon$ nach $\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon$ gelangt ist. Das Integral (102) konvergiert übrigens absolut und gleichmässig in dem endlichen Teil einer jeden Winkelöffnung, welche nicht die Strecke $0 \cdots + \infty$ enthält.

Für die Summe $\sum_{1}^{\nu} \frac{f(n)}{n}$ erhält man in entsprechender Weise die Darstellung

$$2\pi i \sum_{1}^{\nu} \frac{f(n)}{n} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\left(\nu + \frac{1}{2} - i\varepsilon\right)^{z} - \left(\nu + \frac{1}{2} + i\varepsilon\right)^{z}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z} dz. \tag{104}$$

[1] Diese Formel ist früher in leicht abgeänderter Gestalt von Mellin in anderer Weise abgeleitet worden (Acta Mathematica, vol. 28 (1904), S. 46—47).

In den folgenden Ausführungen werden wir zur Abkürzung immer

$$\nu + \frac{1}{2} = \mu \tag{105}$$

schreiben. Um aus den exakten Formeln asymptotische zu gewinnen, integrieren wir in derselben Weise in (75) von $\mu + \frac{i}{\mu}$ nach $\mu - \frac{i}{\mu}$ und erhalten

$$\sum_{1}^{\nu}{}' f(n) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-\frac{i}{\mu}}^{\mu+\frac{i}{\mu}} b(x)\,dx = \Phi\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right) - \Phi\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right), \tag{106}$$

wo das Integral auf der linken Seite für grosse ν geradlinig genommen werden kann. Nach (3) und (4) erhält man für dieses Integral in üblicher Weise die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mu-\frac{i}{\mu}}^{\mu+\frac{i}{\mu}} b(x)\,dx = O(\nu^{-1} + \nu^{-\delta})\,l\,\nu,$$

also

$$\sum_{1}^{\nu}{}' f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{z+1} - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{z+1}}{e^{2\pi i z} - 1}\,\frac{\varphi(z+1)}{z+1}\,dz + O(\mu^{-1} + \mu^{-\delta})\,l\mu \tag{107}$$

und in entsprechender Weise

$$\sum_{1}^{\nu}{}' \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{z} - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{z}}{e^{2\pi i z} - 1}\,\frac{\varphi(z+1)}{z}\,dz + O(\mu^{-2} + \mu^{-1-\delta})\,l\mu. \tag{108}$$

Setzt man in diesen Formeln $a = \frac{1}{2}$, so kann man, wie sich leicht verifizieren lässt, in den Integrationsgrenzen ∞ durch μ^3 ersetzen, ohne die Genauigkeitsgrenze zu überschreiten, und erhält in dieser Weise die grundlegenden Formeln

$$\sum_1^{\nu} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\mu^3}^{\frac{1}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{z+1} - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{z+1}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z+1} dz + O(\mu^{-1} + \mu^{-\delta}) l\mu, \qquad (109)$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{2}-i\mu^3}^{\frac{1}{2}+i\mu^3} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{z} - \left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{z}}{e^{2\pi i z} - 1} \frac{\varphi(z+1)}{z} dz + O(\mu^{-2} + \mu^{-1-\delta}) l\mu. \qquad (110)$$

Aus diesen lassen sich alle übrigen asymptotischen Formeln durch passende Deformation des Integrationsweges ableiten. Die Formeln (109) und (110) finden sich nicht bei MELLIN, der überhaupt die Konsequenzen seiner interessanten Darstellung nur unvollständig gezogen hat, indem er sich an »heuristisch» begründeten asymptotischen Resultaten genügen lässt.

Wir gehen jetzt zu den speziellen zahlentheoretischen Anwendungen über. Es wird dadurch nicht angestrebt, eine erschöpfende Behandlung zu geben; nach dem Plan dieser Arbeit trat ja die allgemeine Theorie der Funktionenklasse $f(x)$ an die Spitze; jedoch würde unser Zweck verfehlt sein, wenn sich nicht schliesslich an Beispielen nachweisen liesse, dass auch die rein zahlentheoretischen Ergebnisse unserer Methode wenigstens eben so tief gehen wie diejenigen, welche man mit früheren Methoden erreicht hat.

Nach dieser Richtung hin leistet zwar die Funktion $f'(-\nu)$ vorläufig nicht mehr, als was man auch mit rein elementaren Methoden erreichen kann. Man kann z. B. zuerst aus (89), auf $\tau(x)$ und $\frac{\sigma(x)}{x}$ angewandt, schliessen, dass die Summen

$$\sum_1^{\nu} \frac{\tau(n)}{n}, \quad \sum_1^{\nu} \frac{\sigma(n)}{n^2}$$

langsamer als eine beliebig kleine Potenz von ν wachsen. Um ein genaueres Resultat zu erreichen, bemerken wir, dass — wie aus den bekannten Eigenschaften der Zetafunktion folgt[1] —

$$\zeta^2(1+s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2C}{s} + C_0 + sR(s), \qquad (111)$$

[1] LANDAU: I S. 164 und 169.

wo C die EULER'sche Konstante bedeutet, während $s\,R(s)$ eine ganze Funktion ist mit der Eigenschaft $R(s) = O\frac{l^2|t|}{|t|}$ auf der Geraden $s = it$. Für $f(n) = \tau(n)$, $\varphi(x) = \zeta^2(x)$ erhält man aus (43)

$$-b(-z) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(-z)^s\,\zeta^2(1+s)}{e^{2\pi is}-1}\,ds$$

und durch (111)

$$-b(-z) = \int_0^z \frac{l(1+t)}{t}\,dt + 2C\,.\,l(1+z) + \frac{C_0 z}{1+z} + \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(-z)^s\,s\,R(s)}{e^{2\pi is}-1}\,ds, \tag{112}$$

wie man leicht erkennt, indem man statt der drei ersten LINDELÖF'schen Integrale die durch sie dargestellten Potenzreihen einführt. Es sei jetzt $z = \nu$ positiv ganz; man kann dann in dem letzten Integral nach den LINDELÖF'schen Resultaten $a = 0$ setzen und erhält, da ja $R(it) = O\frac{l^2|t|}{|t|}$,

$$\left.\begin{aligned} -b(-\nu) &= \int_0^\nu \frac{l(1+t)}{t}\,dt + 2C\,.\,l(1+\nu) + O(1), \\ &= \tau'(-\nu). \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Man findet demnach aus (86) die verbesserte Formel

$$\sum_1^\nu \frac{\tau(n)}{n} = O(l^2\nu) \tag{114}$$

statt

$$\sum_1^\nu \frac{\tau(n)}{n} = O(\nu^\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Um die genauere Relation (85) anzuwenden, muss man eine vorläufige Kenntnis von $\sum_1^\nu \tau(n)$ voraussetzen; man kann diese folgendermassen ganz elementar gewinnen:[1]

$$\sum_1^\nu \tau(n) = \sum_{k=1}^\nu \left[\frac{\nu}{k}\right] < \nu \sum_1^\nu \frac{1}{k} = O(\nu\,l\,\nu). \tag{115}$$

Mittels dieses Majorantwertes gibt (85) nach einfacher Rechnung

[1] BACHMANN: Die analytische Zahlentheorie S. 312.

$$\sum_1^{\nu} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2} l^2 \nu + O(l\nu), \tag{116}$$

wodurch (114) wesentlich verschärft ist. Es muss zwar zugegeben werden, dass sich auch (116) rein elementar beweisen lässt; man kann sich aber dann nicht mit dem einfachen Majorantwert (115) begnügen, sondern muss die asymptotische Formel

$$\sum_1^{\nu} \tau(n) = \nu l \nu + O(\nu),$$

welche sich bekanntlich elementar beweisen lässt, ansetzen. Durch Anwendung von (78) gelangt man dann ohne Mühe zu (116).

In analoger Weise beweist man den auch elementar beweisbaren Satz

$$\sum_1^{\nu} \frac{\sigma(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} l\nu + O(1). \tag{117}$$

Um eine andere Anwendung von $f'(-\nu)$ zu machen, setzen wir $f(n) = \mu(n)$, $\varphi(x) = \zeta^{-1}(x)$, also

$$-b(-z) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{(-z)^s \zeta^{-1}(1+s)}{e^{2\pi i s} - 1} ds. \tag{118}$$

Da $\varphi(1+s) = \zeta^{-1}(1+s)$ für $\Re(s) \geq 0$ holomorph und $= O(e^{\varepsilon|s|})$ ist, hat man nach einem oben zitierten Satz von Lindelöf, indem man sich der Bedeutung von $-b(-z)$ erinnert, $\lim\limits_{z=\infty} b(-z) = 0$, oder

$$\lim_{z=\infty} \sum_1^{\infty} \frac{z}{n+z} \frac{\mu(n)}{n} = 0, \tag{119}$$

wenn z in der geforderten Weise, z. B. mit positiven Werten wächst.

Ferner erhält man aus (84) die bekannte Formel

$$\sum_1^{\nu} \frac{\mu(n)}{n} = O(1). \tag{120}$$

Aus (119) darf man natürlich nicht schliessen, dass

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

sondern nur, dass, falls diese Reihe konvergiert, der Grenzwert Null sein muss (da dann, wie leicht zu beweisen, der Bereich der gleichmässigen Konvergenz

den Punkt $z = +\infty$ enthält); eigentliche Divergenz kann wegen (120) nicht auftreten, so dass es sich nur um Oszillation zwischen endlichen Grenzen oder Konvergenz handeln könnte.

In entsprechender Weise erhält man

$$\lim_{z\to\infty} \sum_1^{\infty} \frac{z}{n+z}\,\frac{\mu(n)\,l\,n}{n} = -1, \tag{121}$$

$$\sum_1^{\nu} \frac{\mu(n)\,l\,n}{n} = O(l\,\nu). \tag{122}$$

Obgleich wir somit aus den Eigenschaften von $f'(-\nu)$ bisher nur solche zahlentheoretischen Sätze haben herleiten können, welche man auch elementar beweisen kann, haben wir diese Funktion mit Absicht ziemlich eingehend behandelt. Es ist nämlich klar, dass *$f'(-\nu)$ als erstes Glied einer Entwickelung für $\sum_1^{\nu} \frac{f(n)}{n}$ betrachtet werden kann, und $f'(-\nu)$, als analytische Funktion von ν betrachtet, hat den Vorteil, dass sie in einem Bereich, welcher die positive Achse enthält, durch ein absolut-gleichmässig konvergierendes Integral darstellbar ist.* Es ist daher zu hoffen, dass künftige Untersuchungen über diesen Gegenstand interessante Resultate zu Tage bringen können.

Ein im Augenblicke fruchtbareres Arbeitsfeld wird von den Formeln (109) und (110) abgegeben. Als Exempel der Anwendung von (109) nehmen wir die Funktion

$$\psi(\nu) = \sum_1^{\nu} \Lambda(n), \tag{123}$$

welche für

$$f(n) = \Lambda(n),\quad \varphi(x) = -\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}$$

erhalten wird. Man findet aus (109) für $z = s - 1$

$$\psi(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-i\mu}^{\frac{3}{2}+i\mu} \frac{\left(\mu+\frac{i}{\mu}\right)^s - \left(\mu-\frac{i}{\mu}\right)^s}{e^{2\pi i s}-1}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{ds}{s} + O(\mu^{-1+\varepsilon}), \tag{124}$$

wo die Konstante $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen werden kann. Hierin ist nach Voraussetzung

$$\left.\begin{aligned} \mu + \frac{i}{\mu} &= \varrho\, e^{i\theta} \\ \mu - \frac{i}{\mu} &= \varrho\, e^{i(2\pi - \theta)} \end{aligned}\right\} \qquad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \tag{125}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{\mu^2}} = \mu + \frac{1}{2\mu^3} - \cdots &&= O(\mu), \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{3\mu^6} + \cdots &&= O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

Wir führen jetzt die Funktion

$$\sum_1^{\nu-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = \sum_1^{\nu} \frac{\Lambda(n)}{n} - \frac{\psi(\nu)}{\nu} \tag{127}$$

ein. Für $\sum\limits_1^{\nu} \frac{\Lambda(n)}{n}$ erhält man aus (110)

$$\sum_1^{\nu} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2} - i\mu^3}^{\frac{3}{2} + i\mu^3} \frac{\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{s-1} - \left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{s-1}}{e^{2\pi i s} - 1} \, \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, \frac{ds}{s-1} + O(\mu^{-2+\varepsilon}), \tag{128}$$

und man findet demnächst aus (127) und (124) nach einer kleinen Reduktion die Hauptformel

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^{\nu-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = {} & \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2} - i\mu^3}^{\frac{3}{2} + i\mu^3} \frac{\left(\mu + \frac{i}{\mu}\right)^{s-1} - \left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{s-1}}{e^{2\pi i s} - 1} \, \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, \frac{ds}{s(s-1)} \\ & - \frac{1}{(\mu^2 + i)\pi} \int\limits_{\frac{3}{2} - i\mu^3}^{\frac{3}{2} + i\mu^3} \frac{\left(\mu - \frac{i}{\mu}\right)^{s-1}}{e^{2\pi i s} - 1} \, \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, \frac{ds}{s} + O(\mu^{-1+\varepsilon}), \end{aligned}\right\} \tag{129}$$

welche wir zur Abkürzung

$$\sum_1^{\nu-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = \frac{1}{2\pi i} I_1 - \frac{1}{(\mu^2 + i)\pi} I_2 + O(\mu^{-1+\varepsilon}) \tag{130}$$

schreiben werden.

Bei der Behandlung der Integrale I_1 und I_2 kann man dem von LANDAU in einem ähnlichen Falle[1] eingeschlagenen Weg folgen, indem wir bemerken, dass die kleine Komplikation unserer Integrale im Vergleich mit den LANDAU'schen nur anscheinend ist. Man kann zuerst den Satz S. 179 (in LANDAU's Handbuch I) über die Zetafunktion anwenden, indem man $\mu^3 > 3$ annimmt und den Integrationsweg $ABCDEFA$ benutzt, wo

$$A = \frac{3}{2} - \mu^3 i,$$

$$B = \frac{3}{2} + \mu^3 i,$$

$$C = 1 - \frac{1}{c\, l^9(\mu^3)} + \mu^3 i,$$

$$D = 1 - \frac{1}{c\, l^9\, 3} + 3i,$$

$$E = 1 - \frac{1}{c\, l^9\, 3} - 3i,$$

$$F = 1 - \frac{1}{c\, l^9(\mu^3)} - \mu^3 i.$$

Die Stücke AB, BC, DE, FA sind geradlinig, während CD das Kurvenstück (indem $s = \sigma + it$)

$$\sigma = 1 - \frac{1}{c\, l^9 t}, \quad \mu^3 \geq t \geq 3$$

und EF das Kurvenstück

$$\sigma = 1 - \frac{1}{c\, l^9(-t)}, \quad -3 \geq t \geq -\mu^3$$

bezeichnen.

Das zu I_1 gehörige Residuum R_1 wird, wenn

$$\left.\begin{aligned} \mu + \frac{i}{\mu} &= p \\ \mu - \frac{i}{\mu} &= q \end{aligned}\right\} \qquad (131)$$

gesetzt wird,

[1] LANDAU: I S. 186 flg.

$$R_1 = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{2} l^2 q - \frac{1}{2} l^2 p + (l p - l q)(\pi i + C + 1)\right]$$

$$= \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right)(l \varrho - C - 1)$$

$$= l\mu - (C + 1) + O(\mu^{-1+\varepsilon}).$$

Entsprechend erhält man für I_2

$$R_2 = \frac{1}{2\pi i}(-lq + \pi i + C + 1)$$

$$= O(l\mu).$$

Der von diesen Residuen herrührende Teil der Summe $\sum\limits_1^{\nu-1} \frac{\psi(n)}{n(n+1)}$ wird

$$R_1 - \frac{2\pi i}{(\mu^2 + i)\pi} R_2 = l\mu - (C + 1) + O(\mu^{-1+\varepsilon}). \tag{132}$$

Die Teilintegrale werden alle nach einigen Rechnungen, welche wir auslassen müssen, $= O(\mu^{-1+\varepsilon})$; nur auf der Strecke ED erhält man $O\left(\mu^{-\frac{1}{c l^{\beta} 3}}\right)$ und auf den Strecken DC, FE $O\left(e^{-\sqrt[11]{l\mu}}\right)$. Zusammen genommen gibt dies, da $\mu = \nu + \frac{1}{2}$ und $\psi(\nu) = O(\nu\, l\, \nu)$,

$$\sum_1^{\nu} \frac{\psi(n)}{n(n+1)} = l\nu - (C + 1) + O\left(e^{-\sqrt[11]{l\nu}}\right) \tag{133}$$

wo noch $\sqrt[11]{l\nu}$ durch $\sqrt[10+\varkappa]{l\nu}$ $(\varkappa > 0)$ ersetzt werden kann.

Durch ganz elementare Betrachtungen schliesst man hieraus in einer mit der LANDAU'schen[1] analogen Weise

$$\frac{\psi(x)}{x} = 1 + O\left(e^{-\sqrt[11]{lx}}\right) \tag{134}$$

und hieraus für die Primzahlmenge

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{lt} + O\left(x e^{-\sqrt[11]{lx}}\right). \tag{135}$$

Man kann endlich, wenn man den schärfsten Satz über die Zetafunktion[2] anwendet und den modifizierten LANDAU'schen Integrationsweg[3] für unsere Integrale

[1] LANDAU: I §§ 52, 53.
[2] LANDAU I S. 321 und S. 326.
[3] LANDAU I S. 328 flg.

benutzt, auch durch diese den genauesten, bisher bekannten Primzahlsatz beweisen:

$$\pi(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{lt} + O(xe^{-a\sqrt{lx}}), \tag{136}$$

wo man z. B. $\alpha = \frac{1}{5}$ setzen kann. Diese Formel ist bekanntlich zuerst von DE LA VALLÉE-POUSSIN bewiesen worden.

In Bezug auf die zahlreichen Konsequenzen des Primzahlsatzes für die analytische Zahlentheorie, insbesondere für die schon berührten Summen $\sum_1^x \frac{\mu(n)}{n}$ und $\sum_1^x \frac{\mu(n)\,ln}{n}$, muss auf LANDAU's Handbuch verwiesen werden.

Hier wollen wir noch zum Schluss einen merkwürdigen exakten Satz erwähnen, welchen man durch Anwendung eines Satzes von HADAMARD[1] auf die Potenzreihe (7) für die meromorphe Funktion $b(x)$ erhält. Zur grösseren Prägnanz werden wir die Funktion $\varphi(x)$ spezializieren und gleich $l\zeta(x)$ annehmen. Man findet dann den Satz:

Es bezeichne π_ν die ν^{te} Primzahlpotenz und $\Delta_{n,r}$ die Determinante

$$\Delta_{n,r} = \begin{vmatrix} ls_{n+1} & ls_{n+2} & \dots & ls_{n+r} \\ ls_{n+2} & ls_{n+3} & \dots & ls_{n+r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ls_{n+r} & ls_{n+r+1} & \dots & ls_{n+2r-1} \end{vmatrix}. \tag{137}$$

Dann ist

$$\frac{1}{\pi_1 \pi_2 \dots \pi_r} = \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\Delta_{n,r}}. \tag{138}$$

[1] BOREL: Leçons sur les fonctions méromorphes (Paris 1903), Chap. III.

BIBLIOGRAPHIE.

Theodor Ackermann.

München 1911.

Dingler, Hugo, Ueber die Bedeutung der Burali-Fortischen Antinomie für die Wohlordnungssätze der Mengenlehre. — 22 pp. 8.

Der Widerspruch. Das Paradoxon der Menge W. Weitere Konsequenzen.

(Der Verfasser bittet hinzuzufügen, dass der Teil III der Brochüre [p. 18 bis 21 incl.] in seinen Überlegungen nicht aufrecht erhalten werden kann, da er gewisse Unstimmigkeiten enthält.)

Cambridge University Press.

Cambridge 1911—12.

Lamb, Horace, Statics, including hydrostatics and the elements of the theory of elasticity. — VI + 341 pp. 8. 10 sh. 6 d.

Theory of vectors. Statics of a particle. Plane kinematics of a rigid body. Plane statics. Graphical statics. Theory of frames. Work and energy. Analytical statics. Theory of mass-systems. Flexible chains. Laws of fluid pressure. Equilibrium of floating bodies. General conditions of equilibrium of a fluid. Equilibrium of gaseous fluids. Capillarity. Strains and stresses. Extension of bars. Flexure and torsion of bars. Stresses in cylindrical and spherical shells.

Love, A. E. H., Some problems of geodynamics, being an essay to which the Adams prize in the University of Cambridge was adjusted in 1911. — IX 180 pp. 8. 12 sh.

The distribution of land and water. The problem of the isostatic support of the continents. The probl. of the isostatic support of the mountains. General theory of earth tides. Effect of inertia on earth tides. Effect of the spheroidal figure of the

earth on earth tides. General theory of a gravitating compressible planet. Effect of compressibility on earth tides. The probl. of gravitational instability. Vibrations of a gravitating compressible planet. Theory of propagation of seismic waves.

Sylvester, James Joseph, The collected mathematical papers. Vol. 4 (1882—1897). — XXXVII + 756 pp. 8. 18 sh.

Tuckey, C. O., & Nayler, W. A., Analytical geometry. A first course. — XIV + 367 pp. 8. 5 sh.

Standard equations. Miscellan. examples. Gradient. Tangents to curves. Misc. ex. — Summary of formulae. Locus problems. Misc. ex. Polar coordinates. Parameters. Curve tracing. Misc. ex. Conics. Solid geometry. Test papers. Misc. ex.

W. Engelmann.

Leipzig 1908—11.

Dannemann, Friedrich, Aus der Werkstatt grosser Forscher. Allgemeinverständliche erläuterte Abschnitte aus den Werken hervorragender Naturforscher aller Völker und Zeiten. 3:e Aufl. des ersten Bandes des »Grundriss einer Geschichte der Naturwissenschaften». Mit 62 Abbild. — XII + 430 pp. 8. M. 6: 80 geb.

Dannemann, Friedrich, Die Naturwissenschaften in ihrer Entwickelung und in ihrem Zusammenhange. Bd. 1: Von den Anfängen bis zum Wiederaufleben der Wissenschaften. Mit 50 Abbild. VI + 373 pp. Bd. 2: Von Galilei bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts. Mit 116 Abb. 433 pp. Bd. 3: Das Emporblühen der modernen Naturwissenschaften bis zur Entdeckung des Energieprinzipes. Mit 60 Abbild. VI + 400 pp. 8. M. 10: —.

Bd. 1: In Asien u. Ägypten entstehen die Anfänge d. Wissenschaften. Die Weiterentwickl. d. Wissensch. bei den Griechen bis zum Zeitalter des Aristoteles. Aristoteles u. seine Zeit. Archimedes. Die erste Blüte der alexandrin. Schule. Die Naturwiss. bei den Römern. Die zweite Blütezeit d. alexandrin. Schule. Der Verfall d. Wissenschaften zu Beginn d. Mittelalters. Das arabische Zeitalter. Die Wissensch. unter d. Einfluss der christlich-germanischen Kultur. Der Beginn d. Wiederauflebens d. Wissensch. Die Begründ. d. heliozentrischen Weltsystems durch Koppernikus. Die ersten Ansätze zur Neubegründ. d. organ. Naturwissenschaften.

Bd. 2: Altertum u. Neuzeit. Die Erfindung d. optischen Instrumente. Galileis grundlegende Schöpfungen. Die Ausbreit. der indukt. Forschungsweise. Die Astronomie im Zeitalter Tychos u. Keplers. Die Förderung der Naturwiss. durch die Fortschritte d. Mathematik. Der Ausbau d. Physik der flüss. u. der gasförm. Körper. Die Iatrochemie u. die Begründ. d. Chemie als Wissensch. durch Boyle. Der Ausbau d. Botanik u. d. Zoologie nach dem Wiederaufleb. d. Wissenschaften. Die Begründ. d. grossen wissenschaftl. Akademien. Newton. Huygens u. d. übrig. Zeitgenossen Newtons. Unter

d. Einfluss d. chemisch-physikal. Forschung entstehen d. Grundlagen d. neueren Mineralogie u. Geologie. Das Emporblühen d. Anatomie u. d. Physiologie. Die erst. Ergebnisse d. mikroskop. Erforschung d. niederen Tiere. Die Begründ. d. Pflanzenanatomie u. d. Lehre von d. Sexualität d. Pflanzen. Der Ausbau d. Mechanik, Akustik u. Optik im 18. Jahrhundert. D. Fortschritte d. Astronomie nach d. Begründ. d. Gravitationsmechanik. Mineralogie u. Geologie im 18. Jahrhundert.

Bd. 3: Wissenschaft u. Weltgeschichte. Das 18. Jahrhund. errichtet die Fundamente d. Elektrizitätslehre. Prakt. u. theoret. Fortschritte auf d. Gebiete der Wärmelehre. Die Naturbeschreib. unt. d. Herrschaft d. künstl. Systems. Die Ausdehnung d. physikal. Methoden auf d. Gebiet d. Pflanzenphysiologie. Der Ausbau d. im 17. Jahrhund. begründeten Sexualtheorie. Fortschritte d. Zoologie im 18. Jahrhund. Die neuere Mathematik u. ihre Beziehungen zu d. Naturwissensch. Die wiss. Chemie von ihrer Begründ. durch Boyle bis zu ihrer Erneuerung durch Lavoisier. Der Eintritt d. Chemie in das Zeitalter d. quantitat. Untersuchungsweise. Die Aufstellung d. atomist. Hypothese u. ihre experimentelle Begründ. Die Entdeckung d. galvan. Elektrizität. Die Begründ. d. Elektrochemie. Die Erforschung d. elektromagnet. u. d. elektrodynam. Grunderscheinungen. Die Entdeckung d. Thermoelektrizität. Der insbes. durch Laplace u. Herschel bewirkte Aufschwung d. Astronomie. Die Grundlagen d. mech. Wärmetheorie. Fortschritte d. Optik u. Sieg d. Wellentheorie. Die Chemie u. d. Physik treten in engere Wechselbeziehungen. Fortschritte in d. Anwend. d. Mathematik auf d. Naturwiss. Die Begründ. d. physikal. Erdkunde. Die Mineralogie unt. d. Einfluss d. chem.-physikal. Forschung. Die Aufstellung eines natürl. Pflanzensystems. Die Physiologie d. Pflanzen unt. d. Einfluss d. neuer. chem.-physikal. Forschung. Die Verschmelzung d. Zoologie mit d. vergleich. Anatomie u. das natürl. System d. Tiere. Geologie u. Paläontologie unt. d. Herrschaft d. Katastrophenlehre. Fortschritte in d. Begründ. d. Ontogenie (Entwicklungslehre).

Euler, L., Vollständigere Theorie der Maschinen, die durch Reaktion des Wassers in Bewegung versetzt werden. Hrsg. von Ernst A. Brauer und M. Winkelmann. (Ostwald's Klassiker, Nr. 182.) — 94 pp. 8.

Gauthier-Villars.

Paris 1911—13.

d'Adhémar, R., Leçons sur les principes de l'analyse. T. 1: Séries. Déterminants. Intégrales. Potentiels. Équations intégrales. Équations différentielles et fonctionnelles. — VI + 324 pp. 8. Fr. 10: —.

Nombres réels. Nombres complexes. Division. Raisonnement par récurrence. Analyse combinatoire. Ensembles. Bornes. Limites. Fonctions. Analyse infinitésimale. — Séries à termes positifs. Séries alternées. Convergence absolue. Produit de deux séries. Séries multiples. Produit infini réel. — Propriétés d. fonctions continues. Dérivées et différentielles. Complément à l'étude d. séries. Passage de la formule de Taylor à la série de Taylor. Applications. — Déterminants d'ordre fini. Équations

linéaires. Déterminants d'ordre infini. — Intégrale simple. Intégrale généralisée. Applications. — Intégrale double. Changement de variables. Extensions et applications. Réduction d. intégrales doubles généralisées. — Intégrale curviligne. Formule de Riemann. Aire d'une surface courbe. Intégrale de surface. Formules de Green, Stokes, Ostrogradski. — Potentiel de simple couche. Potentiel de double couche. Étude d. potentiels à l'infini. — Équations intégrales, méthode de passage à la limite. Transcendantes de M. Fredholm. Solution d. équations intégrales. Probl. de Dirichlet. Probl. de Neumann. — Convergence uniforme et continuité. Dérivation d. séries et d. intégrales. Quelques théorèmes sur l. intégrales. Équation intégrale homogène et symétrique. Équat. de Fredholm à noyau symétrique. Théorème de Weierstrass. — Théorème sur l. équat. différent. linéaires. Polynomes de Legendre. Série hypergéométrique. Fonctions de Bessel. Théorèmes généraux. Applicat. d. théorèmes généraux. Addition d. fonct. elliptiques. Probl. de M. Picard. Équat. fonctionnelles.

Caronnet, Th., Cours de trigonométrie à l'usage des candidats au baccalauréat, à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr et à l'Institut agronomique. — 217 pp. 8. Fr. 4: 50.

Axes et vecteurs. Cycles et arcs. Angles dans un plan orienté. Unités d'arcs et d'angles. Lignes trigonométriques d'un arc. Expression de la projection d'un vecteur sur un axe. Applicat. Addition des arcs. Multiplicat. des arcs. Expressions de $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, en fonction de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Division des arcs. Transformation d'expressions en monômes. Équations et inéquations trigonom. Relations entre l. éléments d'un polygone et en particulier d'un triangle. Résolution des triangles rect., des triangles quelconques. Évaluation de lignes et d'angles remarquables dans un triangle. Quadrilatère inscriptible. Application de la trigonométrie au levé des plans. Calculs numériques. Produit géométr. de deux vecteurs. Applications.

Carvallo, E., Le calcul des probabilités et ses applications. — IX + 169 pp. 8. Fr. 6: 50.

Les principes: La loi du hasard. Le théorème de Jacques Bernoulli. La loi de Bernoulli pour la probabilité de l'écart d'une longue série. Règle de l'écart étalon. La notion du hasard et le domaine de la loi de Bernoulli. — La méthode statistique: Étude des écarts de la statistique sur l. naissances d. deux sexes. La masculinité dans l. naissances humaines. Lois de mortalité. Les écarts dans l. mesures. — Problème de l'ajustement: Ajustement à une seule inconnue. Probl. général de la moyenne. Probl. général de l'ajustement. Méthode d. moindres carrés. La méthode d. différences pour l. calculs d'ajustement. — Les limites du calcul d. probabilités et l. abus qu'on en a faits. Probabilités mal définies. Probabilités d. causes. — Table d. prob. des écarts d'après la formule dé Bernoulli.

Cauchy, Augustin, Oeuvres complètes. Publ. sous la direction scient. de l'Acad. d. Sci.... Ser. 1. T. III. — 452 pp. 4.

Mémoire sur la théorie des nombres.

DEMARTRES, G., Cours de géométrie infinitésimale. Avec une préface de P. Appell. — X + 418 pp. 8. Fr. 17: —.

Infiniment petits en géométrie. Courbure d. lignes planes. Théorie du contact. Courbes enveloppes. Application de la théorie à l'étude de courbes particulières. Cinématique du plan. Courbes gauches. Courbure et torsion. Propriétés gén. d. lignes à double courbure. Lignes tracées s. une surface. — Théorie analyt. d. courbes planes ou gauches: Courbes planes. Courbes planes particulières. Cinématique du plan. Courbes à double courbure. Propriétés gén. Théorie d. contacts. Applicat. de la théorie gén. Courbes particulières. Surfaces développables. Développées d. courbes gauches. — Théorie d. courbes tracées s. une surface: Étude de la surf. autour d'un point. Courbure normale. Courbure géodésique. Torsion géod. Systèmes conjugués. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure. Surfaces enveloppes. Géométrie cinématique. — Coordonnées curvilignes s. une surface: Courbure tangentielle en coordonnées curvilignes. Lignes géodésiques. Courb. géodés. Propriétés gén. Courbure totale. Surface rapportée à ses lignes de courbure. Application de la théorie gén. aux surfaces d. second ordre. Exercices proposés.

DIENES, PAUL, Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest. — VIII + 172 pp. 8. Fr. 5: 50.

Les recherches de M. Hadamard. L'ordre d'un point singulier. L'étude des singularités sur le cercle de convergence. La méthode de la sommation exponentielle. L'étude des singularités par la méthode de M. Mittag-Leffler. Le problème général des singularités. Un théorème de Riemann.

DUPORCQ, ERNEST, Premiers principes de géométrie moderne, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales et des candidats à la licence et à l'agrégation. 2:e éd., revue et augm. par Raoul Bricard. — VIII + 174 pp. 8. Fr. 3: 75.

Emploi des imaginaires. Premières notions sur l. transformations. — Divisions et faisceaux homographiques. Involution. Génération d. courbes et d. surfaces du sec. degré. — Transformations homographiques. Transform. corrélatives. — Théorème de Desargues-Sturm et ses conséquences. Pôles et polaires. Problèmes et théorèmes divers. Coniques harmoniquement circonscrites ou inscrites à une conique. Extension aux cônes d. sec. degré. — Pôles et plans polaires. Intersection de deux quadriques. Faisceaux et réseaux de quadriques. Quadriques harmoniquement circonscrites et inscrites. Applications d. transformations homographiques et corrélatives. Représentation plane d. quadriques. Inversion. Transform. quadratiques planes. Transform. de Lie. — Les relations doublement quadratiques et l. correspondances (2,2): Généralités. Éléments critiques. Correspondances (2,2) involutives et théorèmes de Poncelet. — Exercices.

FEHR, H., Enquête de »L'enseignement Mathématique» sur la méthode de travail des mathématiciens. Avec la collaboration de Th. Flournoy et Éd. Claparède. 2:e éd. conforme à la première, suivie d'une note sur »L'invention mathématique» par Henri Poincaré. — VIII + 137 pp. 8. Fr. 5: —

Guillemin, Auguste, Tables logarithmes à 3 quatrades et nombres correspondants avec 12—13 chiffres. Système normal. Ouvr. honoré d'une subvention de L'association franç. p. l'avancem. d. sciences. — XXIII + 128 pp. 8. Fr. 6: —.

I. *Introduction: Construction des Tables.* Convention d'écriture. Définition des $\log \alpha$ et des $\log \beta$. Calculs des N et $\log N$, ou quatrades Q. Tableau des racines carrées successives de 10. Calcul des nombres $1 + \alpha$, $\log \alpha$ et $\log \beta$. Tableau des $\log \alpha$ avec différences. — *Usage des Tables.* Remonter au nombre, étant donné son log avec 1 quatrade, 2 quatrades, 3 quatrades. Usage des quatrades négatives. Étant donné un nombre, trouver son log avec 1 quatrade, 2 quatrades, 3 quatrades. *Addendum.* Tableau de quelques log usuels avec 16 décimales pointées. — II. *Tables du système normal avec 3 quatrades.* — III. *Projets d'applications de ces Tables: Calcul de Tables pour les nombres dans leur ordre de succession.* Tables à 2 quinquades, calcul de leur N, Q et $\log \alpha$. Tableau schématique des Tables à 2 quinquades. Tables à 2 hexades. Pour le calcul de leurs N, tableau de $\log \alpha$ à 3 quatrades. *Calcul de Tables logarithmiques pour les fonctions circulaires.* Classement des arcs en *gors* (angles droits). Calcul des log par la formule $\cos x$ (radiants) $= \cos \frac{\pi}{2} y$ (gors). Schéma de *Tables complètes* donnant les log arcs, les log sin, tang et séc. Différences tabulaires, calcul des log séc, tang et sin pour un arc $o^{\gamma},5$ et ses sousmultiples décimaux, avec un minimum de 8 décimales pointées.

Hermite, Charles, Oeuvres. Publ. par Émile Picard. T. 3. — 522 pp. 8.

S. l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équat. simultanées. Intégration d. fonct. rationnelles. Intégration d. fonct. transcendantes. S. l'équat. $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$. S. l'équat. de Lamé. On an application of the theory of unicursal curves. S. l'irrationalité de la base d. logarithmes hyperbol. S. une équat. transcendante. Extr. d'une lettre s. l'express. $U \operatorname{Sin} x + V \operatorname{Cos} x + W$. Extr. d'une lettre s. quelq. approximations algébriques. S. la fonct. exponentielle. Extr. d'une lettre s. l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin^2 x}{1 - 2a\cos x + a^2}\right)^m dx.$$

Extr. d'une lettre s. la transformat. d. formes quadratiques ternaires en elles-mêmes. S. la réduction d. formes quadrat. ternaires. S. quelq. équations différent. linéaires. S. les nombres de Bernoulli. S. la fonct. de Jacob Bernoulli. S. les développements de $F(x) = Sn^a x\, Cn^b x\, Dn^c x$. S. un théorème d'Eisenstein. S. le développem. d. fonctions ellipt. suivant l. puissances croissantes de la variable. S. une formule de M. Delaunay. S. l'aire d'un segment de courbe convexe. S. un ex. de réduction d'intégrales abéliennes aux fonct. ellipt. S. une formule de Jacobi. S. quelques applications d. fonctions ellipt. Études de M. Sylvestre s. la théorie algébr. d. formes. Extr. d'une lettre de M. Hermite à M. Fuchs. Extr. d'une lettre s. la formule de

Maclaurin. S. la formule d'interpolation de Lagrange. S. les courbes planes. S. le pendule. S. la théorie d. fonct. sphériques. S. l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{a}}{1 - z}\, dz.$$

S. l'équat. de Lamé. S. un théorème de Galois relatif aux équat. solubles p. radicaux. S. le contact d. surfaces. S. les équat. différent. linéaires. S. les équat. linéaires. Extr. d'une lettre s. une extension donnée à la théorie d. fractions continues p. M. Tchebychef.

Laurent, H., Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie. (Scientia No. 20.) 2:e éd., augm. de notes par A. Buhl. — 69 pp. 8. Fr. 2: —.

Introd. Égalité et addition. Quantités. Propriété d. quantités. Généralisation. Les nombres. Multiplication et division. Les nombres fractionnaires. Les incommensurables. Logarithmes. Conclusion. — La pangéométrie: Les espaces et leurs dimensions. Déplacements euclidiens. Distances. Figures égales. Ligne droite. Angles. Trigonométrie. Perpendiculaire à plusieurs droites. Sphères. Contacts. Variétés singulières. Longueurs et angles. Pangéométrie sphérique. Trigonométrie sphérique. Pangéométrie hyperbolique. Trigonométrie hyperbol. La géométrie euclidienne. Sur la réalité de l'hyperespace. Résumé. — Notes de M. A. Buhl: Géométrie et psychologie. Les univers non euclidiens et l'infini.

Padoa, Alessandro, La logique déductive, dans sa dernière phase de développement. Avec une préface de Giuseppe Peano. — 106 pp. 8. Fr. 3: 25.

Avant-propos. Termes logiques et termes scientifiques dans le langage ordinaire. Idéographie des algébristes. Le rêve de Leibniz et sa réalisation. Réfutation d'un sophisme et d'une objection sceptique. Le vocabulaire logique réduit à une ligne. La sténographie et les langues artificielles. Logique mathématique. — *Idéographie logique.* Égalités. Appartenances. Extension ou compréhension des classes. Principe de permanence. Inclusions. Quelques classes arithmétiques. Rien et tout. Réunion et intersection de classes. Réunion disjonctive. Individu. Éléments. Agrégat. Symboles constants ou variables. Propositions catégoriques ou conditionnelles. Variables réelles ou apparentes. Implications. Ponctuation. Classes et conditions. Affirmations simultanées ou alternées. Négation. Classes contraires. Existence. Comparaison entre l'idéographie et le langage ordinaire. — *Logique déductive.* Réflexibilité, symétrie et transitivité. Propriété substitutive de l'égalité. Transformation des relations logiques. Propriétés simplificative, commutative, associative et distributive des opérations logiques. Autres propositions remarquables. Syllogistique. Relations entre les symboles [illegible] Dualité logique. Principes d'identité, de contradiction et du tiers exclu. On démontre une P sans se soucier de ce qu'elle dit. Possibilité de réduire le vocabulaire logique à trois symboles.

Salomon, C., L'étoile magique à 8 branches (24 points) et les étoiles hypermagiques impaires ($3n$ points). (Essais de magie arithmétique polygonale.) — 23 pp. 8.

Séguier, J. A. de, Éléments de la théorie des groupes de substitutions. (Théorie des groupes finis.) — X + 228 pp. 8. Fr. 10: —.

Substitutions: Généralités. Forme canonique. Polynomes représentant des substitutions dans un champ de Galois. — Groupe de substitutions. Théorèmes généraux: Transitivité. Primitivité. Groupes symétrique et alterné. Relations entre la transitivité, la classe, le degré et l'ordre. — Représentation des groupes par des groupes de substitutions: Les trois espèces de représentat. Groupe adjoint. Représentat. primitives et imprimit. Construction de groupes plusieurs fois transitifs. — Groupes de degré n et de classe $n-1$. Groupes linéaires: Définition. Classe. Composition. — Groupes de degré Kp, $p+\alpha$, $2p+\alpha$: Théorèmes généraux. Groupes de Mathieu. — Notes: I. Sur la théorie des matrices. — II. Équations algébriques. — III. Sur les groupes de degré n et de classe $n-1$. — Additions et correct.

G. J. Göschen.

Leipzig 1907—12.

Junker, Fr., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. 3:te verb. Aufl. (Sammlung Göschen 147.) — 135 pp. 8. M. 0: 80.

Einfache unbest. Integrale. Integration rationaler algebr. Differentiale. Integration irrat. Differentiale. Integration transzend. Differentiale. Bestimmte Integrale. Anwend. der Integralrechnung auf d. ebene Geometrie. Anwend. d. Integralrechn. auf d. Geometrie des Raumes. Schwerpunktsbestimmungen. Anwend. v. Doppelintegralen z. Berechn. v. Flächen- u. Raumgebilden. Gewöhnl. Differentialgleichungen erster Ordn.

Kommerell, V., und Kommerell, K., Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. 2:e Aufl. Bd. 1. (Sammlung Schubert 29.) — VI + 172 pp. 8. M. 4: 80.

Die Raumkurven: Gleichungen d. Raumkurve. Die Schraubenlinie d. Kreiszylinders. Bogenelement. Tangente u. Normalebene einer Raumkurve. Schmiegungsebene, Krümmungskreis, sphärische Abbild. d. Raumkurve. Das die Raumkurve begleitende Dreikant. Krümmungsmittelpunkt. Torsion od. zweite Krümmung. Die Formeln von Frenet. Schmiegungskugel. Anwend. auf d. Schraubenlinie des Kreiszylinders. Die natürl. Gleichungen einer Raumkurve. Herleit. einer Kurve aus gegeb. Eigenschaften. Raumkurven u. abwickelbare Flächen. Abwickelb. Flächen, erzeugt durch d. Ebenen d. begleitenden Dreikants. Evoluten u. Evolventen. Minimalgeraden, Minimalkurven. Übungsaufg. zu Abschnitt I. — Untersuchung einer Fläche in der ersten Form $F(x, y, z) = 0$; Linien- und Flächenelement, Tangentialebene, Normale.. Das Schmie-

tungen. Hauptkrümmungsradien; Die Sätze von Euler u. Meusnier. Geom. Betrachtungen u. Definitionen. Sphär. Abbild. einer Fläche. Formeln für d. Richtungskosinus d. Normalen. Allgem. Formeln f. konjug. Richtungen, Krümmungslinien und Asymptotenlinien. Allgem. Formeln f. d. Hauptkrümmungsradien. Krümmungsmass. Kreispunkte. Konfokale Flächen zweiter Ordn. Ellipt. Koordinaten. Krümmungslinien d. konfok. Flächen zweiter Ordn. Satz von Dupin. Geod. Linien. Anwend. auf Rotationsflächen. Die geodät. Linien d. Mittelpunktsflächen zweiter Ordn. Die allgem. Flächenkurve. Übungsaufg. zu Abschnitt II.

LIEBMANN, HEINRICH, Nichteuklidische Geometrie. 2:e, neubearb. Aufl. Mit 39 Fig. (Sammlg. Schubert, Bd. 69.) — VI + 222 pp. 8. M. 6: 50 geb.

Das Parallelenpostulat u. die Grundlagen d. Geometrie. Hyperbolische Elementargeometrie. Hyperbol. Trigonometrie. Längen- und Inhaltmessungen mit Anwend. von Integralen. Die analyt. Geometrie d. hyperbol. Ebene u. ihre Darstellung in d. euklid. Ebene. Sphärisch-ellipt. Geometrie. Nichteuklid. Mechanik.

MEYER, W. FRANZ, Differential- und Integralrechnung. Bd. 1: Differentialrechnung. 2:e, durchgeseh. u. erweit. Aufl. Mit 13 Fig. (Sammlg. Schubert, Bd. 10.) — XV + 418 pp. 8. M. 9: — geb.

Grenzwerte u. Differentialquotienten: Elementare Vorbetrachtungen. Differentialquotienten d. element. Funktionen. — Reihenentwicklungen: Der Mittelwertsatz mit Anwendungen. Die Taylorsche u. Maclaurinsche Reihenentwicklung mit Anwend. Konvergenz u. Divergenz unendlicher Reihen u. Produkte. Anhang: Sekante u. Tangente einer Kurve.

SCHMID, THEODOR, Darstellende Geometrie. Bd. 1. Mit 170 Fig. (Sammlg. Schubert, Bd. 65.) — VI + 279 pp. 8. M. 7: — geb.

Raumelemente, ebene Figuren u. eckige Körper. Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurve u. Raumkurve. Orthogonale Axonometrie: Neigung d. Achsensystemes. Elementaraufgaben. Drehung d. Achsensystemes. Eckige Körper. Kugel, Zylinder, Kegel.

SCHUBERT, HERMANN, Mathematische Mussestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Grosse Ausg. 3:te Aufl. Bd. 1: Zahl-Probleme. — VI + 200 pp. 8. M. 4: —.

Erraten gedachter Zahlen. Vorauswissen erhaltener Resultate. Merkwürdige Ziffernfolgen. Über sehr grosse Zahlen. Erraten der Augensumme verdeckt liegender Karten. Umfüllungs-Aufgaben. Neuner-Probe u. Neuner-Kunststück. Würfel-Kunststücke. Dominoketten. Darstell. aller Zahlen als Summen v. Potenzen von Zwei. Das Bachetsche Gewichtsprobl. Erraten v. Besitzern verschiedener Sachen. Spiel v. zwei Personen, die abwechs. addieren. Vollkommene Zahlen. Pythagoreische u. Heronische Zahlen. Erschwerte Teilung. Arithmet. Trugschlüsse. Diophantische Gleichungen. Primzahlen u.

Teilbarkeitsregeln. Zerleg. einer Zahl in d. Summe v. zwei od. mehr Quadraten. Abgekürzte Zählungen. Wurzel-Ausziehung im Kopfe. Einmal. Verwend. jeder Ziffer, um eine best. Zahl darzustellen. Bezahlungs-Möglichkeiten.

Simon, Max, Analytische Geometrie des Raumes. 3:te verb. Aufl. (Sammlung Göschen 89.) — 208 pp. 8. M. 0: 80.

Koordinaten. Das Dualitätsprinzip. Die Koordinatentransformation. Die Kugel. Die Flächen zweiten Grades u. zweiter Klasse in allgem. Behandlung. Kegel u. Zylinder. Die eigentl. zentralen Flächen zweiten Grades in allgem. Behandlung. Die zentralen Kegelflächen in spez. Behandlung. Die Paraboloide. Kubatur.

Gyldendalske Boghandel

Nordisk Forlag.

Köbenhavn & Kristiania 1912.

Eibe, Thyra, Euklids Elementer. VII—IX. X. XI—XIII. — 118, 177, 178 + X pp. 8. Kr. 2: —, 2: 75, 2: 75.

William Heinemann.

London 1907.

Hendrick, Burton J., The story of life insurance. 296 pp. 8. 3 sh. 6 d.

The surplus the basis of corruption. The pioneer. The »founder» of the equitable. The great combine gamble. The thirty years' war. The raid on the surplus. The race for bigness.

A. Hermann & Fils.

Paris 1913.

Fabry, E., Problèmes d'analyse mathématique. — 460 pp. 8. Fr. 12: —.

Énoncés: Quadratures. Intégrales multiples. Surfaces-Volumes. Fonctions analytiques. Intégrales curvilignes. Équations différentielles. Courbes planes. Courbes et surfaces. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure. Surfaces réglées. Équations aux dérivées partielles. Applications géométriques des équations aux dérivées partielles. Différentielles totales. Fonctions elliptiques. — Solutions.

Lebon, Ernest, Notice sur Henri Poincaré. Extraite des Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques, par Henri Poincaré, 2:de éd. 1913. — XLVIII pp. 8.

Ulrico Hoepli.

Milano 1913.

GHERSI, ITALO, Matematica dilettevole e curiosa. Con 693 fig. (Manuali Hoepli.) — VIII + 730 pp. 8. L. 9: 50.

Problemi-tranelli. Bizzarrie. Percorsi minimi. Probl. diversi sulla scacchiera. Alcuni probl. di posizione. — Aritmetica: Sui numeri. Sulle operazioni aritm. Aritmetica geometrica. Probl. curiosi. — Algebra: L'equazione die Fermat. Probl. sui numeri. Quadrati, poligoni e poliedri magici. — Geometria: Di alcune curve notevoli. Sulla risoluzione dei probl. di geom. con istrumenti elementari. Divisione della circonferenza in parti uguali. La trisezione dell' angolo. La quadratura del circolo. La duplicazione del cubo. Curiosità geometriche. Rompicapo geometrici. Varie. — Meccanica: Di alcuni paradossi. Curve di deformazione. — Giochi. — Domino.

Ad. Hoste.

Gand 1912.

JANS, C. DE, Les multiplicatrices de Clairaut. Contribution à la théorie d'une famille de courbes planes. — IV + 135 pp. 8.

Introduction. Classification des courbes. Propriétés communes à toutes les courbes de Clairaut. Les courbes de Clairaut algébriques. Applications d. courbes de Clairaut à la représent. du champ de force d'un point double. Etude particulière du biovale. La courbe de Playfair. L'ovoïde.

Alfred Hölder.

Wien 1912.

Berichte über den Mathematischen Unterricht in Österreich. Veranlasst durch d. Internat. Math. Unterrichtskommission, hrsg. von E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch, E. Dintzl. H. 1—12.

B. G. Teubner.

Leipzig 1912—13.

CZUBER, EMANUEL, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung Bd. 2. 3:e sorgf. durchgesch. Aufl. Mit 103 Fig. — X + 590 pp. 8. M. 12: — geb.

Das bestimmte u. das unbest. Integral. Grundformeln u. -Methoden d. Integralrechn. — Unbest. Integrale: Integration rationaler Funktionen. Integration irration. Funktionen. Integrat. transzendenter Funktionen. — Einfache u. mehrfache

best. Integrale: Wertbestimmung u. Schätzung bestimmt. Integrale. Erweiterung d. Integralbegriffs. Integrat. unendlicher Reihen. Differentiation durch Integrale definierter Funktionen. Integration durch Integrale def. Funktionen. Das Doppelintegral. Drei- u. mehrfache Integrale. Kurvenintegrale. Integrale v. Funkt. einer kompl. Variablen. Analyt. Anwendungen. — Anwend. der Integralrechn.: Quadratur ebener Kurven. Rektifikation v. Kurven. Kubatur krummflächig begrenzter Körper. Komplanation krummer Flächen. Massen-, Moment- u. Schwerpunktsbestimmungen. Die Sätze von Green. Das Potential. — Differentialgleichungen: Definition u. Haupteinteilung. Different.-gl. erster Ordn. Allgemeines. Integrationsmethoden f. Different.-gl. erst. Ordn. Singuläre Lösungen gewöhnl. Different.-gl. erst. Ordn. Geometr. Anwendungen. Systeme v. Differentialgleichungen. Differentialgleichungen höherer Ordn. Lineare Different.-gl. Integration durch Reihen. Elemente d. Variationsrechn. Partielle Different.-gl. erst. Ordn. Part. Different.-gl. zweiter Ordn.

Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrer- und Lehrerinnenbildungsanstalten in Süddeutschland. Mit einem Einführungswort von P. Treutlein. (Abhandl. üb. den math. Unterricht in Deutschland . . . hrsg. von F. Klein, Bd. V:3. — XIV + 163 pp. 8. M. 5: — geh.

E. Hensing, Grossherzogtum Hessen: Geschichtliches üb. d. Volksschule u. d. Lehrerbildungsanst. in Hessen. Die hess. Volksschule nach d. Gesetz von 1874. Der Bildungsgang d. Volksschullehrer in Hessen. Die Fortbildung d. hess. Lehrer. — H. Cramer, Grossherzogtum Baden: Überblick üb. d. Entwickel. d. bad. Volksschulwesens während der letzten 100 Jahre. D. Lehrplan. Die Ausbild. d. Volksschullehrer in Baden. — E. Geck, Königreich Württemberg: D. Volksschulen u. allgem. Fortbildungsschulen. Die Ausbild. d. Lehrer in der Mathematik. — G. Kerschensteiner u. A. Bock, Königreich Bayern: Organisation u. Statistisches. Das Volksschulwesen. Lehrer- u. Lehrerinnenbildungsanstalten (Seminare). Fortbild. der Lehrer. Ausbild. von Lehrern für die Seminare.

Eneström, Gustaf, Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. 2:e Lieferung. Jahresbericht d. deutschen Math.-Verein. Ergänzungsband IV:2. — 179 pp. 8. M. 10: —

Eulers Schriften nach den Druckjahren geordnet (Schluss). Nachträge. Anhang. Schriften Johann Albrecht Eulers. — Eulers Schriften nach der Abfassungszeit geordnet. Nachgelassene Schriften Eulers, deren Abfassungszeit noch nicht näher ermittelt worden ist. — Eulers Schriften nach dem Inhalt geordnet. — Register.

Finzel, Anton, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie. Mit 13 Fig. — 38 pp. 8. M. 1: 20.

Einleit. Geometr. Entwicklung d. Inhaltslehre für polygonale Flächen. Notwendige u. hinreichende Kriterien zur Vergleichung polygonaler Flächen. Allgem. analytische Entwicklungen zur Inhaltslehre.

Galle, A., Mathematische Instrumente. Mit 86 Abb. (Math.-physik. Schriften f. Ingenieure u. Stud., hrsg. von E. Jahnke, Bd. 15.) — VI + 187 pp. 8. M. 4: 40 geh.; 4: 80 geb.

Arithmetische Apparate. Rechenmaschinen. Die Messrolle. Stetige Rechenapparate. Differentialapparate. Kurvenmesser. Flächenmesser. Apparate zur harmonischen Analyse. Integraphen.

Gebhardt, Martin, Die Geschichte der Mathematik im mathematischen Unterrichte d. höh. Schulen Deutschlands. (Abh. üb. d. math. Unterricht in Deutschland ... hrsg. von F. Klein, Bd. III:6.) — VII + 157 pp. 8. M. 4: 80.

Das Geschichtliche im Lehrbuche früherer Zeit. D. Geschichtl. im Lehrbuche d. neueren u. neuesten Zeit. — Die Schulprogramme u. die Geschichte d. Mathematik. — Zusammenfassendes u. Allgem. üb. d. Wert geschichtl. Behandlung d. Mathematik im Unterrichte d. höh. Schulen: Vorkämpfer. Mathematik u. Kulturgeschichte. Mathematik, klassisches Altertum u. Humanismus. Allmähliches Wachsen formaler u. exakter Wahrheiten. Die Math. ist nicht abgeschlossen. Sie wächst fortdauernd in die Höhe, Tiefe u. Breite u. beseitigt in ihr bestehende Unklarheiten. Die math. Zeichensprache u. ihre Entwicklung. Würdigung d. Bedeutung grosser Mathematiker. D. Math. u. d. and. Wissenschaften an der Schule. Pflege gegenseitiger Beziehungen durch Vermittl. der Geschichte. — Methodisches: Weckung d. Interesses bei mathematisch wenig begabten Schülern. Förderung d. Lebendigkeit u. Anregung im Unterrichte. Keine Überbürdung. Masshalten bei geschichtl. Belehrungen, Auswahl u. keine Vollständigkeit. Weitere method. Ideen. u. Winke. Wo findet d. Lehrer für sich u. d. math. Unterricht geschichtl. Belehrung u. Anregung? Gedanken üb. ein »mathemat. Lesebuch«.

Grassmann, Hermann, Projektive Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. Bd. 2: Ternäres. T. 1. — IV + 410 pp. 8. Geh. M. 18: —; geb. M. 19: —

Das Dreieckskoordinatensystem nebst Anwendungen: Die Dreieckskoordinaten eines Punktes und eines Stabes. Harmonische Beziehungen am vollst. Viereck und Vierseit. — Die allgemeinen Eigenschaften der Kollineation. Die Doppelelemente der Kollineation. Das Verschwinden d. kombinat. Produktes dreier Punkt-Punkt-Kollineationen. — Die allgem. Eigenschaften der Reziprozität. Das Polarsystem. Entartende Polarsysteme. Die verschied. Formen der Gleichung einer Kurve zweiter Ordn. u. zweiter Klasse in Dreieckskoordinaten. Die Gleichungen der Kurven zweit. Ordn. u. zweit. Klasse in Cartesischen Punktkoordinaten u. Hesseschen Linienkoordinaten. — Das Kegelschnittbüschel. Die Kegelschnittschar. Die Beziehung einer Geraden zu einem Kegelschnittbüschel, eines Punktes zu einer Kegelschnittschar. Die Polkegelschnitte eines Kegelschnittbüschels, die Polarkegelschnitte einer Kegelschnittschar.

Grossmann, Ernst, Die Polhöhe der Leipziger Sternwarte. (Abhandl. d. math.-physik. Klasse d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., Bd. 32:V) 8. M. 3: 50.

Hessenberg, Gerhard, Transzendenz von e und π. Ein Beitrag zur höheren Mathematik vom elementaren Standpunkte aus. — X + 106 pp. 8. M. 3: —

Der Deus ex machina im Transzendenzbeweis. Die fortschreit. Spezialisierung. Der indirekte Beweis. — Ganze Funktionen. Absolutbeträge u. Mittelwertsätze. Die Exponentialfunktion. Exponentialformen. — Die Transzendenz von e: Verallgemeinerung d. Exponentialreihe. Analyt. Teil d. Transzendenzbeweises. Zahlentheoret. Teil d. Transzendenzbeweises. — Algebraische Vorbereitungen: Mengen u. Folgen. Die Verknüpfungssätze. Die Anordnungssätze. Allgem. Exponentialformen. Algebr. Zahlen. Exponentialformen mit algebr. Bestimmungsstücken. — D. Lindemannsche Satz u. d. Transzendenz von π: D. Spezialisierung d. Problemstellung. D. Beweis d. Lindemannschen Satzes. Varianten d. Beweises.

Hossfeld Carl, Der mathematische Unterricht an den höh. Schulen in den Thüringischen Staaten. (Abh. üb. den math. Unterricht in Deutschland . . . hrsg. von F. Klein, Bd. II:6.) — 18 pp. 8. M. 0: 80 geh.

Organisation d. höh. Schulen. Handhabung d. Unterrichts. Stellung d. Lehrer zu den Reformbestrebungen. Stellung zur Reifeprüfung. Gymnasialseminare.

Lietzmann, Walther, Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Ein Literaturbericht. (Abh. üb. d. math. Unterricht in Deutschland . . ., hrsg. von F. Klein, Bd. V:2.) — VII + 88 pp. 8. M. 2: 80 geh.

Die Methoden der Raumlehre. Heron u. Pestalozzi. Über die Bezeichnungsweise in d. Raumlehre. Der begriff d. Zweckmässigkeit in d. Raumlehre. Die Gliederung d. Lehrstoffes. Praktische Anwend. in d. Raumlehre. Einige allgem. Bemerkungen üb. Schulbücher u. Methodiken d. Raumlehre. Geometr. Begriffe im Beschäftigungsspiel d. Kleinen. Gegenstände der Formenkunde. Konstruktionen in d. Ebene. Darstellung räuml. Gebilde. Messen u. Schätzen. Graphische u. rechnerische Bestimmung von Strecken u. Winkeln. Berechn. ebener Flächen. Berechn. von Inhalt u. Oberfläche der Körper. Die Beziehung d. Raumlehre zu and. Lehrfächern.

Lindow, Martin, Differential- und Integralrechnung, mit Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik. (Aus Natur und Geisteswelt, 387.) Mit 42 Fig. — VII + 111 pp. 8. M. 1: 25 geb.

Der Funktionsbegriff u. seine technische Bedeutung. Graphische Darstellung d. Funktionen. Der Differenzenquotient u. der Differentialquotient. Differentiation einfacher Funktionen. Allgem. Differentiationsregeln. Differentiation schwierigerer Funkt. Anwend. d. Differentialrechn. auf die Untersuchung technisch wichtiger Kurven. Reihen. Anwend. der Mac-Laurinschen u. Taylorschen Reihe. Einführung in die Integralrechnung. Integration zusammengesetzter Ausdrücke. Anhang.

Mehmke, Rudolf, Vorlesungen über Punkt- und Vektorenrechnung. In zwei Bänden. Bd. 1: Punktrechnung, Teilband 1: Das Rechnen mit Punkten, Geraden und Ebenen (Erste Hälfte), Grundzüge der projektiven Geometrie, Anwendungen und Übungen. — VIII + 394 pp. 8. M. 14: — geh.

Addition u. Subtraktion von Punkten, Geraden, Ebenen. Ihre Multiplikation mit Zahlen. Lineare Abhängigkeit. Äussere Multiplikation v. Punkten, Geraden u. Ebenen. Projektive einförmige Grundgebilde u. ihre Erzeugnisse. Projekt. Grundgebilde zweiter u. dritter Stufe u. ihre Erzeugnisse. Projekt. Grundgeb. mit demselben Träger. Das Rechnen m. projekt. Umbildungen. Anwendungen u. Übungen.

Meth, Paul, Theorie der Planetenbewegung. Mit 17 Fig. (Math. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting, Bd. 8.) — 60 pp. 8. M. 0: 80.

Einleitende Sätze aus d. Mechanik. Beschreib. d. Bahnen im Sonnensystem u. Rückschluss auf die wirk. Kräfte. Das Newtonsche Gravitationsgesetz u. seine Anwendungen.

Mikami, Yoshio, The development of mathematics in China and Japan. With 67 Fig. (Abhandl. zur Geschichte d. math. Wissenschaften . . . , begr. von Moritz Cantor, 30.) — VIII + 346 pp. 8. M. 18: — geh.; M. 19: — geb.

Prefatory note, by Prof. G. B. Halsted. Introductory note. The Chinese mathematics: Earliest period of Chinese mathematics. The Chou-Pei. The Chiu-chang Suan-shu. The Sun-Tsŭ Suan-ching or the arithmetical classic of Sun-Tsŭ. The Hai-tao Suan-ching or the Sea-Island arithmetical classic. The Wu-t'sao Suan-ching and the works of Hsia-hou Yang, Chang Ch'iu-chien and Chen Luan. The circle-measurements by older Chinese mathematicians. Wang Hs'iao-t'ung and cubic equations. On the Indian influence. Ch'ên Huo. Ch'in Chiu-shao. Li Yeh. Yang Hui. Chu Shih-chieh. The Arabian influence and Kuo Shou-ching. The mathematics of the Ming Dynasty. The introduction of the European mathematics. The revival of old modes of mathematics and the state of subsequent years. Later progress of the solution of equations. The studies about the values of π by later Chinese mathematicians. Analytical studies about circle-measurement. Infinite series. — The Japanese mathematics: A general view of the Japanese math. A chronology of the Japanese math. Seki's conception of the determinant. The values of π used by the Japan. mathematicians. Japanese mathematicians' studies of the spherical volume. Japan. mathematicians' studies of finding the surface of a sphere. A formula for the square of an arc of a circle in the Kwatsuyō Sampō of 1709. Some series for π used by the Japan. mathematicians. Kurushima's circle-measurement. Kurushima's method of continued fractions for the quadratic surd. Problems in indeterminate analysis in Matsunaga's manuscript. The indeterminate equation

$$x^p - ky = a.$$

Ajima's Renjutsu Henkan. Ajima's study of circles successively inscribed forming a crown wihthin a circle. Aida's solution of the indeterm. equation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = y^2.$$

Aida's studies of the ellipse. Shiraishi's calculation of the ellipsoidal surface. Sakabe-Kawai's solution of equations. Some tables used in the *yenri* calculations, and the

equat. of infinite degree. On the wedge-sections in Hasegawa's *Kyūseki Tsūkō*. Magic squares. The catenary. Hagiwara Teisuke. Hagiwara's formula f. the area of the curve described by a sphere rolling round an anchor-ring standing on a plane. The skew surface. A short notice of the hist. studies of the Japan. mathematicians.

MÜLLER, FELIX, Gedenktagebuch für Mathematiker. 3:e Aufl. Mit. e. Bildn. d. Verfassers. IV + 121 pp. 8. M. 2: —.

OSGOOD, W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie. Erster Bd. 2:te Aufl. — (B. G. Teubners Samml. von Lehrbüchern . . . Bd. 20: 1.) XII + 766 pp. 8. M. 17: — geh.; M. 18: — geb.

Von d. Grundbegriffen d. Differential- u. Integralrechnung. Üb. reelle Funktionen mehrerer reellen Veränderlichen. Gleichmässige Konvergenz. Kurvenintegrale u mehrfach zusammenhäng. Bereiche. Mengenlehre. — Üb. das kompl. Zahlensystem. Analyt. Funktionen u. die darauf bezügl. Differentialsätze. Die element. Funktionen. Lineare Transformationen. Integralsätze u. sing. Punkte. Rationale Funktionen. Reihenentwicklungen. Mehrdeutige Funktionen u. Riemannsche Flächen. Analytische Fortsetz. — Periodische Funktionen. Reihen- u. Produktentwicklungen. Die element. Funktionen. — Grundlagen d. Theorie des logarithmischen Potentials. Konforme Abbildungen u. die Uniformisierung analytischer Funktionen.

PENNDORF, B., Rechnen und Mathematik im Unterricht der kaufmännischen Lehranstalten. (Abh. üb. d. math. Unterricht in Deutschland, ... , hrsg. von F. Klein, B. IV: 6.) — VI + 100 pp. 8. M. 3: — geh.

Bedeutung u. Zweck d. kaufmänn. Rechnens. Übersicht üb. d. kaufmänn. Unterrichtsanstalten in Deutschland. — Die kaufmännischen Lehrlingsschulen: Organisation u. Unterrichtspläne. Stellung, Stoff u. Methode d. kaufmänn. Rechnens im Lehrplane. Lehrlingsfachkurse. — Kaufmännische Vorbereitungsschulen: Handelsvorschulen. Höhere Handelskurse. Handelsrealschulen. — Handelshochschulen. — Die Ausbild. der weibl. Handelsangestellten. — Privathandelsschulen. Die Lehrbücher d. kaufmänn. Rechnens.

PERRON, OSKAR, Die Lehre von den Kettenbrüchen. (B. G. Teubners Samml. von Lehrbüchern . . . , 36.) — VIII + 520 pp. 8. M. 20: — geh.; M. 22: — geb.

Elementar-arithmetischer Teil: Definitionen u. allgem. Formeln. Regelmässige Kettenbrüche. Regelmäss. period. Kettenbrüche. Hurwitzsche Kettenbrüche. Transzendente Zahlen. Halbregelmäss. Kettenbrüche. — Analytisch funktionen-theoretischer Teil: Transformation von Kettenbrüchen. Kriterien für Konvergenz u. Divergenz. Kettenbrüche der Form

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots .$$

Die Kettenbrüche von Stieltjes. Die Padésche Tafel. Üb. Kettenbrüche, deren Teilzähler u. Nenner rationale Funktionen ihres Stellenzeigers sind.

Picard, Emile, Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft. Autorisierte deutsche Ausg. mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann. (Wissenschaft and Hypothese, 16.) — IV + 292 pp. 8. M. 6: — geb.

Einleit. Üb. die Entwicklung d. mathematischen Analysis u. üb. ihre Beziehungen zu and. Wissenschaften. Mathematik u. Astronomie. Mechanik u. Energetik. Die Physik d. Äthers. Die Physik d. Materie u. die Chemie. Mineralogie u. Geologie. Physiologie u. biolog. Chemie. Botanik u. Zoologie. Medizin u. Bakteriologie. Erläuternde Anmerkungen, von F. Lindemann.

Study, E., Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. Heft. 2. Hrsg. unter Mitwirkung von W. Blaschke. Konforme Abbildung. Einfach-zusammenhängender Bereiche. — V + 142 pp. 8. M. 5: 60 geh.

Einleit. Begriff d. einfach-zusammenhängenden Bereichs. Die drei Typen einf.-zusammenhäng. Bereiche. Hilfssätze von Koebe. Konvergenzbeweis v. Koebe. Grenzpunkte spezieller Bereiche. Randpunkte. Ein Hilfssatz (von Fatou). Verhalten d. Randpunkte bei konf. Abbildung. Versuch üb. d. Verhalten der Gesamtheit d. Grenzpunkte. Abbild. einfacher polygonaler Bereiche. Uneigentliche Polygone. Einf. polygon. Bereiche. Fortsetz. Funktionen v. beschränkter Schwankung. Stieltjessche Integrale. Ein Grenzübergang. Konvexe einf. Bereiche. Niveaukurven Greenscher Funktionen. Der Verzerrungssatz. Beispiele.

Timerding, H. E., Die Fallgesetze, ihre Geschichte und ihre Bedeutung. Mit 20 Fig. (Math. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting, Bd. 5.) — 48 pp. 8. M. 0: 80.

Galilei u. Aristoteles. Galileis erste Versuche u. Ergebnisse. Geom. Darstellung d. Fallgesetze. Geschwindigkeit u. Beschleunigung. Allgem. Gesichtspunkte. Der Ausbau u. die Bestätigung d. Fallgesetze.

Weber, Heinrich, und Wellstein, Josef, Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. 3:ter B.: Angewandte Elementar-Mathematik, 2:ter Teil: Darstellende Geometrie, graphische Statik. Wahrscheinlichkeitsrechnung, politische Arithmetik und Astronomie. Bearb. von Josef Wellstein, Heinrich Weber, Heinrich Bleicher und Julius Bauschinger. 2:te Aufl. — X + 671 pp. 8. M. 14: —.

Graphik, von Josef Wellstein: Parallelprojektion auf eine Tafel. Das Grund- und Aufrissverfahren. Orthogonale Axonometrie und Perspektive. Graphische Statik. Das ebene Fachwerk. — Wahrscheinlichkeitsrechnung, von H. Weber und J. Bauschinger: Prinzipen der Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlichkeitsrechn. Ausgleichung der Beobachtungsfehler. — Aus der politischen Arithmetik, von H. Bleicher: Allgem. Theorie der Zinsrechnung. Elemente der Versicherungsrechn. — Astronomie, von J. Bauschinger: Die astronom. Koordinaten. Die astronom. Zeitrechnung. Die Änderungen d. Koordinaten der Gestirne. Astronom. Messungen. Geograph. Ortbestimmung. Die Bahnbestimm. der Planeten u. Kometen.

WEBSTER, ARTHUR GORDON, The dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies, being lectures on mathematical physics. 2nd ed. (B. G. Teubners Sammlung v. Lehrbüchern . . . Bd. XI.) — XI + 588 pp. 8. M. 14: —.

General principles: Kinematics of a point. Laws of motion. Import. particular motions of a material point. General principles. Work and energy. Principle of least action. Generalized equations of motions. Oscillations and cyclic motions. — Dynamics of rigid bodies: Systems of vectors. Distribution of mass. Instantaneous motion. Dynamics of rotating bodies. — Theory of the potential, dynamics of deformable bodies: Newtonian potential function. Dynamics of deformable bodies. Statics of deformable bodies. Hydrodynamics. Notes.

WERNICKE, ALEX., Mathematik u. philosophische Propädeutik. (Abh. üb. d. math. Unterricht in Deutschland . . . hrsg. von F. Klein, Bd. III: 7.) — VI + 138 pp. 8. M. 4: — geh.

Geschichtl. Rückblick. Die Aufg.: Mathematik, Philos. Propädeutik, Das höh. Schulwesen Deutschlands. Schwierigkeiten d. Lösung. — Die Kantische Lösung u. ihre Mängel. Ding u. Beziehungen. Denken u. Anschauen. Die Arbeitsart d. Mathematiker. Der Gegenstand d. Mathematik. Die Begriffsbild. der Mathematik u. ihr Charakter. — Folgerungen für d. Schule: Allgem. Gesichtspunkte. Die Philosophie im Geschichtlichen der Mathematikstunde. Psychologisches u. Formal-logisches im Unterrichte der Math. Die Systematik d. math. Unterrichts. Die Anwend. Schlussbetracht. Übersicht üb. d. Literatur.

WITTING, ALEXANDER, Einführung in die Infinitesimalrechnung. Mit 2 Portr. u. 40 Fig. (Math. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann u. A. Witting, Bd. 9.) — 73 pp. 8. M. 0: 80.

ZACHARIAS, M., Einführung in die projektive Geometrie. (Math. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting, VI.) — 51 pp. 8. M. 0: 80.

Desargues. Pascal. Poncelet. Steiner. v. Staudt.

ZEUTHEN, H. G., Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. (Die Kultur der Gegenwart, hrsg. von Paul Hinneberg, T. 3: 1.) — 94 pp. 8. M. 3: —.

Entstehung u. Entwicklung der Zahlen u. des Rechnens. Entstehung der Geometrie; die Mathematik der Griechen. Verfall u. Wiederaufnahme der griechischen Mathematik.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig.

WEBER, HEINRICH, Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausg. in einem Bande. — X + 520 pp. 8. M. 14: — geh.; M. 15: — geb.

Determinanten. Zahlen u. ganze Funktionen. Symmetrische Funktionen. Wurzeln. Kub. u. biquadrat. Gleichungen. Der Sturmsche Lehrsatz. Genäherte Berechn. d. Wur-

zeln. Gruppen. Die Galoissche Theorie. Zyklische Gleichungen. Kreisteilung. Auflös. d. Kreisteilungsgleichung. Algebr. Auflös. von Gleichungen. Zahlen u. Funktionale eines algebr. Körpers. Anwend. auf Kreisteilungskörper.

John Wiley & Sons.

New York 1911.

Le Messurier, T. A., Key to Prof. W. W. Johnson's differential equations. — V + 125 pp. 8. 7 sh. 6 d.

Martin Louis A., Jr, Text-book of mechanics. Vol. 4: Applied statics. — XII + 198 pp. 8. 6 sh. 6 d.

Work and energy: Introduction. Work done by constant forces. Work done by variable forces. Work done by oblique forces. Kinetic energy. Principle of work. — Review of the principles of coplanar statics: Resultants of coplanar forces. Equilibrium of coplanar forces. — Two-dimensional structures: Abutments and the forces they transmit. Ideal frames. Frames in general. — Solid statics: Theory and applications. Concurrent forces in space. Applications to structures. — Equilibrium of perfectly flexible ropes and cables: The funicular polygon. The parabola. The catenary. — Friction. Applications to mechanics: Sliding friction. Efficiency of mechanics. Screws. Pivots. Friction of bands. Journal friction. — Further applications to mechanics: Members of machines acted on by two forces. General procedure for analysing the forces acting upon any machine. — Resistance to rolling: Introduction. Applications. Problems. Answers.

Divers.

Barbette, Edouard, Les carrés magiques du $m^{\text{ième}}$ ordre. — 250 pp. 8. Suppl.: Les piles merveilleuses. — 16 pp. 8. Fr. 7: 50. (En vente chez l'auteur, 18, rue Darchis, Liège 1912).

Les carrés symboliques: Problème général. Carrés symbol. pairement pairs. Carrés symbol. impairs. Carrés symbol. impairement pairs. — Les carrés magiques: Définition, historique. Des lignes magiques. Mise en équat.; nombre de solutions; classification. Carrés symétriques. Carrés dissymétr. Transformations générales d. carrés mag. Carrés semi-diaboliques. Carrés diabol. Carrés hypermag. Opérations sur l. carrés mag. Carrés mag. au p^e degré. Identités au p^e degré déduites d. déterm. mag. ou semi-magiques. Carrés mag. géométriques.

Fujisawa, R., Summary report on the teaching of mathematics in Japan. — XII + 238 pp. 8. (Tokio, 1912.)

Preamble. General educational system. The teaching of arithmetic in elementary schools (Soroban-Calculation). The teaching of arithm. in element. schools (continued) The teaching of mathematics in middle schools. The teaching of mathematics in higher

middle schools. The teaching of mathematics in the faculties of the Imperial Universities. Fragments. Appendix: Sketch of David Murray; A letter from M. M. Schott to R. Fujisawa.

JOHANSEN, N. P., Lærebog i Geodæsi. Til Brug ved Undervisningen i Stabsafdelingen ved Hærens Officerskole. — VII + 450 pp. 8. (Bianco Lunos Bogtryckeri, Köbenhavn, 1912.)

Geodæsiens Opgaver. Hist. Oversigt. Mathemat. Formler. Interpolation. — Omdrejningsellipsoidens Geometri: Omdrejningsellipsoiden. Normalsnittet. Den geodætiske Linie. Differentialformler. Den geod. Trekant. Polære Koordinater. Retvinklede Koordinater. Trekantpunkternes geograf. Koordinater. Afstande og Azimuther beregnede af Bredder og Længder. Differentialformler. — Operationerne i Marken. Trekantnættets Beregning: Trekantpktr. Basismaaling. Vinkelmaaling. Horizontudjævning. Nætudjævning. Nøjagtighedsbestemmelser. Nættet af 3. Ord. Detailtriangulation. Polygonmaaling. — Højdemaalinger: Højdemaaling ved Barometer. Trigonom. Højdemaaling. Geom. Nivellement. — Kaartprojektioner: Den konforme koniske Projektion. D. modificerede Flamsteed'ske Projektion. Mercators projektion.

SCHALLER, GEORG J., Beweis der Richtigkeit des »grossen Fermatschen Satzes», nebst Anhang. — 23 pp. 8. M. 0:75. (Selbstverlag des Verfassers, Grabow in Mecklb., Lindenstr. 8, 1912.)

Das Generalregister der 35 ersten Bände (1882—1912) der Acta Mathematica, besorgt von MARCEL RIESZ, ist erschienen. Dasselbe enthält das Inhaltsverzeichnis dieser Bände, die biographischen Data der 203 Mitarbeiter und deren Bildnisse in Autotypie auf Kunstdruckpapier. Der 180 Seiten starke Band in 4° ist bei Herren MAYER & MÜLLER, Prinz Louis Ferdinandstrasse 2, Berlin, und A. HERMANN & FILS, 6 rue de la Sorbonne, Paris, sowie durch Vermittlung jeder Buchhandlung zum Preise von 20 M. (= 25 Frcs.) käuflich.

La Table Générale des 35 premiers volumes (1882—1912) des Acta Mathematica, rédigée par M. MARCEL RIESZ, vient de paraître. Elle renferme la table des matières de ces volumes, les données biographiques des 203 auteurs et leurs portraits en simili-gravure sur papier couché. Le beau volume de 180 pages in 4° est en vente chez A. HERMANN & FILS, 6 rue de la Sorbonne, Paris, et chez MAYER & MÜLLER, Prinz Louis-Ferdinandstr. 2, Berlin, au prix de 25 francs (= 20 Mark).

113.

SUR QUELQUES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES.

PAR

S. WIGERT

À STOCKHOLM.

Introduction.

Le présent travail contient les résultats d'une étude sur certaines fonctions ayant un rapport intime avec la *somme des diviseurs d'un entier.* Je commence par établir pour cette fonction arithmétique un théorème sur le vrai ordre de grandeur de ses valeurs maximales, théorème analogue à celui que j'ai démontré autrefois sur le *nombre* des diviseurs.[1] Dans la seconde partie je m'occupe de la fonction sommatoire $f(x) = \sum_{n \leq x} \sigma(n)$, en désignant par $n\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Dans les deux paragraphes suivants j'ai examiné les fonctions $\sum_{n<x} \sigma(n) \log \frac{x}{n} = \int_1^x \frac{f(x)\,dx}{x}$ et $\frac{1}{\underline{|k}} \sum_{n<x} \sigma(n)(x-n)^k$ dont la seconde s'obtient de $f(x)$ par intégration itérée entre les limites 1 et x. J'ai trouvé pour la dernière fonction une représentation analytique assez remarquable, dont l'exposé sera fait dans le quatrième paragraphe. Enfin l'étude de certaines séries figurant dans la dite formule de représentation m'ont conduit à une généralisation du théorème de STIELTJES sur la *multiplication Dirichletienne* de deux séries infinies.[2] La cinquième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à la démonstration de ce théorème généralisé et à ses applications aux recherches précédentes.

[1] Arkiv för matematik, astronomi och fysik, Tome 3. Voir aussi le grand traite de M. E. LANDAU: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, I § 60, où l'on retrouve cette démonstration un peu simplifiée.

[2] LANDAU: Handbuch, II §§ 184, 185.

§ 1. La fonction $\sigma(n)$ et ses valeurs maximales.

Soit n un entier positif et désignons par $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs, divisée par le nombre n lui-même. D'après ce que nous allons montrer dans le second paragraphe, la valeur moyenne de $\sigma(n)$ est égale à $\frac{\pi^2}{6}$. Cependant les valeurs maximales de la fonction $\sigma(n)$ sont d'un ordre de grandeur plus élevé, et je commencerai par démontrer le théorème suivant:

En désignant par γ la constante d'Euler (*ou de* Mascheroni) *on a:*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma(n)}{\log\log n} = e^{\gamma}. \tag{1}$$

Écrivons en effet

$$n = p_{a_1}^{\lambda_1} \dots p_{a_r}^{\lambda_r}$$

d'où il suit

$$\sigma(n) = \frac{1}{n} \prod_{\nu=1}^{r} \frac{p_{a_\nu}^{\lambda_\nu+1} - 1}{p_{a_\nu} - 1} = \prod_{\nu=1}^{r} \frac{1 - \frac{1}{p_{a_\nu}^{\lambda_\nu+1}}}{1 - \frac{1}{p_{a_\nu}}}$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\sigma(n)} > \prod_{\nu=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_{a_\nu}}\right).$$

Or, après avoir fixé un nombre $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un n' tel que

$$\prod_{\nu=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_{a_\nu}}\right) > (1 - \varepsilon') \frac{e^{-\gamma}}{\log\log n}$$

pour tout $n > n'$.[1] Ayant choisi un $\varepsilon > 0$ tel petit que ce soit, il suffit donc de faire $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, et nous aurons pour toutes les valeurs de $n > n'$

$$\sigma(n) < (1 + \varepsilon) e^{\gamma} \log\log n.$$

[1] Cf. Landau: Handbuch, I § 59.

Maintenant il faut montrer aussi que l'inégalité

$$\sigma(n) > (1 - \varepsilon) e^{\gamma} \log \log n$$

a lieu pour certaines valeurs de n au delà de toute limite finie. Soit donc x un nombre positif quelconque, k un entier positif, et posons

$$n = \prod_{p \leq x}' p^k$$

où l'indice p doit parcourir tous les nombres premiers $\leq x$.

Nous avons ainsi

$$\frac{1}{k} \log n = \sum_{p \leq x} \log p$$

et, comme il est bien connu

$$\lim_{x = \infty} \frac{1}{x} \sum_{p \leq x} \log p = 1$$

de sorte que nous aurons certainement pour x assez grand

$$\frac{x}{2} < \frac{1}{k} \log n < 2x$$

ou bien

$$\log x + \log \frac{k}{2} < \log \log n < \log x + \log 2k.$$

Or, on a ici

$$\sigma(n) = \prod_{p \leq x} \frac{1 - \frac{1}{p^{k+1}}}{1 - \frac{1}{p}}$$

et de plus[1]

$$\begin{cases} \lim\limits_{x = \infty} \log x \cdot \prod\limits_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = e^{-\gamma} \\ \lim\limits_{x = \infty} \prod\limits_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^{k+1}}\right) = \frac{1}{\zeta(k+1)}. \end{cases}$$

[1] Landau: Handbuch, I, § 56.

En partant d'un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on choisit d'abord $\varepsilon' < \varepsilon$, d'où $\frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon} > 1$, puis on prendra k assez grand pour que: $1 < \zeta(k+1) < \frac{1-\varepsilon'}{1-\varepsilon}$, et par suite: $1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}\zeta(k+1) > 0$. Ayant fixé le nombre k de cette manière, on peut ensuite faire x tellement grand que

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{1}{2} < \frac{1}{x}\sum_{p<x}\log p < 2\,; \quad \frac{1}{\log x}\prod_{p<x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}} > \left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)e^{\gamma} \\ & \frac{\log 2k}{\log\log n} < \frac{\log 2k}{\log x + \log\frac{k}{2}} < 1 - \frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon'}\zeta(k+1)\,; \quad \prod_{p<x}\left(1-\frac{1}{p^{k+1}}\right) > \left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)\frac{1}{\zeta(k+1)}. \end{aligned}\right.$$

Il en résulte

$$\sigma(n) > \left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2 \frac{e^{\gamma}}{\zeta(k+1)}\log x > (1-\varepsilon')\frac{e^{\gamma}}{\zeta(k+1)}(\log\log n - \log 2k)$$

et enfin

$$\sigma(n) > (1-\varepsilon)\,e^{\gamma}\log\log n\,.$$

C. q. f. d.

§ 2. Sur la fonction sommatoire $\sum\limits_{n \leq x}\sigma(n)$.

En partant de l'égalité connue

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s)\,\zeta(s+1) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{s+1}}$$

valable pour $R(s) > 1$, on arrivera de la manière suivante à une nouvelle expression pour la fonction $\sum\limits_{n \leq x}\sigma(n)$. Dans chaque membre de l'équation on ne retient que les termes où l'exposant s appartient à un nombre $\leq x$. Pour une valeur arbitraire de s on aura ainsi une équation identique entre deux séries finies où l'on peut faire $s = 0$. On en tirera

$$\sum_{n \leq x}\sigma(n) = \sum_{n \leq x}\frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n \leq x}\frac{1}{n}\left\{\frac{x}{n} - \varrho\left(\frac{x}{n}\right)\right\}.$$

en désignant par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x et par $\varrho(x)$ la différence $x - [x]$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, il s'ensuit

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6} x - x \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \varrho\left(\frac{x}{n}\right)$$

et, en mettant

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6} x - \psi(x) \tag{2}$$

nous aurons

$$\psi(x) = x \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \varrho\left(\frac{x}{n}\right) \tag{3}$$

fonction qui sera positive pour toutes les valeurs de x. Cherchons-en une première approximation. A cet effet nous allons rappeler quelques relations connues, valables pour $x \geq 1$, à savoir

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{[x]+1} = \int_{[x]+1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \sum_{n > x} \frac{1}{n^2} < \int_{[x]}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{[x]} < \frac{1}{x-1} \\ 0 \leq \varrho\left(\frac{x}{n}\right) \leq 1 - \frac{1}{n} \\ \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < \log [x] + \gamma + \frac{1}{2[x]} < \log x + \gamma + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{\varrho(x)}{x} \leq \log x + \gamma + \frac{1}{2(x-1)}. \end{array}\right.$$

Il en résulte

$$\frac{x}{x+1} < \psi(x) < \log x + 1 + \gamma - \frac{\pi^2}{6} + \frac{5}{2(x-1)} = \log x - 0{,}00677 + \frac{5}{2(x-1)}. \tag{4}$$

Par ces inégalités, valables pour $x > 1$, nous ne savons pourtant pas encore si la fonction $\psi(x)$ atteint réellement des valeurs d'ordre $\log x$.

Pour arriver à des formules plus précises nous allons nous servir de l'identité suivante[1]

[1] Cf. Gram: Undersogelser angaaende mængden av primtal under en given grænse Kjobenhavn 1884. Pag. 217. La dite identité n'y est démontrée que pour les valeurs entières de x, mais elle subsiste généralement. On a en effet: $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$ et aussi: $0 \leq [x] - [\sqrt{x}]^2 < 2[\sqrt{x}]$, d'où l'on tire: $[\sqrt{x}] = [\sqrt{[x]}]$.

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{n\leq x} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq \sqrt{x}} f(n)\left[\frac{x}{n}\right] + \sum_{n\leq\sqrt{x}} F\left(\frac{x}{n}\right) - [\sqrt{x}]\,F(\sqrt{x}) \\ &\qquad F(x) = \sum_{n\leq x} f(n). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

En prenant $f(n) = \frac{1}{n}$ nous pourrons écrire avec la notation commode de M. Landau,[1]

$$F(x) = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

et l'équation (5) prendra la forme

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{1}{n}\left[\frac{x}{n}\right] + \sum_{n\leq\sqrt{x}} \left\{\log\frac{x}{n} + \gamma + O\left(\frac{n}{x}\right)\right\} - [\sqrt{x}]\left\{\frac{1}{2}\log x + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\}$$

d'où, en posant pour abréger: $[\sqrt{x}] = q$

$$\frac{\pi^2}{6}x - \psi(x) = \frac{\pi^2}{6}x - x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2} - \sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2}q\log x - \log \lfloor q + O(1).$$

Or, on sait que

$$\log \lfloor q = \frac{1}{2}\log q + q\log q - q + O(1) = \frac{1}{4}\log x + \frac{1}{2}q\log x - \sqrt{x} + O(1)$$

ce qui nous donne

$$\psi(x) = x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2} - \sqrt{x} + \frac{1}{4}\log x + \sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) + O(1).$$

Puisque

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1} < x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2} < \frac{x}{\sqrt{x}-1}$$

on a aussi

$$x\sum_{n>\sqrt{x}}\frac{1}{n^2} - \sqrt{x} = O(1)$$

[1] Voir Handbuch, I § 5.

d'où finalement

$$\psi(x) = \sum_{n<\sqrt{x}} \frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{4}\log x + O(1). \tag{6}$$

Quant à la somme figurant dans le membre droit de l'équation (6), nous avons

$$0 < \sum_{n<\sqrt{x}} \frac{1}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) < \sum_{n<\sqrt{x}} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}\log x + O(1)$$

ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant: *Ayant choisi un $\varepsilon > 0$ tel petit que ce soit, on peut trouver un x' assez grand pour que l'on ait*

$$\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\log x < \psi(x) < \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\right)\log x \tag{7}$$

dès que $x > x'$.

Si maintenant on calcule l'intégrale $\int_1^x \frac{1}{t}\left[\frac{x}{t}\right]dt$, on en trouve sans difficulté la valeur $[x]\log x - \log \lfloor [x]$ et par suite

$$\int_1^x \frac{1}{t}\varrho\left(\frac{x}{t}\right)dt = x - 1 - \int_1^x \frac{1}{t}\left[\frac{x}{t}\right]dt = \frac{1}{2}\log x + \frac{1}{2}\log 2\pi - 1 + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il est donc à présumer que l'allure de la fonction $\psi(x)$ présentera en général des oscillations autour de la valeur moyenne $\frac{1}{2}\log x$, et il serait très important, si l'on savait déterminer la grandeur réelle de ces oscillations. On peut montrer, en effet, qu'il existe des valeurs de x au delà de toute limite, pour lesquelles $\psi(x) > \frac{1}{2}\log x$, mais il m'a été impossible de décider, si la fonction $\psi(x)$ peut s'éloigner de sa valeur moyenne autant que veut la double inégalité (7). Cependant, pour l'ordre de grandeur de la différence $\psi(x) - \frac{1}{2}\log x$ nous pouvons assigner une limite inférieure à l'aide du résultat trouvé dans le premier paragraphe. Faisons d'abord usage du théorème suivant, dû à M. PHRAGMÉN:[1]

[1] Sur le logarithme intégral et la fonction $f(x)$ de RIEMANN. Öfversikt af K. Vetenskaps-akademiens förhandlingar, Stockholm 1891.

»Soit $\varphi(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x et a une constante positive > 1, et supposons que l'intégrale $\int_a^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{s+1}}$ soit convergente pour $R(s) > 1$ et qu'elle soit égale, dans le voisinage de $s = 1$, à une série procédant suivant les puissances positives de $s - 1$ et convergente dans un cercle dont le rayon est > 1; si x_0 et δ sont deux quantités positives choisies à volonté, aucune des deux inégalités

$$\varphi(x) > \delta, \quad \varphi(x) < -\delta$$

ne pourra subsister pour toutes les valeurs de $x > x_0$. Si l'on sait de plus que $\varphi(x)$ a une suite infinie de points de discontinuité x_ν, tels que, m_ν désignant une valeur positive plus petite que toutes les valeurs de l'expression $\varphi(x_\nu + h) - \varphi(x_\nu - 0)$ pour $0 < h < h_\nu$, ces quantités m_ν et h_ν peuvent être choisies de sorte que

$$x_\nu + h_\nu \leq x_{\nu+1}$$

et que la série $\sum \frac{m_\nu h_\nu}{x_\nu + h_\nu}$ ait une valeur infinie; on pourra préciser encore et dire que $\varphi(x)$ changera de signe une infinité de fois au-dessus de toute limite finie.»

Aux hypothèses faites dans l'énoncé du théorème précédent nous pouvons satisfaire en posant

$$\varphi(x) = \sum_{n \leq x} \sigma(n) - \frac{\pi^2}{6} x + \frac{1}{2} \log x + a = \frac{1}{2} \log x - \psi(x) + a$$

où $a = \frac{1}{2}(\gamma + \log 2\pi) > \frac{1}{2}$. Nous avons en effet

$$\int_1^\infty \Bigl(\sum_{n \leq x} \sigma(n)\Bigr) \frac{dx}{x^{s+1}} = \frac{\zeta(s)\zeta(s+1)}{s} \qquad (R(s) > 1)$$

et puisque

$$\left|\begin{aligned} &\zeta(s+1) = \frac{1}{s} + \gamma + s\mathfrak{P}(s) \\ &\zeta(0) = -\frac{1}{2}; \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi \end{aligned}\right.$$

il vient

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{s+1}} = \frac{\zeta(s)\zeta(s+\mathrm{I})}{s} - \frac{\pi^2}{6}\frac{\mathrm{I}}{s-\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{I}}{2}\frac{\mathrm{I}}{s^2} + \frac{a}{s}$$

c'est-à-dire une fonction *entière* de s. De plus, les points de discontinuité de $\varphi(x)$ sont les entiers positifs, n, et l'on trouve

$$\varphi(n+h) - \varphi(n-\mathrm{o}) = \sigma(n) - \frac{\pi^2}{6}h + \frac{\mathrm{I}}{2}\log\left(\mathrm{I} + \frac{h}{n}\right) > \mathrm{I} - \frac{\pi^2}{6}h$$

ce qui fait voir que, en prenant

$$x_n = n,\ h_n = \frac{\mathrm{I}}{2},\ m_n = \mathrm{I} - \frac{\pi^2}{\mathrm{I}2} > \mathrm{o}$$

la série

$$\sum \frac{m_n h_n}{x_n + h_n} = \left(\mathrm{I} - \frac{\pi^2}{\mathrm{I}2}\right)\sum \frac{\mathrm{I}}{2n+\mathrm{I}}$$

devient en effet divergente. Nous avons ainsi le droit de conclure que la fonction $\frac{\mathrm{I}}{2}\log x - \psi(x) + a$ sera négative pour certaines valeurs de x au delà de toute limite, ou bien: *La fonction* $\psi(x)$ *surpassera une infinité de fois la valeur* $\frac{\mathrm{I}}{2}\log x + a$.

Quant à l'ordre de grandeur de la différence $\psi(x) - \frac{\mathrm{I}}{2}\log x$, nous pouvons du moins affirmer qu'il ne peut être inférieur à $\log\log x$. Supposons en effet que le module de la dite différence reste inférieur à $\frac{\mathrm{I}}{2} e^{C}(\mathrm{I} - \varepsilon)\log\log x$, dès que $x > x'$, et considérons la fonction $\sum\limits_{n<x} n\sigma(n)$. Par la méthode employée plus haut on trouvera sans peine

$$\sum_{n<x} n\sigma(n) = \frac{\mathrm{I}}{2}\sum_{n<x}\left\{\left[\frac{x}{n}\right]^2 + \left[\frac{x}{n}\right]\right\}$$

d'où, en observant que

$$\left[\frac{x}{n}\right]^2 = \frac{x^2}{n^2} - 2\frac{x}{n}\varrho\left(\frac{x}{n}\right) + \varrho^2\left(\frac{x}{n}\right)$$

et en utilisant la relation connue[1]

$$\sum_{n<x}\left[\frac{x}{n}\right] = x(\log x + 2\gamma - 1) + o(x)$$

on déduit

$$\sum_{n<x} n\,\sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + x\left\{\frac{1}{2}\log x - \psi(x)\right\} + O(x). \tag{8}$$

Avec la notation $\Delta f = f(n) - f(n-1)$ nous aurons ainsi

$$n\,\sigma(n) = \Delta\left\{\frac{1}{2}n\log n - n\,\psi(n)\right\} + O(n)$$

et par suite

$$n\,\sigma(n) < e^{\gamma}(1-\varepsilon')\,n\log\log n \qquad (\varepsilon' < \varepsilon)$$

pour $n > x' + 1$, ce qui est en contradiction avec le résultat du premier paragraphe.

L'inégalité

$$\left|\psi(x) - \frac{1}{2}\log x\right| > \frac{1}{2}e^{\gamma}(1-\varepsilon)\log\log x \tag{9}$$

a donc lieu pour des valeurs de x au delà de toute limite finie, ε étant choisi tel petit que l'on veut.[2]

En combinant les équations (2) et (8) on obtient

$$\sum_{n<x}\sigma(n)(x-n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 - \frac{1}{2}x\log x + O(x) \tag{10}$$

où la fonction figurant dans le membre gauche n'est autre chose que

$$\int_0^x\left(\sum_{n<x}\sigma(n)\right)dx.$$

[1] Voir p. ex. Landau: Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Göttingen 1912.

[2] Il y a lieu de remarquer que le seul résultat connu jusqu'ici sur $\psi(x)$ était: $\psi(x) = O(\log x)$.

On en conclut

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{\pi^2}{12}x^2 - \sum\limits_{n \leq x} \sigma(n)(x-n)}{x \log x} = \frac{1}{2}. \tag{10 bis}$$

Dans le paragraphe 4 nous arriverons à une meilleure approximation de la fonction (10).

§ 3. Étude de la fonction $\sum\limits_{n \leq x} \sigma(n) \log \frac{x}{n}$.

Avant d'approfondir l'examen de la fonction $\sum\limits_{n \leq x} \sigma(n)(x-n)$, nous allons nous occuper un peu d'une autre fonction importante, à savoir

$$\int_1^x \Big(\sum_{n \leq x} \sigma(n)\Big) \frac{dx}{x} = \sum_{n \leq x} \sigma(n) \log \frac{x}{n}.$$

On sait qu'elle peut être représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s \zeta(s) \zeta(s+1)\, ds}{s^2}$$

pourvu que c soit > 1. Étudions maintenant la même intégrale pour un chemin fermé d'intégration, R, composé de la manière suivante

$$\int_R = \int_{c-ih}^{c+ih} + \int_{c+ih}^{ih} + \int_{ih}^{i\rho} + \int_{\substack{\arg s = \frac{\pi}{2} \\ |s| = \rho}}^{\arg s = -\frac{\pi}{2}} + \int_{-i\rho}^{-ih} + \int_{-ih}^{c-ih}.$$

Les points singuliers de la fonction $\frac{x^s \zeta(s) \zeta(s+1)}{s^2}$, situés à l'intérieur de R, sont les pôles $s = 1$ et $s = 0$ dont le dernier est triple. Le résidu relatif à $s = 1$ est

égal à $\frac{\pi^2}{6}x$; quant au coefficient de s dans le développement en série de puissances du numérateur, on en trouve à l'aide des formules

$$\begin{cases} \zeta(s) = \zeta(0) + \zeta'(0)\,s + \frac{1}{2}\zeta''(0)\,s^2 + \cdots \\ \zeta(s+1) = \frac{1}{s} + \gamma + A\,s + \cdots \\ x^s = 1 + s\log x + \frac{s^2}{2}\log^2 x + \cdots \end{cases}$$

la valeur suivante

$$b - a\log x - \frac{1}{4}\log^2 x$$

où a est la constante introduite pag. 120, à savoir $\frac{1}{2}(\gamma + \log 2\pi)$, et

$$b = -\frac{\gamma\log 2\pi}{2} - \frac{A}{2} + \frac{\zeta''(0)}{2}.$$ [1]

Nous avons ainsi l'égalité

$$\int_R = 2\pi i\left(\frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{4}\log^2 x - a\log x + b\right)$$

qu'il faut examiner pour $h = \infty$. Montrons d'abord que:

$$\lim_{h=\infty}\int_{\pm ih}^{c\pm ih} = 0.$$

En effet

$$\int_{\pm ih}^{c\pm ih}\frac{x^s\zeta(s)\zeta(s+1)\,ds}{s^2} = x^{\pm ih}\int_0^c\frac{x^\sigma\zeta(\sigma\pm ih)\zeta(1+\sigma\pm ih)\,d\sigma}{(\sigma\pm ih)^2}$$

[1] On peut montrer que: $\zeta''(0) = -\frac{1}{2}\left(\log^2 2\pi + \frac{\pi^2}{12} + 2A - \gamma^2\right)$, de sorte que l'on aura: $b = -\frac{1}{4}\left\{\log 2\pi(\log 2\pi + 2\gamma) + \frac{\pi^2}{12} + 4A - \gamma^2\right\}$. On a en outre: $A = 0{,}073\ldots$ (Torelli: Sulla totalità dei numeri primi etc. Pag. 31.)

d'où

$$\left|\int\limits_{\pm ih}^{c\pm ih}\right| < \int\limits_{0}^{c} \frac{x^{\sigma}|\zeta(\sigma+ih)||\zeta(1+\sigma+ih)|\,d\sigma}{\sigma^2+h^2}.$$

Rappelons maintenant les inégalités suivantes[1] valables pour $h > 1$

$$\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &|\zeta(\sigma+ih)| < K\log h \\ &|\zeta(1+\sigma+ih)| < \zeta(1+\sigma) < 1+\frac{1}{\sigma} \end{aligned}\right\} (\sigma \geq 1) \\ &|\zeta(\sigma+ih)| < Kh^{\frac{1}{2}+\varepsilon}; \quad (0 \leq \sigma \leq 1) \end{aligned}\right.$$

où K est une constante absolue. Il en résulte

$$\left\{\begin{aligned} &\int\limits_{1}^{c} \frac{x^{\sigma}|\zeta(\sigma+ih)\zeta(1+\sigma+ih)|\,d\sigma}{\sigma^2+h^2} < K\log h \int\limits_{1}^{c} \frac{(1+\sigma)\,x^{\sigma}\,d\sigma}{\sigma(\sigma^2+h^2)} < \frac{2K\log h}{1+h^2}\cdot\frac{x^c-x}{\log x} \\ &\int\limits_{0}^{1} \frac{x^{\sigma}|\zeta(\sigma+ih)\zeta(1+\sigma+ih)|\,d\sigma}{\sigma^2+h^2} < K^2h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\log h \int\limits_{0}^{1} \frac{x^{\sigma}\,d\sigma}{\sigma^2+h^2} < \frac{K^2\log h}{h^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}\cdot\frac{x-1}{\log x} \end{aligned}\right.$$

et par là

$$\lim_{h=\infty} \int\limits_{\pm ih}^{c\pm ih} = 0.$$

On a donc le droit d'écrire

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s\zeta(s)\zeta(s+1)\,ds}{s^2} = \sum_{n<x}\sigma(n)\log\frac{x}{n} = \frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{4}\log^2 x - a\log x + b + \frac{1}{2\pi i}\left(\int + \int\right) - \frac{1}{2\pi i}\int \qquad (11)$$

[1] Landau: Handbuch II § 228.

$$\frac{\pi^2}{6}x - \frac{1}{4}\log^2 x - a\log x + b - \frac{1}{2\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{x^{it}\zeta(it)\zeta(1+it) + x^{-it}\zeta(-it)\zeta(1-it)}{t^2}\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x^{\varrho e^{iv}}\zeta(\varrho e^{iv})\zeta(1+\varrho e^{iv})\,e^{-iv}\,dv.$$

Cherchons d'abord à évaluer la première intégrale. Elle est évidemment inférieure, en sens absolu, à

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\left|\frac{\zeta(it)}{\zeta(1+it)}\right|\left|\zeta^2(1+it)\right|\frac{dt}{t^2}.$$

D'autre part, on aura à cause de l'équation fonctionelle de $\zeta(s)$

$$\frac{\zeta(it)}{\zeta(1+it)} = \frac{\pi^{it}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)}\,\frac{\zeta(1-it)}{\zeta(1+it)}$$

et par la théorie de la fonction $\Gamma(s)$

$$\Gamma\left(\frac{1-it}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{it}{2}\right) = 2\sqrt{\pi}\,.\,2^{it}\,\Gamma(-it);\qquad |\Gamma(it)|^2 = \frac{2\pi}{t(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}$$

d'où, $\left|\frac{\zeta(1-it)}{\zeta(1+it)}\right|$ étant $=1$

$$\left|\frac{\zeta(it)}{\zeta(1+it)}\right| = 2\frac{|\Gamma(it)|}{\left|\Gamma\left(\frac{it}{2}\right)\right|^2} = \sqrt{\frac{t}{2\pi}\cdot\frac{e^{\frac{\pi t}{2}}-e^{-\frac{\pi t}{2}}}{e^{\frac{\pi t}{2}}+e^{-\frac{\pi t}{2}}}} < \sqrt{\frac{t}{2\pi}}.$$

Puisque en outre $|\zeta(1+it)| < K\log t$, on aura donc

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{|\zeta(it)\zeta(1+it)|\,dt}{t^2} < \frac{K^2}{\sqrt{2\pi^3}}\int_{\varrho}^{\infty}\frac{\log^2 t\,dt}{t^{\frac{3}{2}}} < \frac{6^3K^2}{e^2\sqrt{2\pi^3}}\cdot\frac{1}{\varrho^{\frac{1}{3}}}.$$ [1]

[1] On a généralement: $\int_a^{\infty} u^2 e^{-\lambda u}\,du = \int_a^{\infty} u^2 e^{-\lambda' u}\,.\,e^{-(\lambda-\lambda')u}\,du < \frac{4}{(e\lambda')^2}\int_a^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda')u}\,du =$

Il nous reste à examiner la seconde intégrale figurant dans (II). En désignant par $M(\varrho)$ le maximum de $|\zeta(s)\zeta(s+1)|$ sur le demicercle à rayon ϱ, on aura pour l'intégrale en question la limite supérieure

$$\frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-\varrho\cos\vartheta}\,d\vartheta = \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\int_0^1 \frac{e^{-\varrho\log x\,t}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1\right\} < \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-\varrho\log x.t}\,dt + \frac{1}{x^{\frac{\varrho}{2}}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\} =$$

$$= \frac{M(\varrho)}{\pi\varrho}\left\{\frac{2}{\sqrt{3}\,\varrho\log x}\left(1-\frac{1}{x^{\frac{\varrho}{2}}}\right) + \frac{\pi}{3x^{\frac{\varrho}{2}}}\right\}$$

laquelle s'annule pour $x=\infty$, ϱ étant fixé. Nous sommes ainsi parvenus à ce résultat que la somme des deux intégrales dans le membre droit de (II) est inférieure, en sens absolu, à une expression de la forme: $\frac{K'}{\varrho^{\frac{1}{6}}} + \delta(x,\varrho)$, K' étant une constante absolue et $\lim\limits_{x=\infty}\delta(x,\varrho)=0$. On en conclut immédiatement que la fonction de x, représentée par ces intégrales, a pour limite zéro quand x croît indéfiniment. En effet, ayant choisi un ε arbitrairement petit, on prendra ϱ assez grand, pour que $\frac{K'}{\varrho^{\frac{1}{6}}}$ soit $<\frac{\varepsilon}{2}$. Le nombre ϱ étant fixé, on peut toujours trouver un x' tel que $\delta(x,\varrho)$ sera $<\frac{\varepsilon}{2}$ pour $x>x'$. Le module de la fonction sera donc $<\varepsilon$ pour chaque $x>x'$.

C. q. f. d.

$=\frac{4}{(e\lambda')^2}\cdot\frac{e^{-a(\lambda-\lambda')}}{\lambda-\lambda'}$ et, en déterminant λ' de manière à donner à $\lambda'^2(\lambda-\lambda')$ sa valeur maximale, on obtient: $\int_a^\infty u^2 e^{-\lambda u}\,du < \frac{27}{e^2}\frac{e^{-\frac{1}{3}a\lambda}}{\lambda^3}$. De plus: $\int_x^\infty \frac{\log^2 t\,dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \int_{\log x}^\infty u^2 e^{-\frac{1}{2}u}\,du$ etc.

Le résultat trouvé dans ce paragraphe s'exprime donc par l'équation

$$\sum_{n<x} \sigma(n) \log \frac{x}{n} = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{4} \log^2 x - a \log x + b + o(1). \tag{12}$$

On pourrait bien aller un peu plus loin et obtenir pour les termes $= o(1)$ une limite supérieure en fonction de x. Il suffirait pour cela de calculer une fonction de ϱ pouvant remplacer $M(\varrho)$, en utilisant p. ex. la formule connue[1]

$$\zeta(s) = \frac{4\pi}{s-1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{4} + t^2\right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{\cos[(s-1) \operatorname{arc\,tg} 2t]}{(e^{\pi t} + e^{-\pi t})^2} dt$$

valable dans tout le plan de la variable s, et de donner ensuite à ϱ une valeur convenable dépendant de x. Mais on n'obtient par cette voie qu'une fonction de x d'un ordre assez élevé, laquelle ne nous renseigne rien de nouveau sur la fonction $\sum_{n<x} \sigma(n)$. C'est pourquoi je me contente d'avoir démontré l'égalité (12).

§ 4. Représentation analytique de la fonction

$$\frac{1}{\underline{|k}} \sum_{n<x} \sigma(n) (x-n)^k.$$

En désignant par z une variable complexe dont la partie réelle $R(z) > 0$, on déduit sans peine les deux formules

$$\left\{ \begin{aligned} & f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{nz} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\sigma(n)\, e^{-nz} \\ & f_1(z) = \log \frac{1}{P(e^{-z})} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\, e^{-nz}; \quad P(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n), \quad (|x| < 1) \end{aligned} \right. \tag{13}$$

dont la seconde s'obtient de la première par intégration. La théorie des fonc-

[1] Lindelöf: Le calcul des résidus etc. Paris chez Gauthier-Villars 1905. Pag. 103.

tions elliptiques nous apprend que les fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ satisfont aux équations fonctionelles suivantes[1]

$$\left\{\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi^2}{6z^2} - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24} - \frac{4\pi^2}{z^2} f\left(\frac{4\pi^2}{z}\right) \\ f_1(z) &= \frac{\pi^2}{6z} - \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2}\log z - \frac{1}{24}z + f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Rappelons de plus les formules intégrales connues

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\,dz}{z^{\mu+1}} = \begin{cases} \dfrac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)}, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}\log z\,dz}{z^{\mu+1}} = \begin{cases} \dfrac{x^\mu}{\Gamma(\mu+1)}\left[\dfrac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \log x\right], & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(a,\ \mu > 0).$$

En supposant μ égal à un entier $k \geq 1$, on tire de la seconde équation (14)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}f_1(z)\,dz}{z^{k+1}} &= \frac{1}{\underline{|k}}\sum_{n<x}\sigma(n)(x-n)^k = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x^{k+1}}{\underline{|k+1}} - \frac{1}{2\,\underline{|k}}x^k\log x + \\ &+ \frac{1}{2\,\underline{|k}}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{\underline{|k}} - \log 2\pi\right\}x^k - \frac{1}{24}\frac{x^{k-1}}{\underline{|k-1}} + \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz}{z^{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

où il faut examiner de plus près l'intégrale figurant dans le membre droit.

Écrivons d'abord

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz}{z^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}}{z^{k+1}}\left(\sum_{n=1}^{p-1}\sigma(n)e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}\right)dz + R_p$$

[1] Voir p. ex. Hurwitz: Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen etc. Pag. 20—30. (Thèse pour le doctorat, Leipzig 1881). Pour les valeurs réelles et positives de z la première des deux équations a été démontrée d'une manière différente aussi par Schlömilch (Compendium der höheren Analysis, Tome II, pag. 154 et suiv.)

où

$$R_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}}{z^{k+1}}\left(\sum_{n=p}^{\infty}\sigma(n)e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}\right)dz.$$

La première intégrale est égale à

$$\sum_{n=1}^{p-1}\sigma(n)\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}}{z^{k+1}}e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}dz$$

et il est facile de voir qu'on a le droit de remplacer $e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}}$ par son développement en série et d'en intégrer les termes. Nous obtiendrons ainsi l'expression suivante

$$\sum_{n=1}^{p-1}\sigma(n)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(4\pi^2 n)^{\nu}}{\underline{|\nu}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}dz}{z^{k+\nu+1}}\right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{p-1}\sigma(n)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(4\pi^2 n)^{\nu}x^{\nu+k}}{\underline{|\nu}\,\underline{|\nu+k}}\right)$$

et enfin, en introduisant les fonctions connues de Bessel

$$I_k(v) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{2\nu+k}}{\underline{|\nu}\,\underline{|\nu+k}} \tag{16}$$

l'égalité suivante

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xz}f_1\left(\frac{4\pi^2}{z}\right)dz}{z^{k+1}} = \frac{x^{\frac{k}{2}}}{(2\pi)^k}\sum_{n=1}^{p-1}\frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}}I_k(4\pi\sqrt{nx}) + R_p$$

où il nous reste à prouver que $\lim\limits_{p=\infty} R_p = 0$. A cet effet nous démontrerons les deux lemmes suivants.

1. En désignant par ϱ un nombre positif quelconque < 1, on aura pour

$$\sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n)\, \xi^n < \frac{p^\varrho\, \xi^p}{(\mathrm{I} - \xi)^2}.$$

En effet, on peut toujours prendre p assez grand pour que $\sigma(n)$ soit $< n^\varrho$, dès que $n \geqq p$, et par suite

$$\sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n)\, \xi^n < p^\varrho\, \xi^p \left\{ \mathrm{I} + \left(\mathrm{I} + \frac{\mathrm{I}}{p}\right)^\varrho \xi + \left(\mathrm{I} + \frac{2}{p}\right)^\varrho \xi^2 + \cdots \right\} <$$

$$< p^\varrho\, \xi^p \left\{ \mathrm{I} + \left(\mathrm{I} + \frac{\varrho}{p}\right) \xi + \left(\mathrm{I} + \frac{2\varrho}{p}\right) \xi^2 + \cdots \right\} =$$

$$= p^\varrho\, \xi^p \left\{ \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - \xi} + \frac{\varrho\, \xi}{p\,(\mathrm{I} - \xi)^2} \right\} = p^\varrho\, \xi^p\, \frac{\mathrm{I} - \left(\mathrm{I} - \frac{\varrho}{p}\right)\xi}{(\mathrm{I} - \xi)^2}.$$

2. Pour $0 < u < \log k$ on a: $\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - e^{-u}} < \dfrac{k}{u}$. Car la fonction $\mathrm{I} - e^{-u} - \dfrac{u}{k}$ s'annule pour $u = 0$ et sa dérivée: $e^{-u} - \dfrac{\mathrm{I}}{k}$ est positive pour $0 \leqq u < \log k$.

Posons maintenant $z = a + it$; il s'ensuit

$$\frac{4\pi^2}{z} = \frac{4\pi^2(a - it)}{a^2 + t^2}; \quad \left| e^{-\frac{4\pi^2}{z}} \right| = e^{-\frac{4\pi^2 a}{a^2 + t^2}}; \quad \frac{4\pi^2 a}{a^2 + t^2} \leqq \frac{4\pi^2}{a}$$

donc, par le second lemme

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - e^{-\frac{4\pi^2 a}{a^2 + t^2}}} < \frac{e^{\frac{4\pi^2}{a}}}{4\pi^2 a}(a^2 + t^2)$$

et, d'après le premier

$$\left| \sum_{n=p}^{\infty} \sigma(n)\, e^{-\frac{4\pi^2 n}{z}} \right| < p^\varrho\, e^{-\frac{4\pi^2 a p}{a^2 + t^2}} \cdot \frac{\mathrm{I}}{\left(\mathrm{I} - e^{-\frac{4\pi^2 a}{a^2 + t^2}}\right)^2} < \frac{e^{\frac{8\pi^2}{a}}}{16\pi^4 a^2}\, p^\varrho\, e^{-\frac{4\pi^2 a p}{a^2 + t^2}} (a^2 + t^2)^2$$

de sorte que

$$|R_p| < \frac{e^{\frac{8\pi^2}{a} + ax}}{16\pi^5 a^2}\, p^\varrho \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{4\pi^2 a p}{a^2 + t^2}}\, dt}{(a^2 + t^2)^{\frac{k-3}{2}}}.$$

Nous voyons par là qu'il suffit de prendre $k \geq 5$, pour que l'intégrale précédente soit convergente et qu'elle soit inférieure ou égale à

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{4\pi^2 a p}{a^2+t^2}}\, dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{4\pi^2 p}{a}\cos^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2a}\int_0^1 \frac{e^{-\frac{4\pi^2 p}{a}t}\, dt}{\sqrt{t(1-t)}}. \tag{17}$$

Or, on a généralement pour $\lambda > 0$

$$\int_0^1 \frac{e^{-\lambda t}\, dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 < \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}\, dt}{\sqrt{t}} + e^{-\frac{1}{2}\lambda}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{\pi}{2} e^{-\frac{1}{2}\lambda}$$

ce qui fait voir que les intégrales (17) sont d'un ordre de grandeur ne surpassant pas $\frac{1}{\sqrt{p}}$. Pour $\varrho < \frac{1}{2}$ il en résulte: $\lim\limits_{p=\infty} R_p = 0$.

C. q. f. d.

Nous sommes ainsi parvenus à la formule

$$\begin{aligned}\frac{1}{k!}\sum_{n\leq x}\sigma(n)(x-n)^k = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{1}{2\,k!}x^k\log x + \frac{1}{2\,k!}\left\{\frac{\Gamma'(k+1)}{k!} - \log 2\pi\right\}x^k - \\ - \frac{1}{24}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^{\frac{k}{2}}}{(2\pi)^k}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx})\end{aligned} \tag{18}$$

établie pour le moment sous l'hypothèse $k \geq 5$. Montrons d'abord qu'elle subsiste encore pour $k \geq 2$.

Pour cela il faut rappeler une propriété des fonctions de Bessel. On sait qu'elles sont, pour des valeurs grandes de la variable réelle et positive v, d'un ordre égal à $\frac{1}{\sqrt{v}}$.[1] De plus, on tire du développement asymptotique de la fonction $I_k(v)$

$$I_k(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left[v - (2k+1)\frac{\pi}{4}\right]}{\sqrt{v}} + O\left(v^{-\frac{3}{2}}\right). \tag{19}$$

[1] Cf. p. ex. Forsyth: Lehrbuch der Diff.-Gleichungen (Deutsch von H. Maser). Braunschweig 1889. § 105.

Rappelons aussi la relation suivante

$$I'_k(v) = I_{k-1}(v) - \frac{k}{v} I_k(v)$$

laquelle nous fait voir que, en différentiant par rapport à x l'équation (18), on n'y produit d'autre changement que de remplacer k par $k-1$. Or, à cause de (19) la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx})$ sera absolument et uniformément convergente pour toute valeur de $x \geqq 1$, tant que $k \geqq 2$. La formule (18) sera donc aussi valable sous la même hypothèse. Pour $k=1$, au contraire, la convergence de la série n'est plus absolue, et il faut étudier à fond, pour embrasser aussi ce cas, les séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \frac{\sin\sqrt{nx}}{n^{\alpha}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \frac{\cos\sqrt{nx}}{n^{\alpha}}$$

où $1 > \alpha > \frac{1}{2}$. Mais avant d'aborder cette recherche, écrivons la formule (18) pour $k=2$ et tirons-en les conséquences. On trouvera

$$\left.\begin{aligned} F(x) = \frac{1}{2}\sum_{n<x}\sigma(n)(x-n)^2 = \frac{\pi^2}{36}x^2 - \frac{1}{4}x^2\log x + \left(\frac{3}{8} - \frac{\gamma + \log 2\pi}{4}\right)x^2 - \frac{x}{24} + \varphi(x); \\ \varphi(x) = \frac{x}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n} I_2(4\pi\sqrt{nx}) = O\left(x^{\frac{3}{4}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

D'autre part, un calcul simple nous donne

$$\left.\begin{aligned} \Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = \sum_{n<x}\sigma(n)(x-n) + \frac{1}{2}\sum_{n<x}\sigma(n) + \frac{1}{2}\sigma([x]+1)\varrho^2(x) \\ \Delta^2 F(x) = \sum_{n<x}\sigma(n) + \left\{\frac{1}{2} + \varrho(x)\right\}\sigma([x]+1) + \frac{1}{2}\Delta\sigma([x]+1)\varrho^2(x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Les fonctions $\Delta F(x)$ et $\Delta^2 F(x)$ étant connues, on peut donc, sans laisser le domaine des séries absolument et uniformément convergentes, former des expressions analytiques pour les fonctions $\sum_{n<x}\sigma(n)(x-n)$ et $\sum_{n<x}\sigma(n)$, abstraction faite de certaines termes complémentaires d'un ordre ne surpassant pas $\log\log x$. De la première équation (21) on tire en outre

$$\sum_{n<x} \sigma(n)(x-n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \left(a - \frac{1}{2}\right) x + O\left(x^{\frac{3}{4}}\right) \tag{22}$$

où a est la même constante que nous avons rencontrée pag. 120. Nous sommes arrivés par là à un résultat plus précis que celui de la formule (10 bis), à savoir

$$\lim_{x=\infty} \frac{\frac{\pi^2}{12} x^2 - \sum_{n<x} \sigma(n)(x-n) - \frac{1}{2} x \log x}{x} = a - \frac{1}{2}. \tag{22 bis}$$

Passons à l'examen du cas où $k=1$. Pour cela nous aurons besoin d'un théorème général sur les séries infinies d'une certaine forme, dont la démonstration sera donnée dans le paragraphe suivant.

§ 5. Un théorème sur les séries.

Soient $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ *deux suites infinies de nombres et* $f(x)$ *une fonction continue pour toute valeur finie de* $x \geq \alpha > 0$. *Nous allons supposer en outre:*

1. *La série* $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|$ *est convergente.*

2. *Pour chaque nombre positif,* A, *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f(nx)$ *converge uniformément dans l'intervalle* $A \geq x > \alpha$. *La fonction*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f(nx) \tag{23}$$

est donc continue pour chaque x *fini* $\geq \alpha$.

3. *En mettant*

$$\varphi(x, y) = \sum_{n<y} b_n f(nx); \quad \Omega(x) = \overline{\lim_{y\geq 1}} |\varphi(x, y)|$$

la série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \Omega(mx)$ *est uniformément convergente pour* $A \geq x \geq \alpha$. *Sous ces hypothèses on aura pour toute valeur finie de* $x > \alpha$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(mx) &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m f(mx) \\ c_m &= \sum_{\nu\mu=m} a_\mu b_\nu . \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Dans le cas spécial: $f(x) = 1$, on retrouve le théorème de STIELTJES sur la *multiplication* DIRICHLET'ienne de deux séries, dont l'une est absolument convergente.[1]

Faisons quelques observations sur l'énoncé du théorème et les hypothèses sur lesquelles il est basé. Si pour $x \geq a$ la fonction $\Omega(x)$ est bornée, l'hypothèse 3 est contenue dans 1; si au contraire $\frac{1}{\Omega(x)}$ ne dépasse pas une limite fixe, l'hypothèse 1 devient une conséquence de 3. Dans le cas général il faut les retenir toutes les deux. A cause de l'hypothèse 3 la série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m \varphi(mx)|$ sera convergente, mais cela ne suffit pas, $\Omega(x)$ pouvant être d'un ordre de grandeur plus élevé que $|\varphi(x)|$.[2] Quant à la série double $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m b_n f(mnx)$, elle ne sera pas en général absolument convergente.

[1] LANDAU: Handbuch, II §§ 184, 185.

[2] L'hypothèse 3 est essentielle, ce qu'on peut voir de l'exemple suivant, où le théorème est en défaut, bien que les deux autres hypothèses soient satisfaites.

Posons

$$a_m = \frac{1}{m^2}; \quad b_n = \frac{\mu(n)}{n^2}; \quad f(x) = x$$

en désignant par $\mu(n)$ les facteurs de MÖBIUS. Il en résulte: $\varphi(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$ pour toute valeur finie de x. Or, la fonction $\Omega(x)$ est ici égale à x, de sorte que la série $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \, \Omega(mx)$ est divergente. On trouvera de plus

$$c_k = \sum_{mn=k} \frac{\mu(n)}{k^2} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = 1 \\ 0 & \text{» } k > 1 \end{cases}$$

et l'équation (24) devient: $0 = x$, ce qui est absurde, la valeur de x étant supposée différente de zéro.

Considérons d'abord le cas où la convergence des deux series $\sum_{n=1}' b_n f(n x)$ et $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \Omega(mx)$ est uniforme même pour un intervalle illimité $x \geq \alpha$. Alors la démonstration peut se faire à peu près comme celle dont se sert M. LANDAU pour établir le théorème de STIELTJES. Nous avons en effet

$$c_m f(mx) = \sum_{\mu\nu=m} a_\mu b_\nu f(\mu \nu x)$$

d'où

$$\sum_{m=1}^{k} c_m f(mx) = \sum_{\mu\nu \leq k} a_\mu b_\nu f(\mu \nu x) = \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \sum_{\nu \leq \frac{k}{\mu}} b_\nu f(\mu \nu x) = \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu \varphi\left(\mu x, \frac{k}{\mu}\right)$$

et par suite

$$\sum_{m=1}^{k} c_m f(m x) - \sum_{m=1}^{k} a_m \varphi(mx) = \sum_{m=1}^{k} a_m \left\{\varphi\left(m x, \frac{k}{m}\right) - \varphi(m x)\right\}. \tag{25}$$

Maintenant il existe certainement un nombre fixe, g, tel que l'on a pour toutes les valeurs de k: $\sum_{m=1}^{k} |a_m| < g$. Ayant choisi un δ arbitrairement petit, on peut donc assigner un nombre p assez grand, pour que

$$\left.\begin{aligned} |\varphi(x, y) - \varphi(x)| &< \frac{\delta}{2g} \\ \sum_{m=p}^{\infty} |a_m| \Omega(mx) &< \frac{\delta}{4} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

dès que $y > p$, et quel que soit x. En prenant $k > p^2$ on aura par conséquent

$$\left\{\begin{aligned} \left|\sum_{m < \sqrt{k}} a_m \left\{\varphi\left(m x, \frac{k}{m}\right) - \varphi(m x)\right\}\right| &< \frac{\delta}{2g} \cdot g = \frac{\delta}{2} \\ \left|\sum_{m > \sqrt{k}} a_m \left\{\varphi\left(m x, \frac{k}{m}\right) - \varphi(m x)\right\}\right| &< 2 \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$\left| \sum_{m=1}^{k} c_m f(mx) - \sum_{m=1}^{k} a_m \varphi(mx) \right| < \delta$$

ce qui achève la démonstration.

Passons au cas plus général, où la convergence uniforme des séries ne subsiste plus pour $x = \infty$. Le nombre p ne sera donc pas indépendant de x, mais puisque les séries convergent uniformément dans chaque intervalle d'étendue finie, on peut certainement construire une fonction positive de x à croissance monotone, soit $\frac{\omega(x)}{x}$, telle que les inégalités (26) sont valables pour

$$p > \frac{\omega(x)}{x}; \quad m > \frac{\omega(x)}{x}$$

la valeur de x ayant été fixée. Divisons ensuite la série (25) en deux parties

$$\sum_{\frac{k}{m} > \frac{\omega(mx)}{mx}} + \sum_{\frac{k}{m} \leq \frac{\omega(mx)}{mx}}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{m \leq \frac{\omega^{-1}(kx)}{x}} + \sum_{m > \frac{\omega^{-1}(kx)}{x}}$$

en désignant par $\omega^{-1}(x)$ la fonction *inverse* de $\omega(x)$. La première série est donc en valeur absolue $< \frac{\delta}{2}$; la seconde le sera aussi, pourvu que

$$\omega^{-1}(kx) > \omega(x)$$

ce qui revient à dire qu'il suffit de prendre: $k > \frac{\omega(\omega(x))}{x}$. Le théorème est donc complètement démontré.

Nous allons appliquer ce théorème au cas suivant

$$a_m = \frac{1}{m^{\alpha+1}}; \quad b_n = \frac{1}{n}; \quad f(x) = \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (2\pi x)$$

où

$$1 > \alpha > \frac{1}{2}.$$

D'après la formule d'EULER-MACLAURIN[1] on aura alors

$$\varphi(x, p) = \sum_{n=1}^{p} \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \frac{2}{x^{1-\alpha}} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{px}} \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} + \frac{1}{2}\frac{\sin \sqrt{px}}{p^\alpha} + \frac{1}{2}\sin \sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x} \int_1^p \frac{\frac{1}{2} - \varrho(z)}{z^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} - \frac{1}{2}\cos \sqrt{xz} \right\} dz$$

ce qui nous montre que la série

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \lim_{p=\infty} \varphi(x, p)$$

est convergente. Pour $f(x) = \cos \sqrt{x}$ on trouvera de même

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{\cos \sqrt{nx}}{n^\alpha} = \frac{2}{x^{1-\alpha}} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{px}} \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha-1}} + \frac{1}{2}\frac{\cos \sqrt{px}}{p^\alpha} + \frac{1}{2}\cos \sqrt{x} +$$

$$+ \sqrt{x} \int_1^p \frac{\frac{1}{2} - \varrho(z)}{z^{\alpha+\frac{1}{2}}} \left\{ \alpha \frac{\cos \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{2}\sin \sqrt{xz} \right\} dz$$

et ce cas n'est pas essentiellement différent du précédent. En ayant recours aux formules

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_\xi^\infty \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} = \frac{\cos \xi}{\xi^{2\alpha-1}} - (2\alpha-1)\int_\xi^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha}}, \text{ d'où: } \left| \int_\xi^\infty \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha-1}} \right| < \frac{2}{\xi^{2\alpha-1}} \\ &\int_\xi^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha-1}} = -\frac{\sin \xi}{\xi^{2\alpha-1}} + (2\alpha-1)\int_\xi^\infty \frac{\sin t\,dt}{t^{2\alpha}}, \text{ d'où: } \left| \int_\xi^\infty \frac{\cos t\,dt}{t^{2\alpha-1}} \right| < \frac{2}{\xi^{2\alpha-1}} \end{aligned} \right.$$

[1] Cf. p. ex. WIRTINGER: Acta Mathematica, Tome 26.

et en observant que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{nx}}{n^a} = \varphi(x) - \varphi(x, p) = \frac{2}{x^{1-a}} \int_{\sqrt{px}}^{\infty} \frac{\sin t dt}{t^{2a-1}} - \frac{1}{2} \frac{\sin \sqrt{px}}{p^a} +$$

$$+ \sqrt{x} \int_p^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \varrho(z)}{z^{a+\frac{1}{2}}} \left\{ a \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} - \frac{1}{2} \cos \sqrt{xz} \right\} dz$$

nous voyons aussi sans difficulté que: $\Omega(x) = O(\sqrt{x})$, et que la convergence des séries figurant dans nos hypothèses est uniforme dans chaque intervalle fini. Pour $x = \infty$ cela n'a plus lieu, mais on peut prendre ici

$$\omega(x) = K x^{\frac{2a}{2a-1}}.$$

Nous avons ainsi démontré que: *Les séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^a} \sin \sqrt{nx}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^a} \cos \sqrt{nx} \qquad (x > 0)$$

sont convergentes pour $a > \frac{1}{2}$.[1] — Dans le cas où $k = 1$, on aura maintenant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(4\pi\sqrt{nx})}{n^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4\pi\sqrt{nx} - \cos 4\pi\sqrt{nx}}{n^{\frac{3}{4}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} O\left(\frac{1}{(nx)^{\frac{3}{4}}}\right) =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4\pi\sqrt{nx} - \cos 4\pi\sqrt{nx}}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)$$

puisque la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ est convergente. Quant au premier terme du membre droit, il est $= O\left(x^{\frac{1}{4}}\right)$, ce qui fait voir que la série

[1] Pour $a < \frac{1}{2}$ les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}(\sqrt{nx})}{n^a}$ ne convergent plus.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(4\pi\sqrt{mnx})}{(nx)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} O\left(\frac{m^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)$$

est absolument et uniformément convergente. Or, on a formellement

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx})\right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k-1}{2}}} I_{k-1}(4\pi\sqrt{nx}) - \frac{k}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{k}{2}}} I_k(4\pi\sqrt{nx})$$

et, d'après ce que nous venons de voir, cette identité subsistera certainement pour $k = 2$ sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_2(4\pi\sqrt{mnx})}{n}\right\} = 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_1(4\pi\sqrt{mnx})}{(nx)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n} I_2(4\pi\sqrt{nx}).$$

L'équation (18) *correspondant à* $k = 1$ *est donc rigoureusement démontrée, à savoir*

$$\sum_{n<x} \sigma(n)(x-n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \left(a - \frac{1}{2}\right) x - \frac{1}{24} + \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{1}{2}}} I_1(4\pi\sqrt{nx}).[1] \quad (27)$$

Stockholm, mars 1913.

[1] En formant la première différence on en tire

$$\sum_{n<x} \sigma(n) + \sigma([x]+1)\rho(x) = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x + \frac{\pi^2}{12} - a + O\left(\frac{1}{x}\right) + \Delta\left[\frac{\sqrt{x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{1}{2}}} I_1(4\pi\sqrt{nx})\right]$$

et ensuite (cf. (2))

$$[illegible] - \frac{1}{2} \log x + a - \frac{\pi^2}{12} + \sigma([x]+1)\rho(x) - \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \left\{I_1(4\pi\sqrt{nx+n}) - I_1(4\pi\sqrt{nx})\right\} + O\left(x^{-\frac{1}{4}}\right).$$

A NOTE ON DERIVATES AND DIFFERENTIAL COEFFICIENTS.

BY

GRACE CHISHOLM YOUNG

IN GENEVA.

§ 1.

The main theorem obtained in the present note is the following: — *Except at a countable set of points, the lower derivate on either side is not greater than the upper derivate on the other side;* i. e. using an accepted notation which explains itself[1]

$$f_-(x) \leq f^+(x),$$

and also

$$f_+(x) \leq f^-(x).$$

The primitive fonction $f(x)$ may be any function whatever of the single real variable x. If $f(x)$ is a continuous function, this theorem enables us to assert that, except at a countable set of points, $f(x)$ has at least one symmetric derivate, that is to say there is at least one sequence of positive, and one sequence of negative values of h, both with zero as limit, corresponding to each point x, such that the incrementary ration $(f(x+h)-f(x))/h$ has the same limit for the two sequences. I define accordingly *the mean symmetric derivate of a continuous function* $f(x)$ to be the trigonometric mean (§ 7) between the greatest and least symmetric derivate at each point; *the mean symmetric derivate of a continuous function then exists except at most at a countable set of points; it agrees with the differential coefficient, wherever this exists, and is finite except at a set of points of content zero.*

[1] W. H. YOUNG and the present author, »On Derivates and the Theorem of the Mean», 1908, Quart. Jour. of Pure and Applied Math., § 2, p. 4. SCHEEFFER, who first introduced the concept of a derivate, used $D_-f(x)$, etc. »Allgemeine Untersuchungen über Rectification der Curven», 1884, Acta Math. 5, p. 52.

From the main theorem a number of interesting corollaries are at once evident.

§ 2.

The theorem from the Theory of Sets of Points on which the following discussion is based is due to W. H. Young,[1] and runs as follows: —

Given a set of intervals, overlapping in any manner, those points which are end-points of the intervals, without being internal to any of them are countable.

This theorem may be proved in various ways; the following proof is perfectly direct, and depends only on Cantor's theorem[2] that any set of non-overlapping intervals is countable.

Let us divide the set of points in question into two sets, according as the point under consideration is a left-hand end-point of one of the given intervals, or not. It will be shown that each of these sets is countable, and therefore the whole set is countable.

Corresponding to each point P, which is a left-hand end-point of one of the given intervals, without being internal to any interval of the given set, we have an interval d_P of the given set with P as left-hand end-point. The point P will not then, by hypothesis, be internal to any of the intervals d_Q belonging to a different point Q of the same type, nor will Q be internal to d_P. Hence the two intervals d_P and d_Q cannot overlap; for, if they did, the left-hand end-point of one would have to be internal to the other. Thus the intervals d_P form a set of non-overlapping intervals, and are therefore countable. The points P therefore also form a countable set, which is evidently dense nowhere, and contains no point which is a limiting point of the set on the left.

Similarly those points which are right-hand end-points of intervals of the given set, without being internal to any of the given intervals, form a countable set, nowhere dense, and containing no point which is a limiting point of the set on the right.

Thus *the whole set of points in question is countable, dense nowhere and contains no sub-set which is dense in itself on both sides.*

§ 3.

Let e_1, e_2, ... be a monotone descending sequence with zero as limit, k_1, k_2, ... a monotone ascending sequence with k as limit, where k may be finite or $+\infty$, and let D_n denote the set of overlapping intervals consisting of all those intervals which have the following three properties: —

[1] »On overlapping intervals», 1902, § 5. Proc. L. M. S., (1) Vol. XXXV, p. 387.
[2] Math. Ann. Vol. XXII, p. 117, (1882).

1) *the length of the interval is less than* e_n;

2) *when* x *and* $x+h$ *are the end-points of the interval,*

$$(f(x+h)-f(x))/h > k_n;$$

3) *the same inequality holds when* x *is the left-hand end-point and* $x+h$ *any internal point of the interval.*

Now consider a point y at which

$$f_+(y) \geq k$$

then, by the definition of the lower right-hand derivate $f_+(y)$, we can find an interval with y as left-hand end-point, satisfying the conditions (1), (2) and (3). Thus each such point y is a left-hand end-point of the intervals of D_n. Hence, by the theorem stated at the end of § 2, there is at most a countable set of these points y, which are not internal to the intervals of D_n.

Since this is true for all values of n, it appears that all but a countable set of the points y belong to the set of points G internal to all the sets of intervals

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n,\ \ldots$$

On the other hand, if X is any point of the set G, (supposing this set to be other than a null-set),[1] and $(x, x+h)$ be an interval of the set D_n containing X as internal point, it follows from the property 3), that (x, X) is also an interval of the set D_n, and therefore, by the properties 1) and 2),

$$X-x < e_n, \qquad \{f(X)-f(x)\}/(X-x) > k_n.$$

Since this is true for all values of n, this proves that the upper limit of $\{f(X)-f(X-h)\}/h$ as h decreases towards zero as limit, is not less than k; that is

$$f^-(X) \geq k.$$

Thus the set of points at which $f^- \geq k$ includes the set G, and therefore includes all the points at which $f_+ \geq k$, except possibly a countable set of these latter points.

Hence we have the following result: —

There is at most a countable set of the points at which $f_+(x) \geq k$, *at which we do not have also* $f^-(x) \geq k$.

[1] If $f(x)$ is continuous, and there are any points y at all, there are c such, where c is the potency of the continuum. Thus for suitable values of k, the set G certainly is not a null-set W. H. YOUNG »Term by term integration of oscillating series» 1909. Proc. L. M. S. (2) Vol. 8. p. 100

Exchanging right and left we have the alternative result.

Similarly we have the following: —

There is at most a countable set of the points at which $f^+ < k$, at which we do not also have $f_- < k$.

Here again we may interchange right and left.

In the first of the above statements k may be finite or $+\infty$, in the second it may be finite or $-\infty$. When k has one of these infinite values the sign $\geq$, or $\leq$, must, of course be taken to be the sign of equality.

§ 4.

Now the points at which $f_+(x) > k$ at which we do not also have $f^- > k$, may be divided into two classes; 1) the points $f_+ > k$, $f^- < k$, which are among the points at which $f_+ \geq k$ but not $f^- \geq k$, and therefore are countable, by the first of the results of the preceding article, and 2) the points at which $f_+ > k$, $f^- = k$, which are among the points at which $f^- \leq k$, but not $f_+ \leq k$, and are therefore countable by the second of the above results, after we have exchanged left and right. Thus *in the statements of the preceding article the sign of equality may be omitted.* For instance, omitting the sign of equality in the first of the theorems, we have the theorem: —

There is at most a countable set of the points at which $f_+ > k$, at which we do not also have $f^- > k$.

§ 5.

We can now prove the main theorem: —

Theorem. *Except at a countable set of points, the lower derivate on either side is less than, or equal to, the upper derivate on the other side*; i. e.

$$f_-(x) < f^+(x), \textit{ and also } f_+(x) \leq f^-(x).$$

To prove this let G_{k, e_r} denote the set of points at which

$$f^+(x) \leq k e_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

where k is any integer, positive, negative or zero, and $e_1, e_2, \ldots, e_r, \ldots$ is a monotone descending sequence of constants with zero as limit. Then, by the second of the theorems of § 3

$$G_{k, e_r} = C_{k, e_r} + F_{k, e_r},$$

where C_{k, e_r} is a countable set, and, at every point of F_{k, e_r}

$$f_-(x) \leq k e_r \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Let C denote the set consisting of all the sets $C_{k,\, e_r}$ for all values of the integers k and r. Then C is a countable set, since it consists of doubly infinite set of countable sets.

Now let P be any point not belonging to the set C. Then either at P

a) $f^+(x)$ has a finite value, or

b) $f^+(x)$ has the value $+\infty$, or

c) $f^+(x)$ has the value $-\infty$.

Take the first case a), and let

$$f^+(x) = p \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

Then there is a perfectly definite succession of values of k, say $k_1, k_2, \ldots k_r, \ldots$ such that, for every value of r,

$$(k_r - 1) e_r < p \leq k_r e_r \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

so that, the quantities $k_r e_r$ form, as r increases, a monotone descending sequence with p as limit.

By (3) and (4) the point P belongs to the set $G_{k_r,\, e_r}$ for all values of r; and therefore, since P is not a point of $C_{k_r,\, e_r}$, it is a point of $F_{k_r,\, e_r}$ for all values of r. Hence, by (2)

$$f_-(P) \leq k_r e_r \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

for all values of r.

But, as we let r increase indefinitely, the right hand side of (5) has the unique limit p, by (4). Hence

$$f_-(P) \leq p \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

Thus, by (3)

$$f_-(P) \leq f^+(P) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

In case b) the relation (7) is also, of course true.

In case c) we have already seen that, except at a countable set of points (7) holds as an equality (§ 3).

Thus (7) holds for all points P, excepting only a countable set.

Similarly, except at a countable set,

$$f^-(P) \geq f_+(P) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (8)$$

except at a countable set of points. This proves the theorem.

§ 6.

The relations (7) and (8) are precisely equivalent to the statement that there is at least one number which lies both between $f_-(P)$ and $f^-(P)$, both inclusive, and also between $f_+(P)$ and $f^+(P)$, both inclusive. But when $f(x)$ is a continuous function, its derivates on the right, or on the left, being the limits of the continuous function $(f(x+h)-f(x))/h$, when $0 < h$, or when $h < 0$, fill up respectively a whole closed interval, including, of course, a point as a special case. Thus we have the following corollary: —

Cor. *If $f(x)$ is a continuous fonction, it has at least one symmetric derivate, except at a countable set of points.*

By a symmetric derivate, I mean a limit of $(f(x+h)-f(x))/h$, which is the same when h describes a certain sequence of positive quantities with zero as limit, or a certain sequence of negative quantities with zero as limit, these two sequences depending on the point x.

§ 7.

On the other hand it is clear that, if P is a point at which a function, continuous or not, has a symmetric derivate, then the lower derivate on each side is less than, or equal to, the upper derivate on the other side; for the lower derivate on either side is not greater than the symmetric derivate, and the upper derivate on either side is not less than the symmetric derivate.

If the function is continuous, the symmetric derivates at any point not belonging to the exceptional countable set fill up a closed interval of values; for the upper and lower bounds of the symmetric derivates will lie between the upper and lower derivates both inclusive, on either side, so that every value between them is a derivate on either side.

Let us define as *the mean symmetric derivate* the trigonometric mean, as I should call it, between the greatest and least symmetric derivates in the case of a continuous function; that is to say, writing $\tan a$ for the greatest symmetric derivate, and $\tan b$ for the least, the mean symmetric derivate is $\tan \frac{1}{2}(a+b)$. Then the mean symmetric derivate of a continuous function is one of its derivates both on the right and also on the left, and, by the corollary of the preceding article, a continuous function has a mean symmetric derivate, except at a countable set of points.

At a point at which a differential coefficient exists, whether $f(x)$ is or is not continuous, there is only one symmetric derivate, which is the differential coefficient itself, and may be considered to be the mean symmetric derivate. But at a point at which the mean symmetric derivate, as defined above for a

continuous function, exists, there need not be a differential coefficient. If accordingly I use the notation $f'(x)$ for the mean symmetric derivate, there will be no confusion with the usual notation for the differential coefficient.

If the mean symmetric derivate of a continuous function is $+\infty$, one or other of the lower derivates $f_-(x)$, or $f_+(x)$, must be $+\infty$. For the upper derivate on each side must of course be $+\infty$, hence, if the lower derivates were both less than a finite quantity $\tan c$, where $0 < c < \frac{1}{2}\pi$, every value greater than this would be a symmetric derivate, and therefore the mean symmetric derivate would be not greater than the finite quantity $\tan \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + c)$. At such a point accordingly there is, at least on one side, an infinite differential coefficient. The same is true at a point where the mean symmetric derivate is $-\infty$.

Now, as we have seen in § 3 when $k = \pm\infty$, the points at which a forward or backward differential coefficient exists and is infinite, without there being a proper differential coefficient are countable. Also by LUSIN's Theorem,[1] the points at which a continuous function has an infinite differential coefficient form a set of content zero, while, by HAHN's example[2] we know that they may form a perfect set. Thus *the mean symmetric derivate of a continuous function exists except at a countable set of points, and is finite except possibly at a set of content zero, which may, however, be perfect.*

§ 8.

As a special case of the theorem of § 5 we get immediately the following: —

Theorem. *If x is a point, not belonging to the exceptional countable set, and such that at it a forward differential coefficient $f'_+(x)$ exists, this lies between the upper and lower derivates on the other side, i. e.*

$$f_-(x) \leq f'_+(x) \leq f^-(x);$$

similarly if at x a backward differential coefficient f'_- exists,

$$f_+(x) \leq f'_-(x) \leq f^+(x).$$

Cor. *Except at a countable set of points, a function $f(x)$ cannot have a forward and a backward differential coefficient which are unequal in value, whether finite or infinite with determinate sign.*

In the case when $f(x)$ is a continuous function, this corollary has, with

[1] N. LUSIN. »Sur un théorème fondamental du calcul intégral», 1911. Recueil de la Société mathématique de Moscou, Vol. XXVIII, 2.

[2] H. HAHN. Mon. f. Math. 16. (1905), p. 317.

certain possible restrictions, not clearly stated, been given by BEPPO LEVI.[1] It is an immediate consequence that if $f(x)$ has both a forward and a backward differential coefficient, of value finite or infinite with determinate sign, at every point of an interval or set S, excepting perhaps at a countable set of points, then $f(x)$ has a differential coefficient $f'(x)$, of value finite, or infinite with determinate sign, at every point of S, excepting only a countable set.

With respect to this last result I may perhaps call attention to the fact that in HILBERT's proof[2] of the existence of a set of constants (Eigenwerte) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ for a quadric in space of an infinite number of dimensions, corresponding to the principal axes in the case of a quadric in a finite number of dimensions, a proof *ad hoc* was given that, in the special case of the functions there utilised, which have in fact a forward and a backward differential coefficient at every point, the differential coefficient exists except at a countable set.

§ 9.

The theorem of § 5 permits us also to extend a known theorem[3] as follows: —

Theorem. *If $f(x)$ is a continuous function which is zero at a and at b, then the points at which both the upper derivates and one of the lower derivates are ≥ 0 in (a, b) have the potency c, and the same is true of the points at which both the lower derivates and one of the upper derivates are ≤ 0.*

If $f(x)$ is identically zero, the theorem is obviously true. If not $f(x)$ must assume either a positive or a negative value, and it is clearly only necessary to discuss the former case. Let then p be the upper bound of the values

[1] BEPPO LEVI »Ricerche sulle funzioni derivate», 1906. Rend. dei Lincei, (5), Vol. XV, p. 437.

Since finishing the present paper in August 1912 the following additional references have come to my notice. A. ROSENTHAL, »Ueber die Singularitäten der reellen ebenen Kurven», Habilitationsschrift, München, July 4th, 1912. W. SIERPINSKI, »Sur l'ensemble des points angulaires d'une courbe $y = f(x)$», Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, (A), October 1912, pp. 850—854. The theorem of SIERPINSKI and that of ROSENTHAL, given on p. 28, loc cit. are worded similarly as follows: — »*The set of points at which a curve has an angular point or cusp is at most countable*». The interpretation attached by the two authors to the geometrical concepts involved is, however, different, and, in consequence the theorem of ROSENTHAL is more general. SIERPINSKI has in fact reproved BEPPO LEVI's Theorem, without leaving any doubt as to restrictions. ROSENTHAL works with a general Jordan curve. If we interpret the definition of angular point given by ROSENTHAL on p. 5, loc. cit. in the sense in which I understand from him it was intended, and apply it to the curve $y = f(x)$, where $f(x)$ is a *continuous* function, we obtain the corresponding case of the Theorem of § 5, supra.

[2] D. HILBERT, »Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen», vierte Mitteilung, 1906, Gött. Nachr. p. 168.

[3] H. LEBESGUE. Leçons sur l'Intégration, p. 72. See also § 5 of »On Derivates and the Theorem of the Mean», loc. cit.

of $f(x)$, and let P be the first point at which $f(x)$, being continuous, assumes the value p.

Let $k_1, k_2, \ldots k_n, \ldots$ be the values of $f(x)$ at the exceptional points at which at least one of the lower derivates is greater than the upper derivate on the other side. Also let k be any value in the completely open interval $(0, p)$, other than one of the exceptional values k_n. Then, since $f(x)$ is continuous, and $f(a) = 0$, $f(P) = p$, there is a point K at which $f(x)$ has the value k, and K is not one of the exceptional points. If $f(x) = k$ at more than one point of the interval (a, P), such points form a closed set, and we take the point K to be the nearest such point to P. Then in the completely open interval (K, P), $f(x)$ is never equal to k, but at P it is greater than k, therefore, throughout the completely open interval (K, P), $f(x)$ is greater than k. Thus, if x is the coordinate of K, and $x + h$ that of a point in (K, P),

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

and therefore

$$f_+(x) \geq 0 .$$

Since the point K is not one of the exceptional points, it follows that

$$f^-(x) \geq 0 ,$$

moreover, corresponding to each value of k, other than $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ we get such a point.

Similarly, working on the right, instead of on the left of the point P, we find a point at which

$$f^-(x) \leq 0 ,$$

which is not one of the exceptional points, so that here we have also

$$f_+(x) \leq 0 .$$

This proves the theorem.

§ 10.

Hence also, by the usual method of deducing the Theorem of the Mean from Rolle's Theorem, we have the following: —

Theorem. *If $f(x)$ is a continuous function, and*

$$m(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

then the points of the interval (a, b) at which both the upper derivates and one of the lower derivates are $\geq m(a, b)$ have the potency c, and so have the points at which both the lower derivates and one of the upper derivates are $\leq m(a, b)$.

From this we have the following corollary: —

Cor. *If $f(x)$ is continuous in the interval (a, b) without lines of invariability, there is an everywhere dense set of points of potency c at which both the upper derivates and one lower derivate are positive, (not zero), or both the lower derivates and one upper derivate are negative (not zero).*

§ 11.

Hence we have the following theorem: —

Theorem. *If, except at a countable set, we know of a function $f(x)$ that*

a) *the two upper derivates,*

or b) *the two lower derivates,*

or c) *the two right-hand derivates,*

or d) *the two left-hand derivates,*

never have the same sign, then $f(x)$, if continuous, is a constant.

The cases c) and d), when there is no exceptional set, are given in LEBESGUE's Leçons sur l'intégration (p. 72), and he deduces (p. 74) the theorem that a continuous[1] function is determined, to an additive constant près, when we know the finite value of one of its extreme[2] derivates for every finite value of the variable. The theorem, as above stated, gives us the shortest proof of a theorem of SCHEEFFER's, beginning as LEBESGUE's proof (loc. cit. p. 78) does, but ending after the third line, instead of requiring an additional sixteen lines. It is as follows: —

Theorem. *A continuous function $f(x)$ is determined, to anadditive constant près, if, except at the points of a countable set, we know that one of its extreme derivates is finite, and we have its value.*

In fact, if possible let there be two such functions $f(x)$ and $g(x)$, and let us write

$$F(x) = f(x) - g(x).$$

Then $F(x)$ has, on the side on which we know one of the extreme derivates of $f(x)$ and $g(x)$ to be equal, its extreme derivates never of the same sign, except perhaps at the points of the exceptional set. Thus, by the preceding theorem, $F(x)$ is a constant, which proves the theorem.

[1] This word has inadvertently apparently dropped out of the enunciation.

[2] That is an upper or lower left or right hand derivate.

Similarly from cases a) and b) of the theorem at the beginning of the present article, we have the following new theorem: —

Theorem. *If, except at a countable set at which we may be doubtful, we know of two continuous functions $f(x)$ and $g(x)$ that on one side the upper derivate of $f(x)$ is not greater than the lower derivate of $g(x)$, and, if equal, is not infinite, while on the other side one of the extreme derivates of $f(x)$ is, at each point, not less than the corresponding derivate of $g(x)$, and, if equal, is not infinite, then the two functions only differ by a constant.*

In symbols we have, taking the first known fact to refer to the left-side,

$$f^{-}(x) - g_{-}(x) \leq 0, \tag{1}$$

and, by the second known fact, at each point x either

$$f^{+}(x) - g^{+}(x) \geq 0, \tag{2}$$

or

$$f_{+}(x) - g_{+}(x) \geq 0. \tag{3}$$

Now, using familiar inequalities, and writing $F(x) = f(x) + h(x)$, where $h(x) = -g(x)$, we have

$$F^{-}(x) < f^{-}(x) + h^{-}(x) \leq f^{-}(x) - g_{-}(x),$$

so that, except at the doubtful points, by (1),

$$F^{-}(x) \leq 0, \tag{4}$$

while

$$F^{+}(x) \geq f^{+}(x) + h_{+}(x) \geq f^{+}(x) - g^{+}(x)$$

and also

$$F^{+}(x) \geq f_{+}(x) + h^{+}(x) \geq f_{+}(x) - g_{+}(x),$$

so that, by (2) and (3), we have, at each point not belonging to the doubtful set,

$$F^{+}(x) \geq 0. \tag{5}$$

By (4) and (5) $F(x)$ is a constant, using case a) of the theorem at the beginning of the present article. This porves the theorem.

This theorem seems to me worthy of notice; we had hitherto, as far as I am aware, no theorem except SCHEEFFER's Theorem, which enabled us to identify from a knowledge of their derivates two continuous functions of a perfectly general character, not necessarily of bounded variation, or even belonging to the more general classes of continuous functions which have recently been studied.

§ 12.

From the theorem of § 9 we have immediately certain theorems for the mean symmetric derivate, which were known to be true for the differential coefficient.

Theorem. *If $f(x)$ is a continuous function which is zero at a and at b, then the points at which the mean symmetric derivate $f'(x) \geq 0$ in (a, b) have the potency c, and the same is true of the points at which $f'(x) \leq 0$.*

Theorem. *If $f(x)$ is a continuous function, and*

$$m(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

then the points of the interval (a, b) at which the mean symmetric derivate $f'(x) \geq m(a, b)$ have the potency c, and so have the points at which $f'(x) \leq m(a, b)$.

Theorem. *If we know that, except possibly at a countable set the mean symmetric derivate $f'(x) = 0$, then $f(x)$, if continuous, is a constant.*

Theorem. *If two continuous functions have the same finite symmetric derivate except possibly at a countable set of points, then the two functions only differ by a constant.*

§ 13.

It has been already mentioned that, except at a countable set of points, the mean symmetric derivate is only infinite where the function possesses a differential coefficient which is infinite with determinate sign. Combining this fact with W. H. Young's extension of Lebesgue's theorem,[1] which states that, *if $f(x)$ denotes one of the derivates, extreme or intermediate, of a continuous function $F(x)$, and $f(x)$ is $+\infty$ at most at a countable set of points, then if, and only if, $f(x)$ is summable over the set of points S where it is positive, $F(x)$ is a function of bounded variation, and, in fact a lower semi-integral,[2] whose positive variation is $\int_S f(x)\,dx$,* we have the following theorem: —

If $F(x)$ is a continuous function, having at most at a countable set of points a differential coefficient which is $+\infty$, then if, and only if, the mean symmetric derivate $F'(x)$ is summable over the set of points S where it is positive, $F(x)$ is a

[1] »On Derivates and their Primitive Functions«, 1912, Proc. L. M. S.

[2] A lower semi-integral is the sum of a Lebesgue integral and a monotone decreasing function. See W. H. Young, »On Semi-integrals and Oscillating Successions of Functions«, 1910, Proc. L. M. S., (2), Vol. 9, p. 294.

function of bounded variation, and indeed a lower semi-integral, and its positive variation is $\int_S F'(x)\,dx$.

A similar theorem holds changing $+\infty$ into $-\infty$ and positive into negative. Combining these we have the following:

If $F(x)$ is a continuous function, having at most at a countable set of points a differential coefficient which is infinite with determinate sign, then if, and only if, the mean symmetric derivate $F'(x)$ is summable, $F(x)$ is the Lebesgue integral of any one of its derivates.

Hence: —

If $F(x)$ is a continuous function of bounded variation, but not a Lebesgue integral, it has a differential coefficient which is infinite with determinate sign at a more than countable set of points.

§ 14.

The exceptional set which has furnished the keynote of the present paper, has not been shown to have any particularities beyond that of being countable. That the set may be any countable set whatever is evident by the principle of the Condensation of Singularities. If we consider the class of functions for which the exceptional set is dense nowhere, we can give further results. Thus, for instance, it follows from the Theorem of the Mean for Derivates[1] that, *if (a, b) is an interval free of points of the exceptional set, there is a point x in the completely open interval (a, b) at which there is one and only one symmetric derivate, and its value is $m(a, b) = \{f(b) - f(a)\}/(b - a)$; the function $f(x)$ is here of course*

[1] The theorem states that »*if $f(x)$ is continuous throughout the closed interval (a, b), and the incrementary ratio $m(a, b)$ is finite, then there is a point x, $(a < x < b)$, at which one of the upper derivates is not greater than $m(a, b)$ while the other lower derivate is not less than $m(a, b)$, that is*

$$f^{+}(x) \leq m(a, b) \leq f_{-}(x),$$

or

$$f^{-}(x) \leq m(a, b) \leq f_{+}(x).«$$

See »On Derivates and the Theorem of the Mean», loc. cit., p. 10.

The proof of this theorem only depends on the continuity of $f(x)$ in so far that $f(x)$ and $f(x) - x \cdot m(a, b)$ have to be such functions of x that they assume all values between their upper and lower bounds. Hence it follows that the result stated in the text for continuous functions holds for functions of a more general nature. In particular it follows that *if $f(x)$ is a finite differential coefficient throughout (a, b), and the exceptional countable set is absent, there is a point of the completely open interval (a, b) at which one and only one symmetric derivate of $f(x)$ exists and it is equal to $m(a, b)$.*

supposed to be continuous. Hence the usual properties of the differential coefficient of a continuous function, deduced from the Theorem of the Mean, may be carried over to the mean symmetric derivate in such an interval. In particular the mean symmetric derivate will be one of the limits of its values on the right and on the left.

§ 15.

I have only to add that, in the present paper, I have not considered functions other than general ones and continuous ones. But corresponding results hold to those given in W. H. Young's paper on «Term-by-term integration of Oscillating Series».[1] Thus, for instance we have the following theorem: —

Theorem. *If $f(x)$ is upper semi-continuous on the right, and lower semi-continuous on the left, throughout the interval (a, b), and is zero at the end-points, then the points at which both the upper derivates and one of the lower derivates are ≥ 0, have the potency c.*

[1] loc. cit., pp. 104—107.

SOME PROBLEMS OF DIOPHANTINE APPROXIMATION.

By

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD,

TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

I.

The fractional part of $n^k\theta$.

1.0 — Introduction.

1.00. Let us denote by $[x]$ and (x) the integral and fractional parts of x, so that

$$(x) = x - [x], \qquad 0 \leq (x) < 1.$$

Let θ be an irrational number, and α any number such that $0 \leq \alpha < 1$. Then it is well known that it is possible to find a sequence of positive integers $n_1, n_2, n_3, \cdots$ such that

$$(1.001) \qquad (n_r\theta) \to \alpha$$

as $r \to \infty$.

It is necessary to insert a few words of explanation as to the meaning to be attributed to relations such as (1.001), here and elsewhere in the paper, in the particular case in which $\alpha = 0$. The formula (1.001), when $\alpha > 0$, asserts that, given any positive number ε, we can find r_0 so that

$$-\varepsilon < (n_r\theta) - \alpha < \varepsilon \qquad (r > r_0).$$

The points $(n_r\theta)$ may lie *on either side of* α. But $(n_r\theta)$ is never negative, and so, in the particular case in which $\alpha = 0$, the formula, if interpreted in the obvious manner, asserts *more* than this, viz. that

$$0 \leq (n_r\theta) < \varepsilon \qquad (r > r_0).$$

The obvious interpretation therefore gives rise to a distinction between the value $\alpha = 0$ and other values of α which would be exceedingly inconvenient in our subsequent analysis.

These difficulties may be avoided by agreeing that, when $\alpha = 0$, the formula (1.001) is to be interpreted as meaning '*the set of points* $(n_r\theta)$ *has, as its sole limiting point or points, one or both of the points 1 and 0*', that is to say as impying that, for any r greater than r_0, *one or other* of the inequalities

$$0 \leq (n_r\theta) < \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < (n_r\theta) < 1$$

is satisfied. In the particular case alluded to above, this question of interpretation happens to be of no importance: our assertion is true on either interpretation. But in some of our later theorems the distinction is of vital importance.

Now let $f(n)$ denote a positive increasing function of n, integral when n is integral, such as

$$n, n^2, n^3, \cdots 2^n, 3^n, \cdots, n!, 2^{n^2}, \cdots 2^{2^n}, \cdots.$$

The result stated at the beginning suggests the following question, which seems to be of considerable interest: — *For what forms of* $f(n)$ *is it true that, for any irrational* θ, *and any value of* α *such that* $0 \leq \alpha < 1$, *a sequence* (n_r) *can be found such that*

$$(f(n_r)\theta) \to \alpha\,? \tag{1.002}$$

It is easy to see that when the increase of $f(n)$ is sufficiently rapid the result suggested will not always be true. Thus if $f(n) = 2^n$ and θ is a number which, expressed in the binary scale, shows at least k 0's following upon every 1, it is plain that

$$(2^n\theta) < \frac{1}{2} + \lambda_k,$$

when λ_k is a number which can be made as small as we please by increasing k sufficiently. There is thus an »excluded interval» of values of α, the length of which can be made as near to $\frac{1}{2}$ as we please. If $f(n) = 3^n$ we can obtain an excluded interval whose length is as near to $\frac{2}{3}$ as we please, and so on; while if $f(n) = n!$ it is (as is well known) possible to choose θ so that $(n!\theta)$ tends to a unique limit. Thus $(n!e) \to 0$.

At the end of the paper we shall return to the general problem. The immediate object with which this paper was begun, however, was to determine whe-

ther the relation (1.002) always holds (if θ is irrational) when $f(n)$ is a power of n, and we shall be for the most part concerned with this special form of $f(n)$.

1.01. The following generalisation of the theorem expressed by (1.001) was first proved by KRONECKER.[1]

Theorem 1.01. *If $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m$ are linearly independent irrationals (i. e. if no relation of the type*

$$a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \cdots + a_m\theta_m + a_{m+1} = 0,$$

where $a_1, a_2, \cdots a_{m+1}$ are integers, not all zero, holds between $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m$), and α_1, $\alpha_2, \cdots \alpha_m$ are numbers such that $0 \leq \alpha_p < 1$, then a sequence (n_r) can be found such that

$$(n_r\theta_1) \to \alpha_1,\ (n_r\theta_2) \to \alpha_2,\ \cdots,\ (n_r\theta_m) \to \alpha_m,$$

as $r \to \infty$. Further, in the special case when all the α's are zero, it is unnecessary to make any restrictive hypothesis concerning the θ's, or even to suppose them irrational.

This theorem at once suggests that the solution of the problem stated at the end of 1.00 may be generalised as follows.

Theorem 1.011. *If $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m$ are linearly independent irrationals, and the α's are any numbers such that $0 \leq \alpha < 1$, then a sequence (n_r) can be found such that*

$$(1.011)\qquad \begin{cases} (n_r\theta_1) \to \alpha_{11},\ (n_r\theta_2) \to \alpha_{12},\ \cdots,\ (n_r\theta_m) \to \alpha_{1m}; \\ (n_r^2\theta_1) \to \alpha_{21},\ (n_r^2\theta_2) \to \alpha_{22},\ \cdots,\ (n_r^2\theta_m) \to \alpha_{2m}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n_r^k\theta_1) \to \alpha_{k1},\ (n_r^k\theta_3) \to \alpha_{k2},\ \cdots,\ (n_r^k\theta_m) \to \alpha_{km}. \end{cases}$$

[1] KRONECKER, *Berliner Sitzungsberichte*, 11 Dec. 1884; *Werke*, vol. 3, p. 49.

A number of special cases of the theorem were known before. That in which all the α's are zero was given by DIRICHLET (*Berliner Sitzungsberichte*, 14 April 1842, *Werke*, vol. 1. p. 635). Who first stated explicitly the special theorems in which $m = 1$ we have been unable to discover. DIRICHLET (l. c.) refers to the simplest as »längst bekannt»: it is of course an immediate consequence of the elementary theory of simple continued fractions. See also MINKOWSKI, »*Diophantische Approximation*», pp. 2, 7. KRONECKER's general theorem has been rediscovered independently by several writers. See *e. g.* BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 135; F. RIESZ, *Comptes Rendus*, 29 Aug. 1901. Some of the ideas of which we make most use are very similar to those of the latter paper. It should be added that DIRICHLET's and KRONECKER's theorems are presented by them merely as particular cases of more general theorems, which however represent extensions of the theory in a direction different from that with which we are concerned.

A number of very beautiful applications of KRONECKER's theorem to the theory of the RIEMANN ζ-function have been made by H. BOHR.

Further, if the α's are all zero, it is unnecessary to suppose the θ's restricted in any way.

1.02. This theorem is the principal result of the paper: it is proved in section 1.2. The remainder of the paper falls into three parts. The first of these (section 1.1) consists of a discussion and proof of KRONECKER's theorem. We have thought it worth while to devote some space to this for two reasons. In the first place our proof of theorem **1.011** proceeds by induction from k to $k+1$, and it seems desirable for the sake of completeness to give some account of the methods by which the theorem is established in the case $k=1$. In the second place the theorem for this case possesses an interest and importance sufficient to justify any attempt to throw new light upon it; and the ideas involved in the various proofs which we shall discuss are such as are important in the further developments of the theory. We believe, moreover, that the proof we give is considerably simpler than any hitherto published.

The second of the remaining parts of the paper (section 1.3) is devoted to the question of the *rapidity* with which the numbers $(n^{\kappa}\theta_p)$ in the scheme (1.011) tend to their respective limits. Our discussion of the problems of this section is very tentative, and the results very incomplete;[1] and something of the same kind may be felt about the paper as a whole. We have not solved the problems which we attack in this paper with anything like the definiteness with which we solve those to which our second paper is devoted. The fact is, however, that the first paper deals with questions which, in spite of their more elementary appearance, are in reality far more difficult than those of the second. Finally, the last section (1.4) contains some results the investigation of which was suggested to us by an interesting theorem proved by F. BERNSTEIN.[2] The distinguishing features of these results are that they are concerned with a single irrational θ and with sequences which are not of the form $(n^k\theta)$, and that they hold for *almost all* values of θ, *i. e.* for all values except those which belong to an exceptional and unspecified set of measure zero.

1.1 — Kronecker's Theorem.

1.10. KRONECKER's theorem falls naturally into two cases, according as to whether or not all the α's are zero. We begin by considering the simpler case,

[1] Some of the results that we do obtain, however, are important from the point of view of applications to the theory of the series $\Sigma\, e^{n^k\theta i}$ and that of the RIEMANN ζ-function. It was in part the possibility of these applications that led us to the researches whose results are given in the present paper. The applications themselves will, we hope, be given in a later paper.

[2] *Math. Annalen*, vol. 71, p. 421.

when all the α's are zero. Unlike most of the theorems with which we are concerned, this is not proved by induction, and there is practically no difference between the cases of one and of several variables. The proof given is DIRICHLET'S.

Let $\bar{x}$ denote the number which differs from x by an integer and which is such that $-\frac{1}{2} < \bar{x} \leq \frac{1}{2}$. Then the theorem to be proved is equivalent to the theorem that, given any integers q and N, we can find an n not less than N and such that

$$|\overline{n\theta_1}| \leq 1/q,\ |\overline{n\theta_2}| \leq 1/q,\ \cdots,\ |\overline{n\theta_m}| \leq 1/q.$$

Let us first suppose that $N = 1$. Let R be the region in m-dimensional space for which each coordinate ranges from 0 to 1. Let the range of each coordinate be divided into q equal parts: R is then divided into q^m parts. Consider now the $q^m + 1$ points

$$(\nu\theta_1),\ (\nu\theta_2),\ \cdots,\ (\nu\theta_m);\ (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots q^m).$$

There must be one part of R which contains two points; let the corresponding values of ν be ν_1 and ν_2. Then clearly

$$|\overline{(\nu_1 - \nu_2)\theta_1}| \leq 1/q,\ |\overline{(\nu_1 - \nu_2)\theta_2}| \leq 1/q,\ \cdots,|\overline{(\nu_1 - \nu_2)\theta_m}| \leq 1/q,$$

and

$$|\nu_1 - \nu_2| \geq 1.$$

We have therefor only to take $n = |\nu_1 - \nu_2|$. We observe that we have also

$$n \leq q^m,$$

a result to which we shall have occasion to return in section 1.3.

If $N > 1$ we have only to consider the points $(\nu N\theta_1), (\nu N\theta_2), \cdots$ instead of the points $(\nu\theta_1), (\nu\theta_2), \cdots$.

1.11. We turn now to the case when the α's are not all necessarily zero. In this case the necessity of the hypothesis that the θ's are linearly independent is obvious, for the existence of a linear relation between the θ's would plainly involve that of a corresponding relation between the α's; naturally, also, the added restriction makes the theorem much more difficult than the one just proved.

Our proof proceeds by induction from m to $m + 1$; it is therefore important to discuss the case $m = 1$. The result for this case may be proved in a variety of ways, of which we select four which seem to us to be worthy of separate dis-

cussion. These proofs are all simple, and each has special advantages of its own. It is important for us to consider very carefully the ideas involved in them with a view to selecting those which lend themselves most readily to generalisation. For example, it is essential that our proof should make no appeal to the theory of continued fractions.

(a). The first proof is due to KRONECKER. It follows from the result of 1.10, with $m = 1$, or from the theory of continued fractions, that we can find an arbitrarily large q such that

$$\theta = \frac{p}{q} + \frac{\delta}{q^2},$$

and so

$$q\theta - p = \delta/q, \tag{1.111}$$

where

$$|\delta| < 1.$$

It is possible to express any integer, and in particular the integer $\{q\alpha\}$ nearest to $q\alpha$, in the form

$$q n_1 + p n$$

where n and n_1 are integers, and $|n| \leq q/2$. From the two equations

$$q\theta - p = \delta/q, \; q n_1 + p n = \{q\alpha\}$$

we obtain

$$q(n\theta + n_1) = \frac{n\delta}{q} + q\alpha + \frac{1}{2}\delta_1, \qquad |\delta_1| < 1,$$

and so

$$-1 < q(n\theta + n_1 - \alpha) < 1,$$

or

$$|(n\theta) - \alpha| < 1/q.$$

If we write $\nu = n + q$ and use (1.111), we see that

$$|(\nu\theta) - \alpha| < 2/q, \qquad q/2 < \nu < 3q/2;$$

so that

$$|(\nu\theta) - \alpha| < 3/\nu$$

for some value of ν between $q/2$ and $3q/2$. This evidently establishes the truth of the theorem.

If we attempt to extend this proof to the case of several variables we find nothing to correspond to the equation

$$\{q\alpha\} = q n_1 + p n.$$

But KRONECKER's proof has, as against the proofs we shall now discuss, the very important advantage of furnishing a definite result as to the order of the approximation, a point to which we shall return in 1.3.

(*b*). Let ε be an arbitrary positive constant. By the result of 1.10, we can find an n such that $0 < \theta_1 < \varepsilon$ or $1 - \varepsilon < \theta_1 < 1$, where $\theta_1 = (n\theta)$. Since θ is irrational, θ_1 is not zero. Let us suppose that $0 < \theta_1 < \varepsilon$; the argument is substantially the same in the other case. We can find an m such that

$$m\theta_1 \leq \alpha < (m+1)\theta_1,$$

$$|m\theta_1 - \alpha| < \theta_1;$$

and so

$$|(nm\theta) - \alpha| < \varepsilon,$$

which proves the theorem.

(*c*).[1] Let S denote the set of points $(n\theta)$. S', its first derived set, is closed. It is moreover plain that, if α is not a point of S', then neither is $(\alpha + n\theta)$ nor $(\alpha - n\theta)$.

The theorem to be proved is clearly equivalent to the theorem that S' consists of the continuum $(0,1)$. Suppose that this last theorem is false. Then there is a point α which is not a point of S', and therefore an interval containing α and containing[2] no point of S'. Consider I, the greatest possible such interval containing α.[3] The interval obtained by translating I through a distance θ, any number of times in either direction,[4] must, by what was said above, also contain no point of S'. But the interval thus obtained cannot overlap with I, for then I would not be the »greatest possible» interval of its kind.

[1] This proof was discovered independently by F. RIESZ, but, so far as we know, has not been published.

[2] In its interior, in the strict sense.

[3] The existence of such a »greatest possible» interval is easily established by the classical argument of DEDEKIND.

[4] Taking the congruent interval in $(0, 1)$. This interval may possibly consist of two separate portions $(0, \xi_1)$, and $(\xi_2, 1)$.

Hence, if we consider a series of $[1/\delta]$ translations, where δ is the length of I, it is clear that two of the corresponding $[1/\delta]+1$ intervals must coincide. Clearly this can only happen if θ is rational, which is contrary to our hypothesis.

(*d*). We argue as before that, if the theorem is false, there is an interval I, of length 2ε and middle point α, containing no point of S'. By the result of 1.10 we can find n so that, if $\theta_1 = (n\theta)$, then $0 < \theta_1 < \varepsilon$ or $1-\varepsilon < \theta_1 < 1$.

By the reasoning used in (*c*) it appears that the interval obtained by translating I through a distance θ_1, any number of times in either direction, must contain no point of S'. But since each new interval overlaps with the preceding one it is clear that after a certain number of translations we shall have covered the whole interval 0 to 1 by intervals containing no point of S', and shall thus have arrived at a contradiction.

1.12. Let us compare the three last proofs. It is clear that (*b*) is considerably the simplest, and that (*d*) appears to contain the essential idea of (*b*) together with added difficulties of its own. It appears also that, in point of simplicity, there is not very much to choose between (*c*) and (*d*), and that (*c*) has a theoretical advantage over (*d*) in that it dispenses the assumption of the theorem for the case $\alpha = 0$, an assumption which is made not only in (*b*) and (*d*), but also in (*a*). When, however, we consider the theorem for several variables, it seems that (*b*) does not lend itself to direct extension at all, that the complexity of the region corresponding to I in (*c*) leads to serious difficulties, and that (*d*) provides the simplest line of argument. It is accordingly this line of argument which we shall follow in our discussion of the general case of KRONECKER's theorem.

1.13. We pass now to the general case of KRONECKER's theorem. We shall give a proof by induction. For the sake of simplicity of exposition we shall deduce the theorems for three independent irrationals θ, φ, ψ, from that for two. It will be obvious that the same proof gives the general induction from n to $n+1$ irrationals.

We wish to show that if we form the set S of points within the cube $0 \leq x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$, which are congruent with

$$(\theta, \varphi, \psi),\ (2\theta, 2\varphi, 2\psi), \cdots\cdots (n\theta, n\varphi, n\psi), \cdots$$

then every point of the cube is a point of the first derived set S'. It is plain that, if (α, β, γ) is not a point of S, then neither is $((\alpha+n\theta), (\beta+n\varphi), (\gamma+n\psi))$ nor $((\alpha-n\theta), (\beta-n\varphi), (\gamma-n\psi))$. If now our theorem is not true, there must exist a sphere, of centre (α, β, γ) and radius ϱ, which contains[1] no point of S'. By

[1] Within or upon the boundary.

the result of 1.10, there is an n such that the distance δ of $((n\theta), (n\varphi), (n\psi))$ or $(\theta_1, \varphi_1, \psi_1)$ from one of the vertices of the cube is less than $\varrho/\sqrt{2}$. Let us suppose, for example, that the vertex in question is the point (0, 0, 0). Consider the straight line

$$(1.131) \qquad \frac{x-\alpha}{\theta_1}=\frac{y-\beta}{\varphi_1}=\frac{z-\gamma}{\psi_1},$$

and the infinite cylinder of radius δ with this line as axis. It is clear that the finite cylinder C obtained by taking a length δ on either side of (α, β, γ) is entirely contained in the sphere and therefore contains no point of S'. Hence the cylinder obtained by translating C through $(\theta_1, \varphi_1, \psi_1)$, any number of times in either direction, also contains no point of S', so that, since each new position of C overlaps with the preceding, the whole of the infinite cylinder, or rather of the congruent portions of the cube, is free from points of S'.

Let us now consider the intersections of the totality of straight lines in the cube, which are congruent with portions of the axis of the cylinder, with an arbitrary plane $x=x_0$. We shall show that they are everywhere dense in the square in which the plane cuts the cube, whence clearly follows that no point of the cube is a point of S', and so a contradiction which establishes the theorem.

The intersections (y, z) are congruent with the intersections of the axis (1.131) with

$$x=x_0+\nu, \quad (\nu=\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots),$$

and so they are the points congruent with

$$\beta+\frac{(x_0-\alpha)\varphi_1}{\theta_1}+\frac{\nu\varphi_1}{\theta_1}, \quad \gamma+\frac{(x_0-\alpha)\psi_1}{\theta_1}+\frac{\nu\psi_1}{\theta_1}.$$

But, under our hypothesis, φ_1/θ_1 and ψ_1/θ_1 are linearly independent irrationals, and so, by the theorem for two irrationals, this set of points is everywhere dense in the square. The proof is thus completed.

1.14. We add two further remarks on the subject of KRONECKER's theorem, in which, for the sake of simplicity of statement, we confine ourselves to the case of two linearly independent irrationals θ, φ.

(a) Suppose that $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. KRONECKER's theorem asserts the existence of a sequence (n_s) such that $(n_s\theta)\to\alpha$, $(n_s\varphi)\to\beta$. Let us choose a sequence of points

$$(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad (\mu=1, 2, 3, \cdots),$$

such that

$$\alpha_\mu > \alpha, \ \beta_\mu > \beta, \quad \alpha_\mu \rightarrow \alpha, \ \beta_\mu \rightarrow \beta.$$

There is, for any value of μ, a sequence $(n_{s\mu})$ such that

$$(n_{s\mu}\theta) \rightarrow \alpha_\mu, \ (n_{s\mu}\varphi) \rightarrow \beta_\mu,$$

as $s \rightarrow \infty$. From this it is easy to deduce the existence of a sequence (n_r) for which $(n_r\theta)$ and $(n_r\varphi)$ tend to the limits α and β and are always greater than those limits, so that the direction of approach to the limit is in each case from the right hand side.[1] Similarly, of course, we can establish the existence of a sequence giving, for either θ or φ, either a right-handed or a left-handed approach to the limit.

If we apply similar reasoning to the case in which α or β or both are zero we see that, when θ and φ are linearly independent irrationals, we may abandon the convention with respect to the particular value 0 which was adopted in 1 . 00, and assert that there is a sequence for which $(n\theta) \rightarrow \alpha$ and $(n\varphi) \rightarrow \beta$, α and β having any values between 0 and 1, both values included, and the formulae having the ordinary interpretation. This result is to be carefully distinguished from that of 1 . 10. The latter is, the former is *not*, true without restriction on the θ's, as may be seen at once by considering the case in which $\varphi = -\theta$.

(b). It is easy to deduce from Kronecker's theorem a further theorem, which may be stated as follows:[2] *if we take any portion γ of the square* $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, *bounded by a finite number of regular curves, and of area δ; and if we denote by $N_\gamma(n)$ the number of the points*

$$((\nu\theta), \ (\nu\varphi)), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

which fall inside γ; then

$$N_\gamma(n) \sim \delta n$$

as $n \rightarrow \infty$.

This result, when compared with the various theorems of this paper, suggests a whole series of further theorems. The proofs of these appear likely to be very difficult, and we have, up to the present, considered only the case of a single irrational θ. We have proved that, if $N_\gamma(n)$ denotes the number of the points

$$(\nu^\varkappa \theta), \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n),$$

[1] The reasoning by which this is established is essentially the same as that of 1 . 20.

[2] This is a known theorem. For a proof and references see the tract 'The Riemann Zeta-function and the Theory of Prime Numbers', by H. Bohr and J. E. Littlewood, shortly to be published in the *Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics*.

which fall inside a segment γ of (0, 1), of length δ, then $N_\gamma(n) \backsim \delta n$. This result may be compared with that of Theorem **1 . 483** at the end of the paper. But results of this character will find a more natural place among our later investigations than among those of which we are now giving an account.

1.2. — The generalisation of Kronecker's theorem.

1.20. We proceed now to the proof of theorem **1 . 011**. Our argument is based on the following general principle, which results from the work of Pringsheim and London on double sequences and series.[1]

1 . 20. *If*

$$\lim_{r_1 \to \infty} \lim_{r_2 \to \infty} \cdots \lim_{r_k \to \infty} f_p(r_1, r_2, \cdots r_k) = A_p, \ (p = 1, 2, \cdots m),$$

then we can find a sequence of sets $(r_{1n}, r_{2n}, \cdots r_{kn})$ *such that, as* $n \to \infty$,

$$r_{qn} \to \infty, \ (q = 1, 2, \cdots k),$$

and

$$f_p(r_{1n}, r_{2n}, \cdots r_{kn}) \to A_p, \ (p = 1, 2, \cdots m).$$

We shall show that, if this principle is true for all values of m and a particular k, then it is true for $k + 1$. As it is plainly true for $k = 1$, we shall thus have proved it generally.

We shall abbreviate '$\lim\limits_{r_1 \to \infty} \lim\limits_{r_2 \to \infty} \cdots \lim\limits_{r_k \to \infty}$' into '$\lim\limits_{r_1, r_2, \cdots r_k}$', or, when there is no danger of confusion, into 'lim'.

Let

$$\lim_{r_1, r_2, \cdots r_k} f_p(r_1, r_2, \cdots r_{k+1}) = f_p(r_{k+1}).$$

Then by hypothesis

$$f_p(r_{k+1}) \to A_p$$

as $r_{k+1} \to \infty$. Let us choose an integer $r_{k+1,n}$, greater than 2^n, for which

$$|f_p(r_{k+1,n}) - A_p| < 2^{-n-1}, \quad (p = 1, 2, \cdots m).$$

By the principle for k variables, we can find $r_{1n}, r_{2n}, \cdots r_{kn}$, all greater than 2^n, and such that

[1] Pringsheim, *Münchener Sitzungsberichte*, vol. 27, p. 101, and *Math. Annalen*, vol. 53, p. 289; London, *Math. Annalen*, vol. 53, p. 322.

$$|f_p(r_{1n}, r_{2n}, \cdots r_{kn}, r_{k+1,n}) - f_p(r_{k+1,n})| < 2^{-n-1}, \ (p = 1, 2, \cdots m).$$

We thus obtain a sequence of sets $(r_{1n}, r_{2n}, \cdots r_{k+1,n})$, such that every member of the n^{th} set is greater than 2^n and

$$|f_p(r_{1n}, r_{2n}, \cdots r_{k+1,n}) - A_p| < 2^{-n}, \ (p = 1, 2, \cdots m).$$

This sequence evidently gives us what we want.

An important special case of the principle is the following:

1.201. *If for all values of t we can find a sequence $n_{1t}, n_{2t}, \cdots, n_{rt}, \cdots$ such that*

$$f_p(n_{rt}) \to A_{pt}, \quad (p = 1, 2, \cdots m),$$

as $r \to \infty$, and if

$$A_{pt} \to A_p, \quad (p = 1, 2, \cdots m),$$

as $t \to \infty$, then there is a sequence (n_s) such that

$$f_p(n_s) \to A_p, \quad (p = 1, 2, \cdots m),$$

as $s \to \infty$.

This is in reality merely a case of the principle that a limiting-point of limiting-points is a limiting-point.

1.21. We consider first the case in which all the α's are zero, and the θ's are unrestricted. In this case the proof is comparatively simple.

Theorem 1.21. *There is a sequence (n_r) such that, as $r \to \infty$*

$$(n_r^\varkappa \theta_p) \to 0, \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots k; \ p = 1, 2, \cdots m).$$

We prove this theorem by induction from k to $k+1$: we have seen that it is true when $k = 1$. We suppose then that there is a sequence (μ_s) such that

$$(1.211) \qquad (\mu_s^\varkappa \theta_p) \to 0, \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots k; \ p = 1, 2, \cdots m).$$

The sequence

$$(\mu_s^{k+1} \theta_1), \ (\mu_s^{k+1} \theta_2), \cdots (\mu_s^{k+1} \theta_m), \qquad (s = 1, 2, \cdots),$$

has at least one limiting point $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$; hence, by restricting ourselves to a subsequence selected from the sequence (μ_s), we can obtain a sequence (ν_s) such that, as $s \to \infty$,

$$(\nu_s^\varkappa \theta_p) \to 0, \ (\varkappa \leq k); \ (\nu_s^{k+1} \theta_p) \to \varphi_p; \ (p = 1, 2, \cdots m).$$

We then have, for $\varkappa \leq k+1$,

$$\lim_{s_1, s_2, \cdots s_\lambda} ((\nu_{s_1} + \nu_{s_2} + \cdots + \nu_{s_\lambda})^\varkappa \theta_p) = \sum_{q=1}^{\lambda} \lim (\nu_{s_q}^\varkappa \theta_p) + \sum C \lim (\nu_{s_1}^{\varkappa_1} \nu_{s_2}^{\varkappa_2} \cdots \nu_{s_\lambda}^{\varkappa_\lambda} \theta_p),$$

where the C's are constants, $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\lambda = \varkappa$, and $\varkappa_q \leq k$. In virtue of (1.211) we can evaluate at once every repeated limit on the right hand side, and it is clear that we obtain $\lambda\varphi_p$ or 0 according as $\varkappa = k+1$ or $\varkappa \leq k$. It follows from the general principle **1.20** that we can find a sequence $(n_{r\lambda})$, $(r = 1, 2, \cdots)$, such that, as $r \to \infty$,

$$(n_{r\lambda}^\varkappa \theta_p) \to 0,\ (\varkappa \leq k);\ \ (n_{r\lambda}^{k+1} \theta_p) \to \lambda\varphi_p;\ \ (p = 1, 2, \cdots m).$$

But, by theorem **1.01**, we can find a sequence (λ_s) such that

$$(\lambda_s \varphi_p) \to 0, \quad (p = 1, 2, \cdots m);$$

and we have only to apply the principle **1.201** to obtain the theorem for $k+1$.

1.22. We pass now to the general case when the α's are not all zero. We have to prove that *if $\theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m$ are linearly independent irrationals, there is a sequence (n_r) such that, as $r \to \infty$,*

$$(n_r^\varkappa \theta_p) \to \alpha_{\varkappa p},\ (\varkappa = 1, 2, \cdots k;\ p = 1, 2, \cdots m).$$

We shall prove this by an induction from k to $k+1$ which proceeds by two steps.

(i). We assume the existence, for a particular k, any number m of θ's, and any corresponding system of α's, of a sequence giving the scheme of limits

$$\begin{array}{c|ccccc} & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \cdots & \theta_m \\ \hline n & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1m} \\ n^2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \\ n^k & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \cdots & \cdots & \alpha_{km} \end{array};$$

and we prove the existence, for any number m of θ's, and any corresponding system of α's, of a sequence giving the scheme

$$\begin{array}{c|cccccc} & \theta_1 & \theta_2 & . & . & . & . & \theta_m \\ \hline n & \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & . & \alpha_{1m} \\ n^2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & . & \alpha_{2m} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ n^k & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & . & . & . & . & \alpha_{km} \\ n^{k+1} & 0 & 0 & . & . & . & . & 0\,. \end{array}$$

It will be understood that neither m, nor the θ's, nor the α's are necessarily the same in these two schemes, all of them being arbitrary.

(ii). We then show that we can pass from the last written scheme of limits to the general scheme in which the elements of the last row also are arbitrary.

1.23. *Proof of the first step.* To fix our ideas we shall show that we can pass from a sequence (n_r) giving[1]

$$n_r\theta \to \alpha_1,\ n_r\varphi \to \beta_1,\ n_r\psi \to \gamma_1,\ n_r\chi \to \delta_1,\ n_r\omega \to \eta_1,\ n_r\tau \to \zeta_1,$$

$$n_r^2\theta \to \alpha_2,\ n_r^2\varphi \to \beta_2,\ n_r^2\psi \to \gamma_2,\ n_r^2\chi \to \delta_2,\ n_r^2\omega \to \eta_2,\ n_r^2\tau \to \zeta_2,$$

to a sequence (m_r) giving

$$m_r\theta \to \alpha_1,\ m_r\varphi \to \beta_1,$$

$$m_r^2\theta \to \alpha_2,\ m_r^2\varphi \to \beta_2,$$

$$m_r^3\theta \to 0,\ \ m_r^3\varphi \to 0.$$

It will be clear that the argument is in reality of a perfectly general type.

Suppose we are given $\alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2$, and that $\theta, \varphi, \alpha'_1, \alpha'_2, \beta'_1, \beta'_2$, are linearly independent irrationals. Then by hypothesis we can find a sequence giving the scheme

$$n_r\theta \to \alpha'_1,\ n_r\varphi \to \beta'_1,\ n_r\alpha'_1 \to 0,\ n_r\beta'_1 \to 0,\ n_r\alpha'_2 \to 0,\ n_r\beta'_2 \to 0,$$

$$n_r^2\theta \to \alpha'_2,\ n_r^2\varphi \to \beta'_2,\ n_r^2\alpha'_1 \to 0,\ n_r^2\beta'_1 \to 0.$$

Further, the set of points $(n_r^3\theta, n_r^3\varphi)$ has at least one limiting-point (λ, μ), and, by restricting ourselves to a subsequence of (n_r), we may suppose that we have also

$$n_r^3\theta \to \lambda,\ n_r^3\varphi \to \mu.$$

[1] In what follows we shall omit the brackets in $(n\theta), \ldots$; it is of course to be understood that integers are to be ignored.

We express all this by saying that we can find a sequence (n_r) giving the scheme

$$(1.221)\qquad \begin{cases} \alpha'_1,\ \beta'_1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \\ \alpha'_2,\ \beta'_2,\ 0,\ 0, \\ \lambda,\ \ \mu. \end{cases}$$

The sequence (k_r), where $k_r = 2n_r$, gives us the scheme

$$(1.222)\qquad \begin{cases} 2\alpha'_1,\ 2\beta'_1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \\ 4\alpha'_2,\ 4\beta'_2,\ 0,\ 0, \\ 8\lambda,\ \ 8\mu. \end{cases}$$

By the general principle **1.20**, we can find a sequence (l_r) giving the scheme

$$\begin{cases} \lim\,(n_{r_1}+n_{r_2}+\cdots+n_{r_8})\,\theta, & \lim\,(n_{r_1}+n_{r_2}+\cdots+n_{r_8})\,\varphi, & \ldots. \\ \lim\,(n_{r_1}+n_{r_2}+\cdots+n_{r_8})^2\,\theta, & \ldots. & \ldots.. \\ \lim\,(n_{r_1}+n_{r_2}+\cdots+n_{r_8})^3\,\theta, & \ldots. & , \end{cases}$$

where 'lim' stands for $\lim\limits_{r_1,\,r_2,\,\ldots\,r_8}$.

Consider the repeated limit

$$\lim_{r_1,\,r_2,\,\ldots\,r_8} (n_{r_1}+n_{r_2}+\cdots+n_{r_8})^3\,\theta,$$

which is easily evaluated with the aid of the table (1.221). The limit of a term $n_{r_i}^3\theta$ is λ: that of a 'cross-term'

$$n_{r_i}^a n_{r_j}^b n_{r_k}^c\,\theta \quad (a+b+c=3;\ a,\,b,\,c<3;\ i<j<k)$$

is zero, since $n_{r_k}^c\theta$ tends to an α' or a β', and $n_{r_j}^b\alpha'$ and $n_{r_j}^b\beta'$ tend to zero. Thus we obtain the repeated limit 8λ. In all the other repeated limits the cross-terms give zero in the same way, and we see that the sequence (l_r) gives the scheme

$$\begin{array}{l} 8\alpha'_1,\ 8\beta'_1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \\ 8\alpha'_2,\ 8\beta'_2,\ 0,\ 0, \\ 8\lambda\ \ ,\ 8\mu. \end{array}$$

Consider now the repeated limits

$$\lim_{r, r_1, \cdots r_m} (l_r + k_{r_1} + k_{r_2} + \cdots + k_{r_m})^{\varkappa} \chi$$

where

$$\chi = \theta, \varphi, \alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2; \ \varkappa = 1, 2, 3.$$

All the cross-terms contribute zero as before, and we obtain the scheme

$$\begin{array}{l} (8 + 2m)\alpha'_1, \ (8 + 2m)\beta'_1, \ 0, 0, 0, 0, \\ (8 + 4m)\alpha'_2, \ (8 + 4m)\beta'_2, \ 0, 0, \\ (8 + 8m)\lambda \ , \ (8 + 8m)\mu, \end{array}$$

or

$$\begin{array}{l} 6\alpha'_1 + (m+1)2\alpha'_1, \ 6\beta'_1 + (m+1)2\beta'_1, \ 0, 0, 0, 0, \\ 4\alpha'_2 + (m+1)4\alpha'_2, \ 4\beta'_2 + (m+1)4\beta'_2, \ 0, 0, \\ \qquad (m+1)8\lambda \ , \qquad\qquad (m+1)8\mu. \end{array}$$

It is possible, then, to find a sequence giving this scheme. But now, since it is possible to find a sequence of m's such that

$$(m+1)\psi \rightarrow 0, \ (\psi = 2\alpha'_1, 2\beta'_1, 4\alpha'_2, 4\beta'_2, 8\lambda, 8\mu),$$

it follows (in virtue of the principle **1.20**) that we can find a sequence giving the scheme

$$\begin{array}{l} 6\alpha'_1, \ 6\beta'_1, \ 0, 0, 0, 0, \\ 4\alpha'_2, \ 4\beta'_2, \ 0, 0, \\ \ 0 \ , \ \ 0. \end{array}$$

This gives us what we want (and something more) provided it is possible to choose

$$\alpha'_1 = \frac{1}{6}\alpha_1, \ \beta'_1 = \frac{1}{6}\beta_1, \ \alpha'_2 = \frac{1}{4}\alpha_2, \ \beta'_2 = \frac{1}{4}\beta_2.$$

This is the case provided $\theta, \varphi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ are linearly independent irrationals: it remains only to show that this restriction on $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ may be removed. It is obvious, in virtue of the principle **1.20**, that this may be done provided we can find a sequence $(\alpha_{1n}, \beta_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_{2n})$ such that, for each n, $\theta, \varphi, \alpha_{1n}, \beta_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_{2n}$ are linearly independent irrationals, and such that

$$\alpha_{1n} \rightarrow \alpha_1, \ \beta_{1n} \rightarrow \beta_1, \ \alpha_{2n} \rightarrow \alpha_2, \ \beta_{2n} \rightarrow \beta_2.$$

Now it is easy to see that there must be points $(\alpha_{1n}, \beta_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_{2n})$ interior to the 'cube' with $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ as centre and of side 2^{-n}, and exterior to that

with the same centre and of side 2^{-n-1}, and such that $\theta, \varphi, \alpha_{1n}, \beta_{1n}, \alpha_{2n}, \beta_{2n}$ are linearly independent irrationals. By selecting one such point corresponding to each value of n we obtain a sequence of the kind desired.[1]

1 . 24. *Proof of the second step.* Here also we shall consider a special case for simplicity: the argument is really general. We shall show that we can pass from a sequence giving the scheme

$$\begin{array}{c|cccc} & \theta & \varphi & \psi & \chi \\ \hline n & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ n^2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ n^3 & 0 & 0 & & \end{array}$$

to one giving

$$\begin{array}{c|cc} & \theta & \varphi \\ \hline n & \alpha_1 & \beta_1 \\ n^2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ n^3 & \alpha_3 & \beta_3 . \end{array}$$

As in 1 . 23, we may suppose, without real loss of generality, that $\theta, \varphi, \alpha_1, \beta_1$ are linearly independent irrationals. Let (n_r) be a sequence giving

$$\begin{array}{c|cccc} & \theta & \varphi & \alpha_1 & \beta_1 \\ \hline n & \frac{1}{2}\alpha_1 & \frac{1}{2}\beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ n^2 & 0 & 0 & \frac{2}{3}\alpha_3 & \frac{2}{3}\beta_3 \\ n^3 & 0 & 0 & & \end{array}$$

[1] This argument depends ostensibly on ZERMELO's 'Auswahlsprinzip' (or WHITEHEAD and RUSSELL's 'Multiplicative Axiom'). This difficulty can however be surmounted with a little trouble. It should perhaps be observed that we have ignored several similar points early in the paper: in all of these the difficulty is comparatively trivial, and we have only called attention to it in the present instance because it occurs in a more serious form than is usual in constructive mathematics.

An alternative line of argument from that in the text proceeds as follows. It is easy to show that if at most a finite number of primes are omitted, any four of the sequence $\log 2, \log 3, \log 5, \log 7, \log 11, \ldots$, together with θ and φ, form a set of six linearly independent irrationals. Moreover it can be deduced from known results concerning the distribution of the primes that we can find a sequence $(\log p_n, \log q_n, \log r_n, \log s_n)$, where p_n, q_n, r_n, and s_n are primes, such that

$$(\log p_n) \to \alpha_1, \ (\log q_n) \to \beta_1, \ (\log r_n) \to \alpha_2, \ (\log s_n) \to \beta_2.$$

Then

$$\lim_{r,s}(n_r + n_s)\,\theta = \lim_{r}\,(\tfrac{1}{2}\,\alpha_1 + n_r\,\theta) = \alpha_1$$

$$\lim_{r,s}\,(n_r + n_s)^2\,\theta = \lim_{r}\,(n_r\,\alpha_1 + n_r^2\,\theta) = \alpha_2,$$

$$\lim_{r,s}\,(n_r + n_s)^3\,\theta = \lim_{r}\,(\tfrac{3}{2}\,n_r^2\,\alpha_1 + n_r^3\,\theta) = \alpha_3;$$

with similar results for φ. It follows by the principle **1.20** that there is a sequence giving the desired scheme, and the proof of the induction, and therefore that of the theorem, is completed.

1.3. — The order of the approximation.

1.30. We have proved that under certain conditions we can find a sequence (n_r) such that

(1.301) $$(n_r^{\varkappa}\,\theta_p) \to \alpha_{\varkappa p} \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots k;\ p = 1, 2, \cdots m).$$

There are a number of interesting questions which may be asked with regard to the *rapidity* with which the scheme of limits is approached.

The relations (1.301) assert that, if we are given λ, there is a function $\Phi\,(k, m;\ \theta_1, \theta_2, \cdots \theta_m;\ \alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots \alpha_{km};\ \lambda)$[1] such that

$$|\,(n^{\varkappa}\,\theta_p) - \alpha_{\varkappa p}\,| < 1/\lambda$$

for some $n < \Phi$. It is hardly necessary to observe, after the explanations of 1.00, that this inequality requires a modification when $\alpha_{\varkappa p} = 0$, which may be expressed roughly by saying that $\alpha_{\varkappa p}$ is then to be regarded as a two-valued symbol capable of assuming indifferently the values 0 and 1.

(i) Does Φ necessarily depend on the θ's and α's: can we for example, find a Φ independent of the α's? It will be seen that this last question is answered in the affirmative.

(ii) Can we assert anything concerning the order of Φ *qua* function of λ, the variables θ and α being supposed fixed? The same question may be asked concerning any Φ which is independent of the α's; it should be observed, moreover, that the best answer to the latter question does not necessarily give the best answer to the former.

[1] For shortness we shall write this $\Phi\,(k, m, \theta, \alpha, \lambda)$.

Our attempts to answer these questions have not been successful, and such results as we have been able to obtain are of a negative character. The question then arises as to whether we can obtain more definite results by imposing restrictions on the θ's or the α's, by supposing for example that all the α's are zero, or that the θ's belong to some special class of irrationals.

(iii) The relations (1.301) imply the truth of the following assertion: there is a function $\varphi(k, m, \theta, \alpha, n)$ which tends to infinity with n, and is such that

$$|(n^{\varkappa}\theta_p) - \alpha_{\varkappa p}| < 1/\varphi$$

for an infinity of values of n. A series of questions may then be asked concerning φ similar to those which we have stated with reference to Φ.

1.31. We shall begin by proving two theorems which are connected with the questions (i). The first of them deals with the case in which all the α's are zero, and it will be convenient to use in its statement, as in 1.10, not the function (x), but the allied function $\bar{x}$.

Theorem 1.31. *There is a function $\Phi(k, m, \lambda)$, depending only on k, m, and λ, such that*

$$|\overline{n^{\varkappa}\theta_p}| < 1/\lambda, \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots k; \; p = 1, 2, \cdots m),$$

for some $n < \Phi$.

For suppose that this theorem is false. Then to every r corresponds a set of θ's, say ${}_r\theta_1, {}_r\theta_2, \cdots {}_r\theta_m$, such that the inequalities

$$(1.311) \qquad |\overline{n^{\varkappa}\,{}_r\theta_p}| < 1/\lambda$$

are not all true unless $n > r$. The set of points $({}_r\theta_1, {}_r\theta_2, \cdots {}_r\theta_m)$ has at least one limiting point $(\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_m)$, and by restricting ourselves to a subsequence of r's we can make

$${}_r\theta_p \to \Theta_p, \quad (p = 1, 2, \cdots m).$$

From this it follows that we can choose a number n_r which tends to infinity with r but so slowly that

$$(1.312) \qquad n_r^k |{}_r\theta_p - \Theta_p| < 1/2\lambda, \quad (p = 1, 2, \cdots m).$$

Clearly we may suppose that $n_r < r$, and so we have, for an infinity of values of r, $n_r < r$ and

$$(1.313) \qquad n^{\varkappa} |{}_r\theta_p - \Theta_p| < 1/2\lambda, \quad (n < n_r; \; \varkappa = 1, 2, \cdots k; \; p = 1, 2, \cdots m).$$

From (1.311) and (1.313) it follows that the inequalities

$$|n^\varkappa \theta_p| < 1/2\lambda$$

cannot all be true unless $n > n_r$, and so, since $n_r \to \infty$, cannot be true for any value of n. This contradicts Theorem **1.011**.

In the case $k = 1$ it is possible to assert much more than this. It is known, and is proved in 1.10, that in this case we may take

$$\Phi = ([\lambda] + 1)^m \tag{1.314}$$

This problem, in fact, may be regarded as completely solved. When $k > 1$, however, the case is very different. We have not even succeeded in finding a definite function $\Phi(\lambda)$, the same for all θ's, such that

$$|\overline{n^2 \theta}| \leq 1/\lambda$$

for $n \leq \Phi$. It would be not unnatural to suppose that the »best possible» function[1] Φ is less than $K\lambda$, where K is an absolute constant. But we have been unable to prove this or indeed any definite result as to its order in λ.

1.32. **Theorem 1.32.** *If the θ's are linearly independent irrationals, it is possible to find a function $\Phi(k, m, \theta, \lambda)$, independent of the α's, such that*

$$|(n^\varkappa \theta_p) - \alpha_{\varkappa p}| < 1/\lambda, \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots k;\ p = 1, 2, \cdots m)$$

for some $n < \Phi$.

That this theorem is true for the special case $k = 1$, $m = 1$, follows from the argument (a) in 1.11. It is easily proved in the most general case by an argument resembling, but simpler than, that of 1.31.

If the theorem is untrue, it is possible to find a sequence of sets $({}_r\alpha_{\varkappa p})$ $(r = 1, 2, \cdots)$ for which the inequalities of the theorem do not all hold unless $n > r$. The sequence of sets has at least one limiting set $(\alpha_{\varkappa p})$: let us choose r so that

$$|{}_r\alpha_{\varkappa p} - \alpha_{\varkappa p}| < 1/2\lambda, \quad (\varkappa = 1, 2, \cdots k;\ p = 1, 2, \cdots m).$$

Then clearly the inequalities

$$|(n^\varkappa \theta_p) - \alpha_{\varkappa p}| < 1/2\lambda$$

cannot all be true unless $n > r$, and so, since r is arbitrarily large, cannot all be true for any n. This contradicts Theorem **1.011**.

[1] That is, the function which has, for each value of λ, the least possible value. For the existence of this function it is necessary that the sign $\leq$ above should not be replaced by $<$.

1.33. Let us consider more particularly the case in which $k = 1$.

The equation (1.314) suggests that it may in this case be possible to choose for Φ a function of the form

$$\Omega(m, \theta, \alpha)\lambda^m.$$

This we believe to be improbable, but we have not succeeded, even when $m = 1$, in obtaining a definite proof. What is certain is that no corresponding result is true of the Φ of Theorem 1.32. It is impossible to choose a function $\Omega(m, \theta)$ independent of λ, and a function $\psi(m, \lambda)$ independent of the θ's, in such a way that the Φ of this theorem may be taken to be of the form

$$\Phi = \Omega(m, \theta)\,\psi(m, \lambda).$$

This is shown by the following theorem.[1]

Theorem 1.33. *Let $\psi(\lambda)$ be an arbitrary function of λ which tends steadily to infinity with λ. Then it is possible to find irrational numbers θ for which the assertion 'there is a function*

$$\Phi(\theta, \lambda) = \Omega(\theta)\,\psi(\lambda)$$

such that, when λ is chosen, the inequality

$$|(n\theta) - \alpha| < 1/\lambda$$

is satisfied, for every α, by some n less than Φ' is false.

Suppose that the assertion in question is true. Taking $\alpha = 1/\lambda$, we see that

$$(1.331) \qquad 0 < (n\theta) < 2/\lambda$$

for some n less then Φ.

Let p_ν/q_ν be the ν-th convergent to the simple continued fraction

$$\frac{1}{a_1 +}\;\frac{1}{a_2 +}\;\frac{1}{a_3 +}\cdots$$

which represents θ, so that $p_1 = 1$, $q_1 = a_1$; and let us consider the system of 'intermediate convergents'

$$\frac{p_{2n,r}}{q_{2n,r}} = \frac{p_{2n} + r\,p_{2n+1}}{q_{2n} + r\,q_{2n+1}} \qquad (0 < r < a_{2n+2}).$$

[1] In proving a result of this negative character we may evidently confine ourselves to the special case in which $m = 1$.

intercalated between p_{2n}/q_{2n} and p_{2n+2}/q_{2n+2}. These fractions are all less than θ and increase with r. Also

$$\text{(I.332)} \qquad \theta - \frac{p_{2n,r}}{q_{2n,r}} = \frac{a'_{2n+2} - r}{q_{2n,r}\, q'_{2n+2}},$$

where a'_{2n+2} is the complete quotient corresponding to a_{2n+2}, and

$$q'_{2n+2} = a'_{2n+2}\, q_{2n+1} + q_{2n}.$$

Let

$$\text{(I.333)} \qquad \lambda_n = \frac{2\, q'_{2n+2}}{a'_{2n+2} - s},$$

where s is a particular value of r which we shall fix in a moment. We shall suppose a_{2n+2} large, and s also large, but small in comparison with a_{2n+2}. In these circumstances λ_n will be approximately equal to $2\, q_{2n+1}$.

We shall now prove that if

$$\text{(I.334)} \qquad 0 < (Q\theta) < 2/\lambda_n$$

then

$$\text{(I.335)} \qquad Q > q_{2n,s}.$$

From (I.334) it follows that there is a fraction P/Q such that

$$\text{(I.336)} \qquad 0 < \theta - \frac{P}{Q} < \frac{2}{\lambda_n Q}.$$

On the other hand

$$\text{(I.337)} \qquad \theta - \frac{p_{2n,s}}{q_{2n,s}} = \frac{2}{\lambda_n\, q_{2n,s}}$$

If P/Q actually gave a better approximation by defect to θ than $p_{2n,s}/q_{2n,s}$, it would follow at once that $Q > q_{2n,s}$. We may therefore suppose the contrary; and then it follows from (I.336) and (I.337) that

$$0 < \frac{p_{2n,s}}{q_{2n,s}} - \frac{P}{Q} < \frac{2}{\lambda_n Q}.$$

Hence

$$0 < p_{2n,s}\, Q - q_{2n,s}\, P < 2\, q_{2n,s}/\lambda_n.$$

But

$$\frac{1}{2}\lambda_n = \frac{a'_{2n+2}\, q_{2n+1} + q_{2n}}{a'_{2n+2} - s} > q_{2n+1},$$

and

$$q_{2n,s} = q_{2n} + s q_{2n+1} < (s+1)\, q_{2n+1}.$$

Hence $p_{2n,s}Q - q_{2n,s}P$ is less than $s+1$, and so

(1.338) $$p_{2n,s}Q - q_{2n,s}P = \varrho \quad (0 < \varrho \leq s).$$

On the other hand

$$p_{2n,s}\, q_{2n,s-\varrho} - q_{2n,s}\, p_{2n,s-\varrho} = \varrho;$$

and so

$$p_{2n,s}(Q - q_{2n,s-\varrho}) = q_{2n,s}(P - p_{2n,s-\varrho}).$$

Hence either $Q = q_{2n,s-\varrho}$, or $Q - q_{2n,s-\varrho}$ is divisible by $q_{2n,s}$; and the latter hypothesis plainly involves that $Q > q_{2n,s}$.

On the other hand, if $Q = q_{2n,s-\varrho}$, then $P = p_{2n,s-\varrho}$, and

$$\theta - \frac{P}{Q} = \frac{a'_{2n+2} - s + \varrho}{q_{2n,s-\varrho}\, q'_{2n+2}} > \frac{2}{\lambda_n\, q_{2n,s-\varrho}},$$

$$(Q\theta) > 2/\lambda_n,$$

which contradicts (1.337). Hence in any case $Q > q_{2n,s}$.

It is now easy to complete the proof of the theorem. We have *a fortiori* $Q > s$. Also, if a_{2n+2} is large, and s large, but small in comparison with a_{2n+2}, λ_n will clearly be less than $4 q_{2n+1}$. We may suppose for definiteness that $s = [\sqrt{a_{2n+2}}]$.

We choose a value of θ such that the inequality

$$a_{2n+2} > \{\psi(4\, q_{2n+1})\}^4$$

is satisfied for an infinity of values of n. Then

$$s > \frac{1}{2}\{\psi(4\, q_{2n+1})\}^2.$$

But if Q, and *a fortiori* s, is less than Φ, we must have

$$\frac{1}{2}\{\psi(4\, q_{2n+1})\}^2 < \Omega(\theta)\, \psi(\lambda_n) < \Omega(\theta)\, \psi(4\, q_{2n+1});$$

and this is obviously impossible when n is sufficiently large. This completes the proof of the theorem.

It should be observed that the success of our argument depends entirely on our initial choice of a in such a way that $(n\theta)$ is small. It would not be enough that $n\theta$ should be small, that is to say that $(n\theta)$ should be nearly equal to either 0 or 1: this can of course be secured by choice of an n less than Φ, Φ being indeed independent of θ.

1.34. We turn now for a moment to the questions concerning φ. If we have found a function $\Phi(\lambda)$ which is continuous and monotonic, the inverse function is plainly a φ. The converse, however, is not true, and we cannot, from the existence of a φ of given form, draw any conclusion as to the order of Φ for *all* values of λ. This is clear from the fact that, to put it roughly, the existence of φ asserts an inequality which need only hold very occasionally, and which therefore gives us information as to the behaviour of Φ only for occasional values of λ. Thus the existence of a Φ asserts much more than that of the corresponding φ. Since moreover it will appear (in the third paper of the series) that in applications of the present theory it is always the properties of Φ, and not those of φ, which are relevant, we are justified in regarding theorems concerning φ as of rather minor importance. There are, however, one or two results which are worth noticing, and which are not deductions from the corresponding results concerning Φ. It should be observed that whereas we wish Φ to increase as slowly as possible, we wish φ to increase as rapidly as possible.

Theorem 1.340. *It is possible to choose the a's so that $\varphi(m, \theta, a; n)$ increases with arbitrary rapidity. Moreover the a's may be chosen in an arbitrarily small neighbourhood of any set $(a_1, a_2, \cdots a_m)$.*

We omit the proof of this theorem, which is easy.

Theorem 1.341. *If $k = 1$ and $m = 1$, then, provided only that θ is irrational, we may take*

$$\varphi(n) = \frac{1}{3} n$$

(a function independent of both θ and a).

This follows at once from the argument (a) of 1.11. It is natural to suppose that, when $m > 1$, we may take

$$\varphi(n) = \omega(m) \sqrt[m]{n},$$

where $\omega(m)$ depends only on m. But this we have not been able to prove.

A comparison of Theorems 1.33 and 1.341 shows very clearly the difference between theorems involving Φ and those involving φ, and the greater depth and difficulty of the former.

1.35. Theorem **1.33** shows that it is hopeless to expect any such simple result concerning Φ as is asserted concerning φ in Theorem **1.341**. It is however possible to obtain theorems which involve Φ and correspond to Theorem **1.341**, if we suppose that certain classes of irrationals (as well as the rationals) are excluded from the range of variation of θ. In the two theorems which follow it is supposed that $m = 1$ and $k = 1$.

Theorem 1.350. *Let θ be confined to the class of irrationals whose partial quotients are limited, a set which is everywhere dense. Then we may take*

$$\Phi = \lambda\,\Omega(\theta).$$

Theorem 1.351. *Let θ be confined to the class of irrationals whose partial quotients a_n satisfy, from a certain value of n onwards, the inequality*

$$a_n < n^{1+\delta}\ (\delta > 0).$$

Then we may take,

$$\Phi = \lambda(\log\lambda)^{1+\delta'}\,\Omega(\theta)$$

where δ' is any number greater than δ.

The interest of the last theorem lies in the fact that the set in question is of measure 1,[1] so that we may take Φ to be of the form $\lambda(\log\lambda)^{1+\epsilon}\,\Omega(\theta)$,[2] where ϵ is an arbitrarily small positive number, for *almost all* values of θ.

The proofs of these theorems are simple and depend merely on an adaptation of KRONECKER's argument reproduced in 1.11. Suppose first that the partial quotients of θ are limited. We can choose H so that, when λ is assigned, there is always a denominator q_m of a convergent to θ such that

$$(1.350)\qquad 2\lambda \leq q_m < H\lambda.$$

We take $q = q_m$. It follows from KRONECKER's argument that there is for any α a number ν such that

$$|(\nu\theta) - \alpha| < 2/q, \quad q/2 < \nu < 3q/2,$$

and so

$$|(\nu\theta) - \alpha| < 1/\lambda$$

for some ν less than a constant multiple of λ.

[1] By a theorem of BOREL and BERNSTEIN. See BOREL, *Rendiconti di Palermo*, vol. 27, p. 247, and *Math. Ann.*, vol. 72, p. 578; BERNSTEIN, *Math. Ann.*, vol. 71, p. 417.

[2] It is not difficult to replace $\lambda(\log\lambda)^{1+\epsilon}$ by $\lambda\log\lambda\,(\log\log\lambda)^{1+\epsilon}$, or by the corresponding but more complicated functions of the logarithmic scale

The proof of Theorem **1.351** is very similar. We suppose that

$$q_{m-1} < 2\lambda < q_m,$$

and so

$$q_m/m^{1+\delta} < 2\lambda < q_m.$$

There is a constant ϱ such that $q_m > e^{\varrho m}$; and from these facts it follows easily that

$$q_m < \lambda (\log \lambda)^{1+\delta'}$$

for sufficiently large values of λ. The proof may now be completed in the same manner as that of Theorem **1.350**.

It is natural to suppose that these theorems have analogues when $m > 1$. But our arguments, depending as they do on the theory of continued fractions, do not appear to be capable of extension.

1.4. — The general sequence $(f(n)\theta)$ and the particular sequence $(a^n\theta)$

1.40. We return now to the general sequence $(f(n)\theta)$: it will be convenient to write λ_n for $f(n)$. We suppose then that (λ_n) is an arbitrary increasing sequence of numbers whose limit is infinity.[1]

It would be natural to attempt to prove that, if θ is irrational and α is any number such that $0 < \alpha < 1$, a sequence (n_r) can be found such that

$$(\lambda_{n_r}\theta) \to \alpha;$$

but we saw in 1.00 that this statement is certainly false, for example when $\lambda_n = 2^n$ or $\lambda_n = n!$

The result which is in fact true was suggested to us by a theorem of BERNSTEIN,[2] which runs as follows:

If λ_n is always an integer, then the set of values of θ for which

$$(\lambda_n\theta) \to 0$$

is of measure zero.

This result, when considered in conjunction with what we have already proved, at once suggests the following theorem.

[1] In the introductory remarks of 1.00 we stated our main problem subject to the restriction that λ_n is an integer. No such restriction, however, is required in what follows.

[2] F. BERNSTEIN, *loc. cit.*

Theorem 1.40. *The set of values of θ, for which the set of points $(\lambda_n \theta)$ is not everywhere dense in the interval* (0, 1), *is of measure zero.*

In other words, the main question asked in 1.00 may be answered affirmatively if we make exception of a set of measure zero.

1.41. The proof will be based upon the following lemma.

Lemma 1.41. *Suppose that a finite number of intervals are excluded from the continuum* (0, 1), *and that the length of the remainder S is l. Let a be any number betwen* 0 *and* 1, *and consider the set T of $[\lambda]$ intervals of length δ/λ $(\delta < 1)$ whose centres are at the points*

$$\frac{a}{\lambda},\ \frac{a+1}{\lambda},\ \ldots\ldots,\ \frac{a+[\lambda]-1}{\lambda}\,{}^{1}.$$

Then the length of the common part of S and T is

$$\delta\, l + \varepsilon_\lambda,$$

where $\varepsilon_\lambda \to 0$ as $\lambda \to \infty$.

The truth of the lemma is almost obvious. A formal proof may be given as follows. Let the lengths of the intervals excluded from S be $l_1, l_2, \ldots, l_p$. If now we extend each of these intervals a distance $1/2\lambda$ at each end,[2] we obtain a system of p intervals of length

$$l'_s = l_s + \frac{1}{\lambda}\quad (s = 1, 2, \cdots p).$$

We denote what is left of (0, 1) by S'.

If $(a+r)/\lambda$ falls in S', the whole of the corresponding interval of T falls in S. Hence the part of S inside T has a length not less than $\mu\delta/\lambda$, where μ is the number of points $(a+r)/\lambda$ in S'. If $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ are the numbers of these points which fall in the intervals excluded from S', we have

$$\mu + \sum \nu_s = [\lambda],\quad (\nu_s - 1)/\lambda < l'_s;$$

and so

$$\begin{aligned}\mu = [\lambda] - \sum \nu_s &> \lambda - 1 - p - \lambda \sum l'_s \\ &= \lambda - p - 1 - \lambda \sum \left(l_s + \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= l\lambda - 2p - 1,\end{aligned}$$

[1] It is of course to be understood that an interval, or a part of an interval, which falls outside (0, 1), is to be replaced by the congruent interval inside.

[2] We suppose λ large enough to ensure that this extension does not cause any overlapping. If any part of an extended interval should fall outside (0, 1), as will happen if an interval contains 0 or 1, we of course replace this part by the congruent part of (0, 1).

since $\sum l_s = 1 - l$. Hence the length in question is greater than

$$\delta l - \frac{(2p+1)\delta}{\lambda}.$$

A similar argument, which we may leave to the reader, furnishes a corresponding upper limit for the length; and the lemma follows. It is plain that $\varepsilon_\lambda = O(1/\lambda)$.

1.42. We can now prove the following theorem, which is a generalisation of Bernstein's, but is itself contained in Theorem **1.40**.

Theorem 1.42. *If* I *is any interval contained in* $(0, 1)$, *the set* Θ *of points* θ *such that no one of the points* $(\lambda_n \theta)$ *falls inside* I, *is of measure zero.*

Let a be the centre of I and δ its length; and let T_m be the set T of the lemma, with $\lambda = \lambda_m$. If, for any value of m, θ falls in T_m, then $(\lambda_m \theta)$ falls in I, and so θ belongs to the set complementary to Θ.

Let

$$S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n,$$

and let l_n be the length of S_n. Finally let $l_n \to l$ as $n \to \infty$. We have to show that $l = 1$.

We now apply the lemma, taking S to be the set $\bar{S}_n$ complementary to S_n, and T to be T_m. If m is large enough, the length of the common part $(\bar{S}_n, T_m)$ of $\bar{S}_n$ and T_m is greater than

$$\delta(1 - l_n) - \varepsilon.$$

Any point which belongs either to this set or to S_n itself belongs to *some* S_ν. Hence

$$l \geq l_n + \delta(1 - l_n) - \varepsilon;$$

and so

$$l \geq l + \delta(1 - l) - \varepsilon:$$

which is impossible unless $l = 1$.

1.43. We can now complete the proof of Theorem **1.40**. Let E_n be the set of values of θ such that some one of the intervals

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

contains no point $(\lambda_n \theta)$. Then E_n is of measure zero, and so

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots\dots$$

is of measure zero.

If now the set $(\lambda_m \theta)$ is not everywhere dense in $(0, 1)$, there is an interval i which contains no $(\lambda_m \theta)$. We can choose n so that some interval $\left(\frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}\right)$ falls inside i. Then θ belongs to E_n and so to E. Thus the theorem is established.

1.44. Perhaps the most interesting special sequence falling under the general type $(f(n)\theta)$ is that in which $f(n) = a^n$, where a is a positive integer. When θ is expressed as a decimal in the scale of a, the effect of multiplication by a is merely to displace the digits. To study the properties of the sequence $(a^n\theta)$ is therefore equivalent to studying the distribution of the digits in the expression of θ in the scale of a: it is to this fact that this form of $f(n)$ owes its peculiar interest.

Let b be one of the possible digits $0, 1, 2, \dots, a-1$, and let $p(n, m)$ denote the number of decimals of n figures whose digits include exactly m b's. Then

(1.441)
$$p(n, m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}(a-1)^{n-m}.$$

We write

(1.442)
$$\mu = m - \frac{n}{a};$$

so that μ is the excess of the number of b's above the average.

We shall base our investigation on a series of lemmas.

Lemma 1.441. *Given any positive number δ, we can find a positive number ε such that*

(1.443)
$$p(n, m) < \frac{a+\delta}{\sqrt{2\pi(a-1)n}}\, e^{-(\alpha-\delta)\mu^2/n}\, a^n$$

where

$$\alpha = \frac{a^2}{2(a-1)},$$

for $|\mu| < \varepsilon n$ and all sufficiently large values of n.

We omit the proof of this lemma, which depends merely on a straightforward application of Stirling's Theorem.

Lemma 1.442. *Given any positive number ε, we can find a positive number ζ such that*

$$p(n, m) < a^n e^{-\zeta n}$$

for $|\mu| > \varepsilon n$ *and all sufficiently large values of* n.

Suppose, *e. g.*, $\mu > \frac{1}{2}\varepsilon n$. Then

$$\frac{p(n, m+1)}{p(n, m)} = \frac{n - m}{(a-1)(m+1)} < \frac{a - 1 - \frac{1}{2} a\varepsilon}{(a-1)(1 + \frac{1}{2} a\varepsilon)} < 1;$$

and from this it is easy to deduce the truth of the lemma when $\mu > \varepsilon n$. A similar proof applies when $\mu < -\varepsilon n$.

Lemma 1.443. *Let* c *be a positive constant. Then*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a^{-n} \sum_{|\mu| < c\sqrt{n}} p(n, m) < 1, \tag{1.4431}$$

$$\lim_{n \to \infty} a^{-n} \sum_{\mu > -c\sqrt{n}} p(n, m) < 1, \tag{1.4432}$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a^{-n} \sum_{\mu < c\sqrt{n}} p(n, m) < 1. \tag{1.4433}$$

Of these three inequalities the first is plainly a consequence of either the second or third. It will be enough to prove the second.

We have

$$a^{-n} \sum_{\mu > -c\sqrt{n}} p(n, m) = a^{-n} \sum_{-c\sqrt{n}}^{\varepsilon n} + a^{-n} \sum_{\varepsilon n}^{(a-1)n/a} = S_1 + S_2,$$

say. By Lemma **1.442**,

$$S_2 < \frac{(a-1)n}{a} e^{-\zeta n} \to 0.$$

And by Lemma **1.441**,

$$S_1 < \frac{a+\delta}{\sqrt{2\pi(a-1)n}} \sum_{c\sqrt{n}}^{\varepsilon n} e^{-(a-\delta)\mu^2/n}$$

$$< \frac{a+\delta}{\sqrt{2\pi(a-1)n}}\left\{2 + \int_{-c\sqrt{n}}^{\infty} e^{-(a-\delta)\mu^2/n}\, d\mu\right\}.$$

The term of order $1/\sqrt{n}$ may be ignored. The remainder is less than

$$\frac{a+\delta}{\sqrt{2\pi(a-1)}} \int_{-c}^{\infty} e^{-(a-\delta)\xi^2}\, d\xi,$$

which is less than 1. Thus the lemma is proved. In a similar manner we can prove

Lemma 1.444. *If ν is a function of n such that $\nu/\sqrt{n} \to \infty$, then*

$$a^{-n} \sum_{|\mu| < \nu} p(n, m) < K\left\{\frac{\sqrt{n}}{\nu} e^{-(a-\delta)\nu^2/n} + a^{-n}\right\}.$$

where K depends only on a.

1.45. We are now in a position to prove our main theorems. We observe first that all irrational[1] numbers θ between 0 and 1, whose decimals have just m b's in their first n figures, may be included in a set of intervals whose total length is

$$a^{-n}\, p(n, m).$$

For let $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$, where $q = a^n$, denote the terminating decimals of n figures. The set of intervals $(\theta_r, \theta_r + a^{-n})$ just fills up the whole interval $(0, 1)$. Among the numbers θ_r there are $p(n, m)$ which have just m b's, which we may call $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$; and the set of intervals $(\xi_s, \xi_s + a^{-n})$ fulfils our requirements.

Theorem 1.45. *Let δ be any positive number. Then the set of numbers θ for which*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|\mu|}{\sqrt{n \log n}} < \sqrt{\frac{1}{a}} + \delta$$

is of measure 1.

Let S denote the complementary set. Any number belonging to S satisfies

$$\mu > \left(\sqrt{\frac{1}{a}} + \delta'\right)\sqrt{n \log n} = \nu_n$$

for an infinity of values of n, δ' being any positive number less than δ.

[1] The end points of the intervals will be *rational* numbers satisfying the condition. In what follows we may confine ourselves to irrational values of θ, since the rational values form in any case a set of measure zero.

All θ's for which this inequality is true for a particular n may be enclosed in a set of intervals whose total length is

$$a^{-n} \sum_{|\mu| < \nu_n} p(n, m). \tag{1.451}$$

We can choose a positive number δ'' such that

$$2\delta' \sqrt{a} - \frac{\delta''}{a} - \frac{2\delta'\delta''}{\sqrt{a}} > 0,$$

and then choose n_1 so that the expression (1.451) is less than

$$K\left\{\frac{\sqrt{n}}{\nu_n} e^{-(a-\delta'')\nu_n^2/n} + a^{-n}\right\}$$

for $n > n_1$. To prove the theorem it is enough to show that the result of summing this expression for $n = n_1, n_1 + 1, \ldots\ldots$ can be made as small as we please by choice of n_1; and it is obvious that this conclusion cannot be affected by the presence of the term a^{-n}. But

$$\frac{\sqrt{n}}{\nu_n} e^{-(a-\delta'')\nu_n^2/n} < e^{-(a-\delta'')\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\delta'\right)^2 \log n}$$

$$= n^{-1-\delta'''},$$

where

$$\delta''' > (a - \delta'')\left(\frac{1}{a} + \frac{2\delta'}{\sqrt{a}}\right) - 1$$

$$= 2\delta' \sqrt{a} - \frac{\delta''}{a} - \frac{2\delta'\delta''}{\sqrt{a}} > 0;$$

and plainly

$$\sum_{n_1}^{\infty} n^{-1-\delta'''}$$

can be made as small as we please by choice of n_1. Thus the theorem is proved.

Theorem 1.45 includes as a particular case

Theorem 1.451. *If n_b is the number of b's in the first n figures of the expression of θ as a decimal in the scale of a, then*

$$n_b \sim n/a$$

for almost all values of θ.

1.46. Theorem **1.45** shows that the deviation, from the average n/a, of the number of occurrences of a particular figure b in the first n places, is not in general of an order materially greater than $\sqrt{n}$.[1] If we were to suppose that there was a *steady* deviation from the average (instead of a merely occasional deviation), we would naturally obtain a more precise result. Thus reasoning analogous to, but simpler than, that which led to theorem 1.45, leads also to

Theorem 1.46. *If $\varphi(n) \to \infty$ with n, then the set of θ's for which*

$$|\mu(n)|/\sqrt{n}\,\varphi(n) \to \infty$$

is of measure zero.

This theorem, however, is included in a much more interesting and general theorem which we shall now proceed to prove, which, to put it roughly, assigns a *lower* limit for the deviation in either direction.

1.47. **Theorem 1.47.** *If c is any positive constant, the set of θ's for which*

$$\mu(n) > -c\sqrt{n},$$

and the set for which $\mu(n) < c\sqrt{n}$, are of measure zero.

Let

$$c_0 = c \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^m}\right).$$

By Lemma **1.443**, there is a positive number δ_{c_0} such that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a^{-n} \sum_{\mu > -c_0\sqrt{n}} p(n, m) = 1 - \delta_{c_0}.$$

And if $c \leq c_1 < c_0$, it is clear that

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a^{-n} \sum_{\mu > -c_1\sqrt{n}} p(n, m) = 1 - \delta_{c_1},$$

where

$$\delta_c \geq \delta_{c_1} \geq \delta_{c_0}.$$

Let E_c be the set of the theorem. We can enclose E_c in a set of intervals of total length

[1] It follows from the elements of the theory of errors that the 'most probable error' is of order $\sqrt{n}$.

$$a^{-n_1} \sum_{\mu > -c\sqrt{n_1}} p(n_1, m) < 1 - \frac{1}{2}\delta_c .$$

Consider now any one of the

$$N = \Sigma\, p(n, m)$$

intervals of this set, each of which is of length a^{-n_1}; and let $\xi = (a^{n_1}\theta)$. As θ ranges in the interval in question, ξ ranges in the whole interval $(0, 1)$.

If θ belongs to E_c, the corresponding ξ has the property that

$$\mu(n') > -c\sqrt{n_1} + n'$$

for all values of n'; and so, if n' is large enough compared with n_1,

$$\mu(n') > -c'\sqrt{n'},$$

where

$$c' = c(1 + 2^{-n_1-1}).$$

We may now enclose the ξ's in a set of intervals whose total length is less than

$$1 - \frac{1}{2}\delta_{c'};$$

and therefore we may enclose the θ's which lie in the particular interval under consideration in a set of intervals whose total length is less than $a^{-n_1}(1 - \frac{1}{2}\delta_{c'})$. If we do this for each of the N intervals, we have enclosed the θ's in a set of intervals of length less than

$$\left(1 - \frac{1}{2}\delta_c\right)\left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c'}\right).$$

Repeating this argument, it is clear that we can enclose the θ's in a set of intervals of total length less than

$$\left(1 - \frac{1}{2}\delta_c\right)\left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c''}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c^{(r)}}\right),$$

where

$$c^{(r)} = c(1 + 2^{-n_1-1})(1 + 2^{-n_2-1})\ldots(1 + 2^{-n_r-1}),$$

the indices n_ν being integers which tend to infinity with ν, as rapidly as we please. Plainly $c^{(\nu)} < c_0$ and so

$$\delta_{c^{(\nu)}} > \delta_{c_0}, \quad 1 - \frac{1}{2}\delta_{c^{(\nu)}} < 1 - \frac{1}{2}\delta_{c_0},$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\delta_c\right)\left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c'}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c^{(\nu)}}\right) < \left(1 - \frac{1}{2}\delta_{c_0}\right)^{\nu+1}.$$

As this tends to zero as $\nu \to \infty$, our theorem is proved.

From Theorem **1 . 47** we can at once deduce

Theorem 1 . 471. *The set of θ's such that to each θ corresponds a c for which $\mu(n) > -c\sqrt{n}$ is of measure zero.*

Let E_c denote the set of Theorem **1 . 47**. The set of this theorem is plainly the sum of the sets $E_1, E_2, E_3, \ldots$; and so is of measure zero.

1 . 48. So far we have considered merely the occurrence of a particular digit b in the decimal which represents θ. But our results are easily extended so as to give analogous information concerning the occurrence of any combination of digits. The method by which this extension is effected is quite simple in principle, and it will be sufficient to show its working in a special case.

Consider the succession 317 of digits, in the scale of 10. In the scale of 1000, the number 317 corresponds to a single digit τ; and, if θ is expressed in the scale of 1000, it will, by theorem **1 . 451**, be almost always true that the number n_τ of occurrences of τ, among the first n figures, satisfies the relation

$$n_\tau \sim \frac{n}{1000}.$$

Now the combination 317, in the expression of θ in the scale of 10, will occur when, and only when, the digit τ occurs in the expression of one or other of the three numbers

$$\theta, \; 10\theta, \; 100\theta$$

in the scale of 1000. Hence it is almost always true that the number of occurrences of the combination 317, in the first n digits of the expression of θ in the scale of 10, is asymptotically equivalent to

$$\frac{n}{1000}.$$

We may now, without further preface, enunciate the following theorems.

Theorem 1.48. *It is almost always true that, when a number θ is expressed in any scale of notation, the number of occurrences of any digit, or any combination of digits, is asymptotically equivalent to the average number which might be expected.*

Theorem 1.481. *It is almost always true that the deviation from the average, in the first n places, is not of order exceeding $\sqrt{n \log n}$.*

Theorem 1.482. *It is almost always true that the deviation, in both directions, is sometimes of order exceeding $\sqrt{n}$.*

Theorem 1.483. *The number of the first n numbers $(a^\nu \theta)$ which fall inside an interval of length δ included in the interval* (0, 1) *is almost always asymptotically equivalent to δn.*

The last theorem is merely a translation of theorem **1.48** into different language, and a corresponding form may of course be given to theorems **1.481** and **1.482**.

1.49. Throughout this section (1.4) we have confined ourselves to results concerning a single irrational θ. Some of our theorems, however, have obvious many-dimensional analogues. It will be sufficient, for the present, to mention the following, which are generalisations of Theorems **1.40** and **1.483** respectively.

The interval (0, 1) is now replaced by an m-dimensional 'square'.

Theorem 1.49. *The set of values $(\theta_1, \theta_2 \cdots \theta_m)$, for which the points $(\lambda_n \theta_1, \lambda_n \theta_2, \cdots \lambda_n \theta_m)$ are not everywhere dense in the square, is of measure zero.*

Theorem 1.491. *The number of the first n points $(a^\nu \theta_1, a^\nu \theta_2, \cdots a^\nu \theta_m)$, which fall inside a portion of the square, of area δ, is almost always asymptotically equivalent to δn.*

We leave the proofs to the reader. The first theorem may be proved by an obvious adaptation of the proof of Theorem **1.40**, and the second deduced from Theorem **1.483** by a process of correlation very similar to that employed n 1.48.

Contents.

AVVISO DI CONCORSO A PREMIO PER LE MATEMATICHE.

La Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia di Bologna, a richiesta del Sig. Cav. Dott. Adolfo Merlani, mette a concorso il seguente tema:

»Esporre, con metodo storico-critico, lo sviluppo organico della teoria delle funzioni ellittiche ed i vari punti di vista sotto ai quali questa teoria è stata considerata dalla fine del secolo XVIII fino ai nostri giorni. Indicare l'influenza che hanno avuto, su altri rami dell'analisi, le vedute presentatesi successivamente nella nominata teoria.»[1]

A chi presenterà, per giudizio dell'Accademia, il miglior lavoro, il Cav. Dott. Adolfo Merlani corrisponderà la somma di L. 500, quale contributo alle spese per il compimento del lavoro stesso.

Il concorso si chiude il 31 Dicembre 1914.

Condizioni di concorso.

a) Non può concorrere al premio chi, a qualsiasi titolo, faccia parte dell'Accademia delle Scienze suddetta.

b) I lavori presentati al concorso devono essere scritti leggibilmente in lingua italiana, e devono essere inediti.

c) Possono prendere parte al concorso anche gli stranieri.

d) Il lavoro presentato sarà anonimo. Sul lavoro stesso dovrà essere segnato un motto, che sarà riprodotto su una busta chiusa contenente il nome del concorrente. Le buste relative ai lavori non premiati verranno bruciate senza essere state aperte.

e) Il premio è indivisibile.

f) I manoscritti, premiati o no, rimangono di proprietà dell'Accademia.

---

[1] Questo medesimo tema fu posto a concorso con le stesse condizioni e con scadenza al 31 Dicembre 1912. Non essendosi presentato nessun concorrente, la Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia di Bologna ha deliberato di rinnovare il concorso.

g) I lavori che aspirano al premio devono essere indirizzati al Segretario della Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Via Zamboni 33. Non si terrà conto dei lavori pervenuti all'Accademia dopo la mezzanotte del 31 Dicembre 1914.

Bologna, 16 Febbraio 1913.

Il Presidente
Pietro Albertoni

Il Segretario
Ercole Giacomini.

NAPIER TERCENTENARY CELEBRATION, JULY 1914.

John Napier's *Logarithmorum Canonis Mirifici Descriptio* was published in 1614; and it is proposed to celebrate the tercentenary of this great event in the history of mathematics by a Congress, to be held in Edinburgh on Friday, 24th July 1914, and following days.

The Celebration is being held under the auspices of the Royal Society of Edinburgh, on whose invitation a General Committee has been formed, representing the Royal Society of London, the Royal Astronomical Society, the Town Council of Edinburgh, the Faculty of Actuaries, the Royal Philosophical Society of Glasgow, the Universities of St Andrews, Glasgow, Aberdeen, and Edinburgh, the University College of Dundee, and many other bodies and institutions of educational importance.

The Celebration will be opened on the Friday with an Inaugural Address by Lord of Appeal Sir J. Fletcher Moulton, F. R. S., LL. D. (Edin.), etc., followed by a Reception given by the Right Honourable the Lord Provost, Magistrates and Council of the City of Edinburgh. On the Saturday and Monday the historical and present practice of computation and other developments closely connected with Napier's discoveries and inventions will be discussed.

A Memorial Service will be held in St Giles' Cathedral on the Sunday.

Among many who have expressed a warm interest in the Celebration and who hope to take part in the Congress, may be mentioned Professor Andoyer, Paris; Professor J. Bauschinger, Strassburg; Professor Hume Brown, Historiographer Royal for Scotland; Professor F. Cajori, Colorado, U. S. A.; Professor G. A. Gibson, Glasgow; Dr J. W. L. Glaisher, Cambridge; Professor Lang, St Andrews; Professor Macdonald, Aberdeen; Professor E. Pascal, Naples; Professor Karl Pearson, London; Professor Eugene Smith, New York; Professor Steggall, Dundee; Professor Whittaker, Edinburgh.

Merchiston Castle, the residence of Napier, has long been occupied by the well-known public school, which draws pupils from all parts of the British Empire.

The Governors of the School have kindly invited the members of the Congress to visit the Castle and Grounds on the Saturday afternoon.

Relics of Napier, collected by Lord Napier and Ettrick and other representatives of the Family, will also be on view; and it is intended to bring together for exhibition books of Tables and forms of Calculating Machines, which may reasonably be regarded as natural developments of the great advance made by Napier.

Individuals, Societies, Universities, Public Libraries, etc., may become Founder Members on payment of a minimum subscription of £ 2; and each Founder Member will receive a copy of the Memorial Volume, which will contain addresses and papers read before the Congress, and other material of historic and scientific value. It is important to secure as many Founder Members as possible, so that a Volume may be brought out worthy of the memory of Napier.

Ordinary Subscribers attending the Celebration may receive copies of the Memorial Volume at a reduced price.

Subscriptions and Donations should be sent to the Honorary Treasurer, Mr Adam Tait, Royal Bank of Scotland, St Andrew Square, Edinburgh.

All who are interested in this proposed Celebration are respectfully invited to communicate with the General Secretary of the Royal Society of Edinburgh, 22 George Street, Edinburgh, and to announce their intention of being present.

January 1914.

C. G. Knott.
General Secretary,
Royal Society of Edinburgh.

SOME PROBLEMS OF DIOPHANTINE APPROXIMATION.

BY

G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD,

TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

II.

The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions.

2. 0. — Introduction.

2. 00. The series

$$2\sum_{1}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2},\quad 1+2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2},\quad 1+2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2},$$

where $q=e^{\pi i\tau}$, are convergent when the imaginary part of τ is positive, and represent the elliptic ϑ-functions

$$\vartheta_2(0,\tau),\quad \vartheta_3(0,\tau),\quad \vartheta_4(0,\tau).^1$$

When τ is a real number x, the series become oscillating trigonometrical series which, if we neglect the factor 2 and the first terms of the second and third series, may be written in the forms

[1] The notation is that of TANNERY and MOLK's *Théorie des fonctions elliptiques*. We shall refer to this book as *T. and M.*

$$\sum e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi i x}, \quad \sum e^{n^2 \pi i x}, \quad \sum (-1)^n e^{n^2 \pi i x}.$$

These series, the real trigonometrical series formed by taking their real or imaginary parts, and the series derived from them by the introduction of convergence factors, possess many remarkable and interesting properties. It was the desire to elucidate these properties which originally suggested the researches whose results are contained in this series of papers, and it is to their study that the present paper is devoted.[1]

2. 01. We shall write

$$(2.\ 011) \qquad s_n^2 = \sum_{\nu < n} e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \pi i x}, \quad s_n^3 = \sum_{\nu < n} e^{\nu^2 \pi i x}, \quad s_n^4 = \sum_{\nu < n} (-1)^\nu e^{\nu^2 \pi i x}.$$

It is obvious that, if s_n is any one of s_n^2, s_n^3, s_n^4, then

$$(2.\ 012) \qquad s_n = O(n).$$

Our object is to obtain more precise information about s_n; and we shall begin by a few remarks about the case in which x is rational. In this case s_n is always of one or other of the forms

$$O(1), \ An + O(1),$$

where A is a constant. It is not difficult to discriminate between the different cases; it will be sufficient to consider the simplest of the three sums, viz. s_n^3.

We suppose, as plainly we may do without loss of generality, that x is positive. Then x is of one or other of the forms

$$\frac{2\lambda+1}{2\mu}, \quad \frac{2\lambda}{4\mu+1}, \quad \frac{2\lambda+1}{2\mu+1}, \quad \frac{2\lambda}{4\mu+3},$$

according as the denominator of $\xi = \frac{1}{2}x$ is congruent to 0, 1, 2, or 3 to modulus 4.

[1] Some of the properties in question are stated shortly in our paper 'Some problems of Diophantine Approximation' published in the *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 1912.

Now it is easy to verify that

$$\sum_{0}^{s-1} e^{2\nu^2\pi i r/s}$$

is of the forms

$$(\pm 1 \pm i)\sqrt{s}, \quad \pm\sqrt{s}, \quad 0, \quad \pm i\sqrt{s}$$

according as $s \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$; and from this it follows immediately that s_n^3 is of the forms

$$(\pm 1 \pm i)An + O(1),$$

$$\pm An + O(1),$$

$$O(1),$$

$$\pm iAn + O(1),$$

in these four cases. Thus, for example, the series

$$\sum \cos(\nu^2 \pi x)$$

oscillates finitely if x is of the form $(2\lambda + 1)/(2\mu + 1)$ or $2\lambda/(4\mu + 3)$, and diverges if x is of the form $(2\lambda + 1)/2\mu$ or $2\lambda/(4\mu + 1)$.[1]

2. 1. — O and o Theorems.

2. 10. We pass to the far more difficult and interesting problems which arise when x is irrational. The most important and general result which we have proved in this connexion is that

(2. 101) $$s_n = o(n)$$

for any irrational x. This result may be established by purely elementary reasoning which can be extended so as to show that such series as

[1] This result (or rather the analogous result for the sine series) is stated by Bromwich, *Infinite Series*, p. 485, Ex. 10. We have been unable to find any complete discussion of the question, but the necessary materials well be found in Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, pp. 285 *et seq.* See also Riemann, *Werke*, p. 240; Genocchi, *Atti di Torino*, vol. 10, p. 985.

$$\sum e^{n^3 \pi i x}, \quad \sum e^{n^4 \pi i x}, \ldots \tag{2.102}$$

also possess the same property. We do not propose to include this proof in the present paper. Although elementary, it is by no means particularly easy; and it will find a more natural place in a paper dealing with the higher series (2. 102). In the present paper we shall establish the equation (2. 101) by arguments of a more transcendental, though really simpler, character, which depend ultimately on the formulae for the linear transformation of the ϑ-functions, and will be found to give much more precise results for particular classes of values of x.

2. 11. It is very easy to see that, as a rule, the equation (2. 101) must be very far from expressing the utmost that can be asserted about s_n.

It follows from the well known theorem of RIESZ-FISCHER that the series

$$\sum \frac{\cos n^2 \pi x}{n^{\frac{1}{2}+\delta}}, \quad \sum \frac{\sin n^2 \pi x}{n^{\frac{1}{2}+\delta}} \quad (\delta > 0) \tag{2.111}$$

are FOURIER's series. Hence, by a theorem of W. H. YOUNG[1], it follows that they become convergent almost everywhere after the introduction of a convergence factor $n^{-\delta'}$ $(\delta' > 0)$. As δ and δ' are both arbitrarily small, the series themselves must converge almost everywhere. Hence the equation

$$s_n^3 = o\left(n^{\frac{1}{2}+\delta}\right) \tag{2.112}$$

must hold for almost all values of x. It is evident that the same argument may be applied to s_n^2 and s_n^4, and to the analogous sums associated with such series as (2. 102).

If, instead of the series (2. 111), we consider the series

$$\sum \frac{\cos n^2 \pi x}{n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}}, \quad \sum \frac{\sin n^2 \pi x}{n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}}, \tag{2.113}$$

and use, instead of YOUNG's theorem, the more precise theorem that any FOURIER's series becomes convergent almost everywhere after the introduction of a convergence factor $1 / \log n$,[2] we find that we can replace (2. 112) by the more precise equation

$$s_n^3 = o\left\{ n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{3}{2}+\delta} \right\}; \tag{2.114}$$

[1] *Comptes Rendus*, 23 Dec. 1912.

[2] HARDY, *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 12, p. 370. The theorem was also discovered independently by M. RIESZ.

and it is evident that we can obtain still more precise equations by the use of repeated logarithmic factors. These we need not state explicitly, for none of them are as precise as those which we shall obtain later in the paper. These latter results have, moreover, a considerable advantage over those enunciated here, in that the exceptional set of measure zero, for which our equations may possibly cease to hold, will be precisely defined instead of being, as here, entirely unspecified. The main interest of the argument sketched here lies in the fact that it can be extended to series such as (2. 102).[1]

2. 120. We proceed now to the analysis on which the principal results of the paper depend. These are contained, first in the equation (2. 101), and secondly in the equation

$$s_n = O(\sqrt{n}), \tag{2. 1201}$$

which we shall prove for extensive classes of values of x.

In Chap. 3 of his *Calcul des Résidus,* LINDELÖF gives an extremely elegant proof of the formula

$$\sum_0^{q-1} e^{n^2 \pi i p/q} = \sqrt{\frac{iq}{p}} \sum_0^{p-1} e^{-n^2 \pi i q/p}, \tag{2. 1202}$$

where p and q are positive integers of which one is even and the other odd.[2] Our first object will be to obtain, by an appropriate modification of LINDELÖF's argument, analogous, though naturally rather less simple, formulae, applicable to the series $\sum e^{n^2 \pi i x}$, where x is irrational, and to the other series which we are considering.

We shall, however, consider sums of a more general form than those of which we have spoken hitherto, viz. the sums

$$\left\{\begin{aligned} s_n^2(x, \theta) &= \sum_{\nu < n} e^{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)^2 \pi i x} \cos(2\nu - 1)\pi\theta, \\ s_n^3(x, \theta) &= \sum_{\nu < n} e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi\theta, \\ s_n^4(x, \theta) &= \sum_{\nu < n} (-1)^\nu e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi\theta. \end{aligned}\right. \tag{2. 1203}$$

[1] The argument may even be extended to series of the type $\sum e^{\lambda_n i x}$, where λ_n is not necessarily a multiple of π; but for this we require a whole series of theorems concerning DIRICHLET's series.

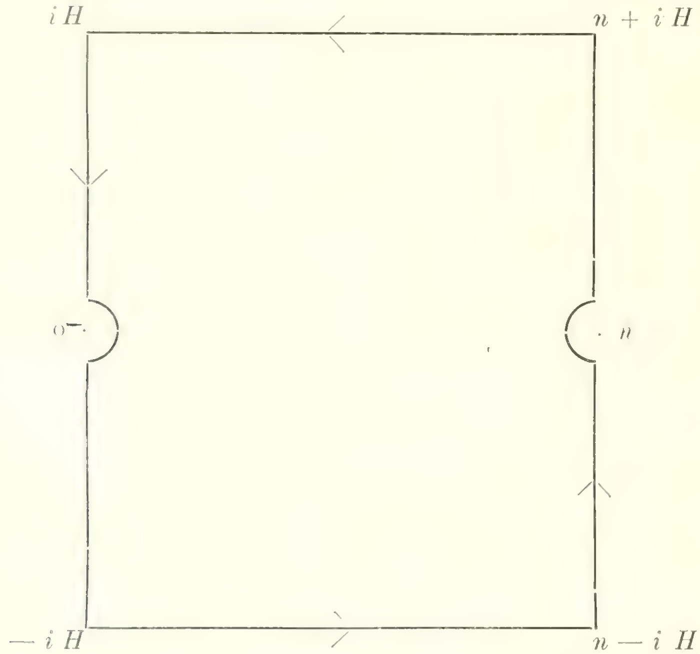
[2] The formula is due to GENOCCHI and SCHAAR. See LINDELÖF, *l. c.*, p. 75, for references to the history of the formula.

Here x and θ are positive and less than 1, x is irrational, and n is not necessarily an integer. These sums are related to the functions $\vartheta_2(v, \tau), \ldots$ as $s_n^2, \ldots$ are related to $\vartheta_2(0, \tau), \ldots$

2. 121. We consider the complex integral

$$\int e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \; \pi \cot \pi z \, dz$$

taken round the contour C shown in the figure. We suppose that the points 0, n are in the first instance avoided, as in the figure, by small semicircles of



radius ϱ, and that ϱ is then made to tend to zero. An obvious application of Cauchy's Theorem gives the result

$$\text{(2. 1211)} \qquad {\sum_{0}^{n}}'' e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2 \nu \pi \theta = \frac{1}{2i} P \int_C e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \cot \pi z \, dz,$$

where P is the sign of Cauchy's principal value, and the dashes affixed to the sign of summation imply that the terms for which $\nu = 0$ and $\nu = n$ are to be divided by 2.

We shall find it convenient to divide the contour C into two parts C_1 and C_2, its upper and lower halves, and to consider the integrals along C_1 and C_2

separately. When we attempt to do this a difficulty arises from the fact that, owing to the poles of the subject of integration at $z = o$ and $z = n$, the two integrals are not separately convergent. This difficulty is, however, trivial and may be avoided by means of a convention.

Suppose that $f(x)$ is a real or complex function of a real variable x which, near $x = \alpha$, is of the form

$$\frac{C}{x - \alpha} + \varphi(x),$$

where $\varphi(x)$ is a function which possesses an absolutely convergent integral across $x = \alpha$; and suppose that, except at $x = \alpha$, $f(x)$ is continuous in the interval (a, A), where $a < \alpha < A$. Then Cauchy's principal value

$$P\int_a^A f(x)\,dx$$

exists; but $f(x)$ has no integral in any established sense from a to α or from α to A. We shall, however, write

$$P\int_a^\alpha f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\int_a^{\alpha-\varepsilon} f(x)\,dx - C\log\varepsilon\right\},$$

$$P\int_\alpha^A f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\int_{\alpha+\varepsilon}^{A} f(x)\,dx + C\log\varepsilon\right\},$$

and it is clear that, with these conventions, we have

$$P\int_a^\alpha f(x)\,dx + P\int_\alpha^A f(x)\,dx = P\int_a^A f(x)\,dx.$$

It is clear, moreover, that a similar convention may be applied to complex integrals such as those which we are considering; thus

$$P\int_0^{iH} e^{z^2\pi i x}\cos 2z\pi\theta\; x\cot\pi z\; dz$$

(taken along the line o, iH) is to be interpreted as meaning

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{i\varepsilon}^{iH} e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \; \pi \cot \pi z \; dz + \log \varepsilon \right).$$

We may now write (2. 1211) in the form

$$(2.\ 1212) \qquad \sum_{0}^{n}{}' e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2 \nu \pi \theta = \frac{1}{2i} \left(P \int_{C_2} - P \int_{C_1} \right) e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \cot \pi z \, dz,$$

where now C_1 and C_2 are each supposed to be described starting from o. In the first of these two integrals we write

$$\cot \pi z = i + \frac{2i}{e^{2z\pi i} - 1},$$

and in the second

$$\cot \pi z = - i - \frac{2i}{e^{-2z\pi i} - 1}.$$

The two constant terms in these expressions give rise to integrals which may be taken along the real axis from o to n, instead of along C_2 and C_1; uniting and transposing these terms we obtain

$$(2.\ 1213) \qquad \sum_{0}^{n}{}' e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2 \nu \pi \theta - \int_{0}^{n} e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \, dz = I_1 + I_2,$$

where

$$I_1 = P \int_{C_1} \frac{e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta}{e^{-2z\pi i} - 1} dz,$$

$$I_2 = P \int_{C_2} \frac{e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta}{e^{2z\pi i} - 1} dz.$$

We now write

$$\frac{1}{e^{-2z\pi i} - 1} = e^{2z\pi i} + e^{4z\pi i} + \cdots + e^{2(k-1)z\pi i} + \frac{e^{2kz\pi i}}{1 - e^{2z\pi i}}$$

in I_1, and

$$\frac{1}{e^{2z\pi i} - 1} = e^{-2z\pi i} + e^{-4z\pi i} + \cdots + e^{-2(k-1)z\pi i} + \frac{e^{-2kz\pi i}}{1 - e^{-2z\pi i}}$$

in I_2. If we observe that

$$\int_{C_1} e^{z^2\pi i x+2\nu z\pi i}\cos 2z\pi\theta\, dz + \int_{C_2} e^{z^2\pi i x-2\nu z\pi i}\cos 2z\pi\theta\, dz$$

$$= 2\int_0^n e^{z^2\pi i x}\cos 2\nu z\pi\cos 2z\pi\theta\, dz,$$

we see that (2. 1213) may be transformed into

(2. 1214) $$\sum_0^{n}{}' e^{\nu^2\pi i x}\cos 2\nu\pi\theta - 2\sum_0^{k-1}{}'\int_0^n e^{z^2\pi i x}\cos 2\nu\pi z\cos 2z\pi\theta\, dz = K_1 + K_2,$$

where

$$K_1 = P\int_{C_1} e^{z^2\pi i x}\cos 2z\pi\theta\,\frac{e^{2kz\pi i}}{1-e^{2z\pi i}}\, dz,$$

$$K_2 = P\int_{C_2} e^{z^2\pi i x}\cos 2z\pi\theta\,\frac{e^{-2kz\pi i}}{1-e^{-2z\pi i}}\, dz.$$

2. 122. We shall now suppose that $H\to\infty$, so that the parts of C_1 and C_2 which are parallel to the axis of x go off to infinity. If $z=\xi+i\eta$, and η is large and positive, the modulus of the subject of integration in K_1 is very nearly equal to

$$\frac{1}{2}\exp\left\{-2\pi\eta(k+\xi x-\theta)\right\};$$

while if $z=\xi-i\eta$, and η is again large and positive, the modulus of the subject of integration in K_2 is very nearly equal to

$$\frac{1}{2}\exp\left\{-2\pi\eta(k-\xi x-\theta)\right\}.$$

From this it follows immediately that, if

(2. 1221) $$k > nx+\theta,$$

the contributions to K_1 and K_2 of the parts of C_1 and C_2 which we are causing to tend to infinity will tend to zero.

We are now left with two integrals each of which is composed of two parts taken along rectilinear contours, and we may write

$$K_1 = \left(P \int_0^{i\infty} - P \int_n^{n+i\infty} \right) e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \frac{e^{2kz\pi i}}{1 - e^{2z\pi i}} \, dz$$

$$K_2 = \left(P \int_0^{-i\infty} - P \int_n^{n-i\infty} \right) e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi \theta \frac{e^{-2kz\pi i}}{1 - e^{-2z\pi i}} \, dz.$$

Of the four rectilinear integrals thus obtained two, viz. the two taken along the imaginary axis, cancel one another. In the other two we write

$$z = n + it, \; z = n - it$$

respectively, and then unite the two into a single integral with respect to t; and when we substitute the result in (2. 1214) we obtain

$$\sum_0^{n}{}' e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2 \nu \pi \theta - 2 \sum_0^{k-1}{}' \int_0^n e^{z^2 \pi i x} \cos 2 \nu \pi z \cos 2 z \pi \theta \, dz = K,$$

where

$$K = i \int_0^{\infty} e^{\pi i x (n^2 - t^2)} \frac{e^{-2k\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}} \left\{ e^{2nx\pi t} \cos 2 (n - it) \pi \theta - e^{-2nx\pi t} \cos 2 (n + it) \pi \theta \right\} dt.$$

2. 123. We now write

$$K = i \int_0^{\infty} = i \int_0^1 + i \int_1^{\infty} = K' + K'';$$

and we proceed to show that

(2. 1231) $$K'' = O \sqrt{\frac{1}{x}}$$

uniformly in respect to θ, by which we imply that there is an absolute constant A such that

$$|K''| < \frac{A}{\sqrt{x}}$$

for $0 < x < 1$, $0 \leq \theta \leq 1$, all values of n, and all values of k subject to the inequality (2. 1221).

We may plainly ignore the factor $ie^{n^2\pi ix}$ in K. The factor in curly brackets is equal to

$$2(\cos 2n\pi\theta \cosh 2t\pi\theta \sinh 2nx\pi t + i \sin 2n\pi\theta \sinh 2t\pi\theta \cosh 2nx\pi t).$$

The factor $e^{-t^2\pi ix}$ we separate into its real and imaginary parts. When we multiply these two factors together our integral splits up into four, of which the integral

$$(2.\ 1232) \qquad \int_1^\infty \cos t^2\pi x \cosh 2t\pi\theta \sinh 2nx\pi t \frac{e^{-2k\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}}\, dt$$

is typical; and it will be sufficient to consider this integral, the same arguments applying to all four.

The function $1/(1 - e^{-2\pi t})$ decreases steadily as t increases from 1 to ∞. Hence, by the second mean value theorem, the integral (2. 1232) may be written in the form

$$(2.\ 1233) \qquad A \int_1^T \cos t^2\pi x \cosh 2t\pi\theta \sinh 2nx\pi t\, e^{-2k\pi t}\, dt,$$

where A (as always in this part of the paper) denotes an absolute numerical constant, and $T > 1$. In (2. 1233) we replace the hyperbolic functions by their expressions in terms of exponentials; and the integral then splits up into four, of which we need only consider

$$(2.\ 1234) \qquad A \int_1^T \cos t^2\pi x\, e^{-2\pi t(k - nx - \theta)}\, dt,$$

the arguments which we apply to this integral applying *a fortiori* to the rest. The integral (2. 1234) may, by another application of the second mean value theorem, be transformed into

$$A\int_1^{T''}\cos t^2\pi x\,dt,^1\ (1 < T'' < T). \tag{2. 1235}$$

Now, if T and T'' are any positive numbers whatever, we have

$$\int_T^{T''}\cos t^2\pi x\,dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{T\sqrt{x}}^{T''\sqrt{x}}\cos\pi u^2\,du;$$

and the integral last written is less in absolute value than an absolute constant. We have therefore proved the equation (2. 1231), and it follows that

$$\sum_0^{n}{}' e^{\nu^2\pi ix}\cos 2\nu\pi\theta - 2\sum_0^{k-1}{}'\int_0^{n} e^{z^2\pi ix}\cos 2\nu\pi z\cos 2z\pi\theta\,dz = K' + O\sqrt{\frac{1}{x}}. \tag{2. 1236}$$

2. 124. The next step in the proof consists in showing that, in the equation (2. 1236), k may be regarded as capable of variation to an extent $O(1)$ on either side, that is to say that we may replace k by any other integer k' lying between $k - A$ and $k + A$, without affecting the truth of the equation. That this is so if k is increased is obvious from what precedes, as the inequality (2. 1221) is still satisfied; but when k is decreased an independent proof is required.

We consider separately the effects of such a variation on the two sides of the equation (2. 1236). As regards the left hand side, it is plain that our assertion will be true if

$$\int_0^{n} e^{z^2\pi ix}\cos 2z\pi a\,dz = O\sqrt{\frac{1}{x}}$$

uniformly for all values of n and a, and therefore certainly true if

$$\int_0^{n} e^{z^2\pi ix + 2z\pi ia}\,dz = O\sqrt{\frac{1}{x}}.$$

[1] The A in this formula is of course not the *same* numerical constant as before.

But

$$\int_0^n e^{z^2 \pi i x + 2 z \pi i a}\, dz = e^{-\pi i a^2 / x} \int_0^n e^{\pi i x (z + a/x)^2}\, dz$$

$$= e^{-\pi i a^2 / x} \int_{a/x}^{n + a/x} e^{z^2 \pi i x}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi i a^2 / x} \int_{a/\sqrt{x}}^{n\sqrt{x} + a/\sqrt{x}} e^{\pi i u^2}\, du;$$

and this expression is evidently of the form desired.

We have now to consider the effect of a variation of k on the right hand side of (2. 1236). The difference produced by such a variation is plainly of the form

$$O \int_0^1 \frac{|e^{-2k\pi t} - e^{-2k'\pi t}|}{1 - e^{-2\pi t}} e^{2\pi t (nx + \theta)}\, dt$$

$$= O \int_0^1 e^{-2\pi t (k - nx - \theta)}\, dt$$

$$= O(1) = O \sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Thus finally we may regard the k which occurs on either side of (2. 1236) as capable of variation to an extent $O(1)$.

2. 125. We proceed now to replace the integrals which occur on the left hand side of (2. 1236) by integrals over the range $(0, \infty)$. We write

$$I_\nu = \int_0^n e^{z^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi z \cos 2z\pi\theta\, dz = \int_0^\infty - \int_n^\infty = I'_\nu - I''_\nu.$$

Now consider the integral

$$\int e^{z^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi z \cos 2z\pi\theta\, dz,$$

taken round the rectangular contour whose angular points are n, $n + X$,

$n+N+iH$, $n+iH$. The modulus of the subject of integration is less than a constant multiple of

$$e^{-2\pi\eta(\xi x-\nu-\theta)};$$

and from this it is easily deduced that, if

$$\nu+\theta<nx,$$

the contributions of the sides $(n+N,\ n+N+iH)$ and $(n+N+iH,\ n+iH)$ tend to zero as N and H tend to infinity, and so that the second integral which occurs in our expression for I_ν may be replaced by one taken along the line $(n,\ n+i\infty)$. In order that this transformation may be legitimate for $\nu=0, 1, \ldots, k'-1$ we must have

(2. 1251) $$k'<nx+1-\theta.$$

It is important to observe that this condition and the condition (2. 1221) cannot always be satisfied with $k=k'$; but that the difference between the least k such that $k>nx+\theta$ and the greatest k' such that $k'<nx+1-\theta$ cannot be greater than 1.[1]

On the assumption that (2. 1251) is satisfied, we have

$$2\sum_0^{k'-1}{}' I''_\nu=\int_n^{n+i\infty} e^{z^2\pi ix}\cos 2z\pi\theta\,\frac{\sin(2k'-1)\pi z}{\sin\pi z}\,dz$$

$$=i\int_0^{\infty} e^{(n^2-t^2)\pi ix-2nx\pi t}\cos 2(n+it)\pi\theta\,\frac{\sinh(2k'-1)\pi t}{\sinh\pi t}\,dt$$

$$=L,$$

say; and so, bearing in mind the results of the analysis of 2. 124,

(2. 1252) $$\sum_0^{n}{}' e^{\nu^2\pi ix}\cos 2\nu\pi\theta-2\sum_0^{k'-1}{}'\int_0^{n} e^{z^2\pi ix}\cos 2\nu\pi z\cos 2z\pi\theta\,dz$$

$$=K'-L+O\sqrt{\frac{1}{x}}.$$

[1] It is these facts which render necessary the analysis of 2. 124.

2. 126. We next write

$$L = \int_0^{\infty} = \int_0^1 + \int_1^{\infty} = L' + L'',$$

and we proceed to show that

$$L'' = O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

so that L may be replaced by L' in (2. 1252). The argument is practically the same as that of 2. 123. We have to consider a number of integrals of which

$$\text{(2. 1261)} \qquad \int_1^{\infty} \cos t^2 \pi x \cosh 2t\pi\theta\, e^{-2nx\pi t} \frac{\sinh (2k' - 1)\pi t}{\sinh \pi t}\, dt$$

is typical. Writing $2e^{-\pi t}/(1 - e^{-2\pi t})$ for $\operatorname{cosech} \pi t$, observing that the factor $1/(1 - e^{-2\pi t})$ is monotonic, and using the second mean value theorem as in 2. 123, we arrive at the result desired.

We may accordingly replace L by L' in (2. 1252). And our next step is to show that the k' which occurs in this modified form of (2. 1252) may be regarded as capable of variation to an extent $O(1)$. Here again our analysis is practically the same as some of our previous work (in 2. 124), and there is therefore no need to insist on its details. We may now write (2. 1252) in the form

$$\text{(2. 1262)} \qquad {\sum_0^n}' e^{\nu^2\pi i x} \cos 2\nu\pi\theta - 2 {\sum_0^{k-1}}' \int_0^{\alpha} e^{z^2\pi i x} \cos 2\nu\pi z \cos 2z\pi\theta\, dz$$

$$= \mathfrak{K} - \mathfrak{L} + O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

where

$$\text{(2. 1263)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K} &= i\int_0^1 e^{\pi i x(n^2 - t^2)} \frac{e^{-2k\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}} \{e^{2nx\pi t} \cos 2(n - it)\pi\theta - e^{-2nx\pi t} \cos 2(n + it)\pi\theta\}\, dt, \\ \mathfrak{L} &= i\int_0^1 e^{\pi i x(n^2 - t^2) - 2nx\pi t} \cos 2(n + it)\pi\theta \frac{\sinh (2k' - 1)\pi t}{\sinh \pi t}\, dt; \end{aligned} \right.$$

and, as the k's which occur in these equations may all be regarded as capable of variation to an extent $O(1)$, there is no longer any reason to distinguish between k and k'.

2. 127. Again

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{L} = \frac{1}{2} i \int_0^1 \frac{e^{\pi i x(n^2-t^2)}}{\sinh \pi t} Q\, dt, \tag{2. 1271}$$

where

$$\begin{aligned} Q &= e^{-(2k-1)\pi t}\{e^{2nx\pi t} \cos 2(n-it)\pi\theta - e^{-2nx\pi t} \cos 2(n+it)\pi\theta\} \\ &\quad - 2e^{-2nx\pi t} \sinh (2k-1)\pi t \cos 2(n+it)\pi\theta \\ &= 2 \cos 2n\pi\theta \cosh 2t\pi\theta \sinh (2nx-2k+1)\pi t \\ &\quad + 2i \sin 2n\pi\theta \sinh 2t\pi\theta \cosh (2nx-2k+1)\pi t. \end{aligned}$$

We select the value of k for which

$$-1 < 2nx - 2k + 1 < 1;$$

and the integral (2. 1271) splits up into two, of which it will be sufficient to consider the first, viz.

$$i \cos 2n\pi\theta \int_0^1 e^{\pi i x(n^2-t^2)} \cosh 2t\pi\theta \frac{\sinh (2nx-2k+1)\pi t}{\sinh \pi t} dt. \tag{2. 1272}$$

This is of the form

$$O(1) \int_0^1 e^{-t^2\pi i x} \cosh 2t\pi\theta \frac{\sinh \alpha\pi t}{\sinh \pi t} dt, \tag{2. 1273}$$

where $\alpha = |2nx - 2k + 1|$. It will be enough to consider the real part of this integral, the imaginary part being amenable to similar treatment.

The function

$$\frac{\sinh \alpha\pi t}{\sinh \pi t} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

decreases steadily from α as t increases from zero. Hence

$$\int_0^1 \cos \pi x t^2 \cosh 2t\pi\theta \frac{\sinh \alpha\pi t}{\sinh \pi t}\, dt = \alpha \int_0^{\tau} \cos \pi x t^2 \cosh 2t\pi\theta\, dt$$

$$= \alpha \cosh 2\tau\pi\theta \int_{\tau'}^{\tau} \cos \pi x t^2\, dt,$$

τ and τ' denoting positive numbers less than 1. Since $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \theta \leq 1$, the first factor here is of the form $O(1)$; and the second is (cf. 2. 123) of the form $O\sqrt{\frac{1}{x}}$. Hence finally

$$\mathfrak{R} - \mathfrak{L} = O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

and so the left hand side of (2. 1262) is itself of the form $O\sqrt{\frac{1}{x}}$.

2. 128. But

$$\int_0^{\infty} e^{z^2\pi i x} \cos 2\nu\pi z \cos 2z\pi\theta\, dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i(\theta^2+\nu^2)/x} \cos \frac{2\nu\pi\theta}{x}.[1]$$

Substituting this expression in (2. 1262), and observing that k may now be supposed to be the integral part of nx, we obtain

Theorem 2. 128 *If* $0 < x < 1$, $0 \leq \theta \leq 1$, *then*

$$\sum^{n} e^{\nu^2\pi i x} \cos 2\nu\pi\theta - \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x} \sum^{nx} e^{-\nu^2\pi i/x} \cos \frac{2\nu\pi\theta}{x} = O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

where $O\sqrt{\frac{1}{x}}$ *denotes a function of* n, x, *and* θ *which is in absolute value less than a constant multiple of* $\sqrt{\frac{1}{x}}$.

We have omitted the lower limits of summation, and the dashes, which are now plainly irrelevant.

We can also prove, by arguments of the same character as those of §§ 2. 121 *et seq.*,

[1] Lindelöf, *l. c.*, p. 44.

Theorem 2. 1281. *Under similar conditions*

$$\sum^{n} e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \pi i x} \cos (2\nu - 1)\pi\theta - \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x} \sum^{nx} (-1)^{\nu} e^{-\nu^2 \pi i/x} \cos \frac{2\nu\pi\theta}{x} = O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$\sum^{n} (-1)^{\nu} e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi\theta - \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x} \sum^{nx} e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \pi i/x} \cos \frac{(2\nu-1)\pi\theta}{x} = O\sqrt{\frac{1}{x}}.$$

It will hardly be necessary for us to exhibit any details of the proofs, and we will only remark that the integral

$$\int e^{z^2\pi i x} \cos 2z\pi\theta \cot \pi z\, dz$$

of 2. 121 is replaced by one or other of the integrals

$$\int e^{z^2\pi i x} \cos 2z\pi\theta \tan \pi z\, dz, \quad \int e^{z^2\pi i x} \cos 2z\pi\theta \operatorname{cosec} \pi z\, dz.$$

It is on the transformation formulae contained in Theorems **2. 128** and **2. 1281** that all the results of this part of the paper will depend.

2. 13. We have the following system of formulae:

$$
\begin{aligned}
s_n^2(x+1, \theta) &= \sqrt{i}\, s_n^2(x, \theta), \\
s_n^3(x+1, \theta) &= s_n^4(x, \theta), \\
s_n^4(x+1, \theta) &= s_n^3(x, \theta), \\
s_n^2(-x, \theta) &= \bar{s}_n^2(x, \theta), \\
s_n^3(-x, \theta) &= \bar{s}_n^3(x, \theta), \\
s_n^4(-x, \theta) &= \bar{s}_n^4(x, \theta),
\end{aligned} \tag{2. 131}
$$

$$s_n^2(x, \theta) = \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x} s_{nx}^4\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) + O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$s_n^3(x, \theta) = \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x} s_{nx}^3\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) + O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$s_n^4(x, \theta) = \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x} s_{nx}^2\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) + O\sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Here $\bar{s}_n$ denotes the conjugate of s_n. It will be convenient in what follows to write $O\sqrt{\frac{1}{x}}$ in the equivalent form

$$\frac{O(1)}{\sqrt{x}}.$$

Now suppose that x is expressed in the form of a simple continued fraction

(2. 132) $$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \cdots,$$

and write

(2. 133) $$x = \frac{1}{a_1 + x_1},\ x_1 = \frac{1}{a_2 + x_2},\ \ldots,$$

$$\theta_1 = \frac{\theta}{x} - \left[\frac{\theta}{x}\right],\ \theta_2 = \frac{\theta_1}{x_1} - \left[\frac{\theta_1}{x_1}\right],\ \ldots,$$

so that

$$0 < x_r < 1,\ \ 0 \leq \theta_r < 1$$

for all values of r. Further, let λ_r denote an unspecified index chosen from the numbers 2, 3, 4; and let ω denote a number whose modulus is unity but whose exact value will vary from equation to equation.

This being so, we have

$$\begin{aligned} s_n^{\lambda}(x,\ \theta) &= \frac{\omega}{\sqrt{x}} s_{nx}^{\lambda_1}\left(-\frac{1}{x},\ \frac{\theta}{x}\right) + \frac{O(1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{x}} s_{nx}^{\lambda_1}(-a_1 - x_1,\ \theta_1) + \frac{O(1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{x}} s_{nx}^{\lambda_1}(-x_1,\ \theta_1) + \frac{O(1)}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{x}} \bar{s}_{nx}^{\lambda_1}(x_1,\ \theta_1) + \frac{O(1)}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Transforming $s_{nx}^{\lambda_1}(x_1,\ \theta_1)$ in the same way, we obtain

$$s_n^{\lambda}(x,\ \theta) = \frac{\omega}{\sqrt{x x_1}} s_{nxx_1}^{\lambda_2}(x_2,\ \theta_2) + O(1)\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x x_1}}\right\}.$$

Repeating the argument, we find

$$(2.134)\qquad \begin{aligned} s_n^\lambda(x,\theta) &= \frac{\omega}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}}\, s^{\lambda_\nu}_{n x x_1 \ldots x_{\nu-1}}(x_\nu, \theta_\nu) \\ &\quad + O(1)\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}}\right\} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu}}\, s^{\lambda_\nu}_{n x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu}(x_{\nu+1}, \theta_{\nu+1}) \\ &\quad + O(1)\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu}}\right\}. \end{aligned}$$

Now

$$x_r \leq \frac{1}{1 + x_{r+1}},$$

$$(2.135)\qquad x_r x_{r+1} \leq \frac{x_{r+1}}{1 + x_{r+1}} < \frac{1}{2},$$

and so $x x_1 \ldots x_r \to 0$ as $r \to \infty$. We may therefore define ν by the inequalities

$$(2.136)\qquad n x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu < 1 \leq n x x_1 \ldots x_{\nu-1}.$$

This being so, the first of the equations (2.134) gives

$$(2.137)\qquad \begin{aligned} s_n^\lambda(x,\theta) &= O\left(n\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}\right) \\ &\quad + O(1)\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}}\right\}, \end{aligned}$$

and the second gives

$$(2.1371)\qquad s_n^\lambda(x,\theta) = O(1)\left\{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu}}\right\}.$$

We have thus two inequalities for $s_n^\lambda(x,\theta)$, the further study of which depends merely on an analysis of the continued fraction (2.132). These inequalities, however, may be simplified. For, by (2.135), $x_r x_{r+1} < \frac{1}{2}$, and so

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}} \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}}\left(1 + \sqrt{x_{\nu-1}} + \sqrt{x_{\nu-2} x_{\nu-1}} + \cdots + \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_{\nu-1}}\right) \end{aligned}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}} \left(1 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \right)$$

$$< \frac{K}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}}.$$

Hence (2. 137) may be replaced by

$$(2.\ 138) \qquad s_n^\lambda(x,\ \theta) = O\left(n\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}\right) + O\frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1}}};$$

and similarly (2. 1371) may be replaced by

$$(2.\ 1381) \qquad s_n^\lambda(x,\ \theta) = O\frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu}}.$$

2. 14. From (2. 138) and (2. 1381) we can very easily deduce the principal results of this part of the paper.

Theorem 2. 14. *We have*

$$s_n(x,\ \theta) = o(n)$$

for any irrational x, and uniformly for all values of θ. In particular, if $\theta = 0$, we have

$$s_n = o(n)$$

Since $n x x_1 \ldots x_{\nu-1} \geq 1$, the second term on the right hand side of (2. 138) is of the form $O(\sqrt{n})$. And since $x x_1 \ldots x_{\nu-1} \to 0$ as $\nu \to \infty$, the first is of the form $o(n)$. Thus the theorem is proved.

Theorem 2. 141. *If the partial quotients a_n in the expression of x as a continued fraction are limited, then*

$$s_n(x,\ \theta) = O(\sqrt{n}),$$

uniformly in respect to θ; and in particular

$$s_n = O(\sqrt{n}).$$

These results hold, for example, when x is any quadratic surd, pure or mixed.

For, if $a_n < K$, x_ν lies between

$$\frac{1}{K}, \quad \frac{K}{K+1}$$

and so

$$x x_1 \ldots x_{\nu-1} x_\nu > x x_1 \ldots x_{\nu-1} / K > 1 / (n K).$$

Using (2. 1381), the result of the theorem follows.

Theorem 2. 142. *If* $a_n = O(n^\varrho)$, *then*

$$s_n(x, \theta) = O\left\{ n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}\varrho} \right\}.$$

Theorem 2. 143. *If* $a_n = O(e^{\varrho n})$, *where* $\varrho < \frac{1}{2} \log 2$, *then*

$$s_n(x, \theta) = O\left(n^{\frac{1}{2} + \frac{\varrho}{\log 2} + \varepsilon} \right),$$

for any positive value of ε.

For

$$x x_1 \ldots x_\nu < \frac{1}{n} < x x_1 \ldots x_{\nu-1} < 2^{-\frac{1}{2}\mu},$$

where $\mu = \nu$ or $\mu = \nu - 1$, according as ν is even or odd. Hence

$$n > 2^{\frac{1}{2}\mu},$$

$$\nu < \frac{(2 + \varepsilon) \log n}{\log 2}.$$

But

$$x x_1 \ldots x_\nu > H \nu^{-\varrho} x x_1 \ldots x_{\nu-1},$$

where H is a constant, and so

$$\frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_\nu}} = O\left(\nu^{\frac{1}{2}\varrho} \sqrt{n} \right) = O\left\{ n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{1}{2}\varrho} \right\}.$$

This proves Theorem **2. 142**. Similarly, under the conditions of Theorem **2. 143**, we have

$$\frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_\nu}} = O\left(e^{\frac{1}{2}\varrho\nu} \sqrt{n} \right) = O\left(n^{\frac{1}{2} + \frac{\varrho}{\log 2} + \varepsilon} \right).$$

2. 15. Suppose now that $\varphi(n)$ is a logarithmico-exponential function[1] (L-function) of n such that the series

$$\sum \frac{1}{\varphi(n)} \tag{2. 151}$$

is, to put it roughly, near the boundary between convergence and divergence, so that the increase of $\varphi(n)$ is near to that of n. Then, arguing as in 2. 14, we see that, if $a_n = O\{\varphi(n)\}$,

$$x x_1 \ldots x_\nu > \frac{H}{\varphi(\nu)} x x_1 \ldots x_{\nu-1}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{x x_1 \ldots x_\nu}} = O\sqrt{n\varphi(\nu)} = O\sqrt{n\varphi(\log n)}.$$

Now it has been proved by Borel and Bernstein[2] that the set of values of x for which

$$a_n = O\{\varphi(n)\}$$

is of measure zero when the series (2. 151) is divergent, and of measure unity when the series is convergent. Hence we obtain

Theorem 2. 15. *If $\varphi(n)$ is a logarithmico-exponential function of n such that*

$$\sum \frac{1}{\varphi(n)}$$

is convergent, then

$$s_n = O\sqrt{n\varphi(\log n)}$$

for almost all values of x. In particular, if δ is positive, then

$$s_n = O\left\{n^{\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}+\delta}\right\}$$

for almost all values of x.

It was this last result to which reference was made in 2. 11.

[1] Hardy, *Orders of Infinity*, p. 17.

[2] See Borel, *Rendiconti di Palermo*, Vol. 27, p. 247, and *Math. Annalen*, Vol. 72, p. 578; Bernstein, *Math. Annalen*, Vol. 71, p. 417 and Vol. 72, p. 585

2. 16. Suppose that a series $\sum u_n$ possesses the property that

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = O\{\psi(n)\},$$

ψ being a function which tends steadily to infinity with n; and let φ be a function which tends steadily to zero as $n \to \infty$, and satisfies the condition that

$$\sum \psi(n) \Delta \frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$$

is convergent. Then it follows immediately, by an elementary application of Abel's transformation, that the series

$$\sum \frac{\varphi(n)}{\psi(n)} u_n$$

is convergent. This obvious remark may be utilised to deduce a number of corollaries from some of our theorems. To give one instance only, it follows from Theorem **2. 15** that the series

$$\sum n^{-\alpha} e^{n^2 \pi i x} \cos 2 n \pi \theta \qquad \left(\alpha > \frac{1}{2}\right)$$

is convergent for almost all values of x, and, for any particular x, uniformly with respect to θ.

A rather more subtle deduction can be made from Theorem **2. 14**. It does not follow that, because $s_n = o(n)$, the series $\sum \frac{u_n}{n}$ is convergent; and indeed we shall see later that it is not true that (*e. g.*) the series

$$\text{(2. 161)} \qquad \sum \frac{e^{n^2 \pi i x}}{n}$$

is convergent for all irrational values of x. But it *is* true that, if $s_n = o(n)$, the series $\sum \frac{u_n}{n}$ is either convergent or not summable by any of Cesàro's means[1]; and this conclusion accordingly holds of the series (2. 161). Similarly, if x is such that $a_n = O(1)$, the series

$$\sum \frac{e^{n^2 \pi i x}}{\sqrt{n}}$$

[1] Hardy and Littlewood, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 11, p. 433.

possesses the same property. We shall see later that it is the second alternative which is true.

2. 17. So far we have dealt with series in which the parameter θ occurs in a cosine $\cos 2n\pi\theta$ or $\cos(2n-1)\pi\theta$. It is naturally suggested that similar results should hold for the corresponding series involving $\sin 2n\pi\theta$ and $\sin(2n-1)\pi\theta$; and this is in fact the case. These series are, from the point of view of the theory of functions, of a less elementary character: they are not limiting forms of series which occur in the theory of elliptic functions. But it is not difficult to make the necessary modifications in our analysis.

We write

$$(2.\ 171)\qquad \begin{cases} \sigma_n^2(x,\theta) = \displaystyle\sum_{\nu<n} e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2\pi i x} \sin(2\nu-1)\pi\theta \\ \sigma_n^3(x,\theta) = \displaystyle\sum_{\nu\leq n} e^{\nu^2\pi i x} \sin 2\nu\pi\theta \\ \sigma_n^4(x,\theta) = \displaystyle\sum_{\nu\leq n} (-1)^\nu e^{\nu^2\pi i x} \sin 2\nu\pi\theta \end{cases}$$

Theorem 2. 17. *If* $0<x<1$, $0\leq\theta\leq 1$, *then*

$$\sigma_n^2(x,\theta) = \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x}\, \sigma_{nx}^4\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) + O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$\sigma_n^3(x,\theta) = \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x}\, \sigma_{nx}^3\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) + O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

$$\sigma_n^4(x,\theta) = \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-\pi i\theta^2/x}\, \sigma_{nx}^2\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) + O\sqrt{\frac{1}{x}},$$

uniformly in respect to θ.

Let us consider, for example, the second of these equations. We start from the integral

$$\int e^{z^2\pi i x} \sin 2z\pi\theta\ \pi\cot\pi z\, dz,$$

and we arrive, by arguments practically the same as those of 2. 121—2. 127, at the equation

$$(2.\ 172)\qquad \sum^{n} e^{\nu^2\pi i x} \sin 2\nu\pi\theta - 2\sum^{nx}\int_0^\infty e^{z^2\pi i x}\cos 2\nu\pi z \sin 2z\pi\theta\, dz = O\sqrt{\frac{1}{x}}$$

The only substantial differences between the reasoning required for the proof of this equation and those which we used before lie in the facts, first that some of the signs of the principal value which we then used are now unnecessary, and secondly that the two integrals along the axis of imaginaries no longer cancel one another. These integrals, however, are of the form

$$\int_0^\infty e^{-t^2\pi ix} \sinh 2t\pi\theta \frac{e^{-2k\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}\, dt,$$

and are easily seen to be small when k is large. They are accordingly without importance in our argument.

The integrals which occur in (2. 172), unlike the corresponding cosine integrals, cannot be evaluated in finite form. We have, however,

$$2\int_0^\infty e^{z^2\pi ix} \cos 2\nu\pi z \sin 2z\pi\theta\, dz = I(\nu+\theta) - I(\nu-\theta), \tag{2. 173}$$

where

$$I(A) = \int_0^\infty e^{z^2\pi ix} \sin 2z\pi A\, dz. \tag{2. 174}$$

Now let us consider the integral

$$\int e^{z^2\pi ix + 2z\pi iA}\, dz \qquad (A > 0)$$

taken round the contour defined by the positive halves of the axes and a circle of radius R. It is easy to show, by a type of argument familiar in the theory of contour integration, that the contribution of the curved part of the contour tends to zero as $R \to \infty$. Hence we deduce

$$\int_0^\infty e^{z^2\pi ix + 2z\pi iA}\, dz = i\int_0^\infty e^{-t^2\pi ix - 2t\pi A}\, dt;$$

and so

$$I(A) = \frac{1}{i} \int_0^{\gamma} e^{z^2 \pi i x} (e^{2 z \pi i A} - \cos 2 z \pi A)\, dz$$

$$= i \int_0^{\infty} e^{z^2 \pi i x} \cos 2 z \pi A\, dz + \int_0^{\infty} e^{-t^2 \pi i x - 2 t \pi A}\, dt.$$

Again, it is easy to show that

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2 \pi i x - 2 t \pi A}\, dt = \frac{\beta}{A} + O\left(\frac{1}{A^3}\right),$$

where $\beta = 1/2\pi$. Hence

$$I(\nu + \theta) - I(\nu - \theta) = i \int_0^{\gamma} e^{z^2 \pi i x} \{\cos 2(\nu + \theta) \pi z - \cos 2(\nu - \theta) \pi z\}\, dz$$

$$(2.\ 175) \qquad + \frac{\beta}{\nu + \theta} - \frac{\beta}{\nu - \theta} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{i}{x}}\, e^{-(\theta^2 + \nu^2) \pi i / x} \sin \frac{2 \nu \pi \theta}{x} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right).$$

From (2. 171), (2. 173), and (2. 175) we at once deduce the second equation of Theorem **2. 17**; and the others may be established similarly.

2. 18. From Theorem **2. 17** follow the analogues for the sums σ of those already established for the sums s. Thus we have

Theorems 2. 18, 2. 181—4. *The results established in Theorems* 2. 14, 2. 141—3, 2. 15, *for series involving cosines, are true also for the corresponding series involving sines.*

2. 19. The preceding results have a very interesting application to the theory of Taylor's series.

Let

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

be a power series whose radius of convergence is unity, and let, as usual, $M(r)$ denote the maximum of $|f|$ along a circle of radius r less than 1. Further, suppose that

$$M(r) = O(1 - r)^{-\alpha}.$$

and let

$$g(r) = \sum |a_n| r^n.$$

Then it is known that[1]

$$g(r) = O(1-r)^{-\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Further, it is known that the number $\frac{1}{2}$ occurring in the last formula cannot be replaced by any smaller number, that is to say that, if δ is any positive number, a function $f(z)$ can be found such that the difference between the orders of $g(r)$ and $M(r)$ is $\frac{1}{2} - \delta$.[2] But so far as we are aware, no example has been given of a function $f(z)$ such that the orders of $g(r)$ and $M(r)$ differ by as much as $\frac{1}{2}$. We are now in a position to supply such an example.

Let

$$f(z) = \sum e^{n^2\pi i \xi} z^n,$$

where ξ is an irrational of the type considered in Theorem **2. 141**, so that the partial quotients in its expression as a continued fraction are limited. Then, if $z = re^{2\pi i\theta}$, we have, by Theorems **2. 141** and **2. 181**,

$$S_n = \sum^n e^{\nu^2\pi i\xi + 2\nu\pi i\theta} = O(\sqrt{n}),$$

uniformly in θ; and from this it follows that

$$f(z) = f(re^{2\pi i\theta}) = \sum r^n e^{n^2\pi i\xi + 2n\pi i\theta} = O\sqrt{\frac{1}{1-r}},$$

uniformly in θ. Hence

$$M(r) = O\sqrt{\frac{1}{1-r}},$$

while

$$g(r) = \sum r^n = \frac{1}{1-r}.$$

---

[1] Hardy, *Quarterly Journal*, Vol. 44, p. 147.

[2] Hardy, *l. c.*, p. 156.

Thus the orders of $g(r)$ and $M(r)$ differ by exactly $\frac{1}{2}$. If we consider, instead of $f(z)$, the function

$$\sum n^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{n^2 \pi i \xi} z^n \qquad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right),$$

we obtain in the same way an example of a function such that

$$M(r) = O(1-r)^{-\alpha},$$

$$g(r) \sim \frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{(1-r)^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

These examples show that the equation

$$M(r) = O(1-r)^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0)$$

does *not* involve

$$g(r) = o(1-r)^{-\alpha-\frac{1}{2}};$$

a possibility which had before remained open.[1]

2. 19. Theorems **2. 14** etc. also enable us to make a number of interesting inferences as to the behaviour of the modular functions

$$\sum q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}, \quad \sum q^{n^2}, \quad \sum (-1)^n q^{n^2}$$

as q tends along a radius vector[2] to an irrational place $e^{\pi i \xi}$ on the circle of convergence. Thus from Theorem **2. 14** we can easly deduce that, if $f(q)$ denotes any one of these functions, then

$$f(q) = o(1-|q|)^{-\frac{1}{2}};$$

and from Theorem **2. 141** that, if ξ is an irrational of the class there considered, then

$$f(q) = O(1-|q|)^{-\frac{1}{4}}.$$

[1] Hardy, *l. c.*, p. 150.

[2] Or along any 'regular path' which does not touch the circle of convergence

These results are, however, more easily proved by a more direct method, which enables us at the same time to assign certain *lower* limits for the magnitude of $|f(q)|$, and to show that Theorems **2. 14** *et seq* are in a certain sense the best possible of their kind. It is to the development of this method, which depends on a direct use of the ordinary formulae for the linear transformation of the ϑ-functions, that the greater part of the rest of the paper will be devoted.

2. 2. — Ω Theorems.

2. 20. We have occupied ourselves, so far, with the determination of certain upper limits for the magnitude of sums of the type s_n. Thus we proved that $s_n = o(n)$ for any irrational x, and that $s_n = O(\sqrt{n})$ for an important class of such irrationals, including for example the class of quadratic surds. But we have done nothing to show that these results are the best of their kind that are true. The theorems which follow will show that this is the case.

We shall begin, however, by proving a theorem of a more elementary character which involves no appeal to the formulae of the transformation theory.

Theorem 2. 20. *Suppose that $\varphi(n)$ is a positive decreasing function of n, such that the series $\sum \varphi(n)$ is divergent. Then it is possible to find irrationals x such that the series*

$$\sum \varphi(n)\, e^{n^2 \pi i x}$$

is not convergent. The same is true of the series

$$\sum \varphi(n)\, e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi i x}, \quad \sum (-1)^n \varphi(n)\, e^{n^2 \pi i x},$$

and of the real and imaginary parts of all these series.

Consider, for example, the real part of the first series. We shall suppose that, among the convergents p_ν / q_ν to x, there are infinitely many of the form $2\lambda/(4\mu + 1)$. Let (q_ν) be a subsequence selected from the denominators of these convergents. We are clearly at liberty to suppose that the increase of $a_{\nu+1}$, when compared with that of any number which depends only on q_ν and the function φ, is as rapid as we please.

We shall consider the sum

$$S_\nu = \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu - 1} \varphi(n) \cos(n^2 \pi x),$$

where A_ν is an integer large compared with q_ν but small compared with $q_{\nu+1}/q_\nu$. We shall suppose A_ν so chosen that

(2. 201) $$q_\nu^{-\frac{3}{2}} \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu} \varphi(n) \to \infty$$

(2. 202) $$a_{\nu+1} / A_\nu^3 q_\nu \to \infty;$$

and we shall show that, in these circumstances, $|S_\nu|$ tends to infinity with ν, and hence that the series

$$\sum \varphi(n) \cos(n^2 \pi x)$$

cannot converge.

We may consider, instead of S_ν, the sum

(2. 203) $$S'_\nu = \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu - 1} \varphi(n) \cos(n^2 \pi p_\nu / q_\nu).$$

For

$$S_\nu - S'_\nu = \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu - 1} \varphi(n) \{\cos(n^2 \pi x) - \cos(n^2 \pi p_\nu / q_\nu)\}.$$

Now

$$\left| n^2 \left(x - \frac{p_\nu}{q_\nu} \right) \right| = \frac{n^2}{q_\nu q'_{\nu+1}} < \frac{A_\nu^2 q_\nu}{q'_{\nu+1}},$$

where $a'_{\nu+1}$ is the complete quotient corresponding to the partial quotient $a_{\nu+1}$, and $q'_{\nu+1} = a'_{\nu+1} q_\nu + q_{\nu-1}$; and from this it follows that $|S_\nu - S'_\nu|$ is less than a constant multiple of

$$\frac{A_\nu^2 q_\nu}{q'_{\nu+1}} \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu - 1} \varphi(n),$$

and so of

$$A_\nu^3 q_\nu^2 / q'_{\nu+1} < A_\nu^3 q_\nu / a_{\nu+1}.$$

Thus $S_\nu - S'_\nu \to 0$ as $\nu \to \infty$, in virtue of (2. 202).

We may write S'_ν in the form

$$S'_\nu = \sum_{r=1}^{A_\nu - 1} \sum_{s=0}^{q_\nu - 1} \varphi(r q_\nu + s) \cos(s^2 \pi p_\nu / q_\nu).$$

If in this sum we replace $\varphi(r q_\nu + s)$ by $\varphi(r q_\nu)$, the error introduced is not greater than

$$\sum_{r=1}^{A_\nu - 1} \sum_{s=0}^{q_\nu - 1} \{\varphi(r q_\nu) - \varphi(r q_\nu + s)\} \leq q_\nu \sum_{r=1}^{A_\nu - 1} \{\varphi(r q_\nu) - \varphi[(r+1) q_\nu]\}$$

$$< q_\nu \varphi(q_\nu).$$

Thus, with an error not greater than $q_\nu \varphi(q_\nu)$, and *a fortiori* not greater than $q_\nu \varphi(1)$, we can replace S'_ν by

$$S''_\nu = \sum_{r=1}^{A_\nu - 1} \varphi(r q_\nu) \sum_{s=0}^{q_\nu - 1} \cos(s^2 \pi p_\nu / q_\nu) = \pm \sqrt{q_\nu} \sum_{r=1}^{A_\nu - 1} \varphi(r q_\nu). \tag{2. 204}$$

Now

$$\varphi(q_\nu) + \varphi(2 q_\nu) + \cdots + \varphi\{(A_\nu - 1) q_\nu\} \geq \frac{1}{q_\nu} \sum_{2q_\nu}^{A_\nu q_\nu} \varphi(n)$$

$$\geq \frac{1}{q_\nu} \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu} \varphi(n) - \varphi(1),$$

and so

$$|S''_\nu| \geq \frac{1}{\sqrt{q_\nu}} \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu} \varphi(n) - \sqrt{q_\nu}\, \varphi(1).$$

Hence

$$\frac{|S''_\nu|}{q_\nu \varphi(1)} > \frac{1}{\varphi(1)}\, q_\nu^{-\frac{3}{2}} \sum_{q_\nu}^{A_\nu q_\nu} \varphi(n) - \frac{1}{\sqrt{q_\nu}},$$

which tends to infinity with ν, in virtue of (2. 201). Hence S'_ν, and so S_ν, tends to infinity with ν; which proves the theorem.

In particular it is possible to find irrational values of x for which the series

$$\sum \frac{\cos(n^2 \pi x)}{n}, \quad \sum \frac{\cos(n^2 \pi x)}{n \log n}, \ldots$$

are not convergent.

2. 21. We shall find it convenient at this stage to introduce a new notation. We define the equation

$$f = \Omega(\varphi),$$

where φ is a positive function of a variable, which may be integral or continuous but which tends to a limit, as meaning that there exists a constant H and a sequence of values of the variable, themselves tending to the limit in question, such that

$$|f| > H\varphi$$

for each of these values. In other words, *$f = \Omega(\varphi)$ is the negation of $f = o(\varphi)$.* In the notation of Messrs Whitehead and Russell we should write

$$f = \Omega(\varphi) \,.=.\, \sim (f = o(\varphi)). \qquad Df.$$

2. 22. We shall now prove the following theorems.

Theorem 2. 22. *If x is irrational, then*

$$s_n = \Omega(\sqrt{n}).$$

Theorem 2. 221. *If φ is any positive function of n, which tends to zero as $n \to \infty$, then it is possible to find irrationals x such that*

$$s_n = \Omega(n\varphi).$$

These theorems show that the equation

$$s_n = O(\sqrt{n}),$$

established by Theorem **2. 141** for a particular class of values of x, cannot possibly be replaced by any better equation; and that the equation

$$s_n = o(n)$$

of Theorem **2. 14** is the best that is true of *all* irrationals. We shall deduce these theorems from certain results concerning the elliptic modular functions.

2. 23. We write

$$q = e^{\pi i \tau} = e^{\pi i(x+iy)} = e^{-\pi y+\pi i x}$$
$$= r e^{\pi i x} \qquad (x > 0,\ y > 0,\ 0 < r < 1).$$

$$\vartheta_2(0, \tau) = 2\sum_1^\infty q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\vartheta_3(0, \tau) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2},$$

$$\vartheta_4(0, \tau) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}.$$

We suppose that p_n/q_n is a convergent to

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots,$$

and write

$$p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = \eta_n = \pm 1.$$

We shall consider a linear transformation

$$T = \frac{c + d\tau}{a + b\tau},$$

where

$$\left.\begin{aligned} a &= p_n, & b &= -q_n, \\ c &= \eta_n p_{n-1}, & d &= -\eta_n q_{n-1}, \end{aligned}\right\} (p_n \textit{ odd}),$$

$$\left.\begin{aligned} a &= -p_n, & b &= q_n, \\ c &= -\eta_n p_{n-1}, & d &= \eta_n q_{n-1}, \end{aligned}\right\} (p_n \textit{ even}).$$

In either case $ad - bc = \eta_n^2 = 1$.

Finally, if a'_{n+1} is the complete quotient corresponding to a_{n+1}, we write

$$q'_{n+1} = a'_{n+1} q_n + q_{n-1},$$

and we take

$$y = 1/(q_n q'_{n+1}).$$

When

$$p_{n-1} \textit{ is even}, \quad p_n \textit{ is odd},$$

$$q_{n-1} \textit{ is odd}, \quad q_n \textit{ is even},$$

we shall say that the convergents p_{n-1}/q_{n-1}, p_n/q_n form a system of type

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}.$$

There are six possible types of system, viz.

$$\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & O \\ O & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix},$$

which we number

$$1^\circ, \ 2^\circ, \ 3^\circ, \ 4^\circ, \ 5^\circ, \ 6^\circ.$$

The following remark is of fundamental importance for our present purpose. *In any continued fraction whatever, one or other of the systems* 1°, 2°, 5°, 6° *must occur infinitely often.* This appears from the fact that the second column in cases 3° and 4° is O, O, and that all cases in which the first column is O, O fall under 1°, 2°, 5°, or 6°.

2. 24. In cases 1°, 2°, 5°, or 6° we have

$$\vartheta_3(0, \tau) = \frac{1}{\omega\sqrt{a + b\tau}}\, \vartheta(0, T),$$

where ω is an 8-th root of unity, and ϑ stands for one or other of ϑ_3 and ϑ_4.[1] Now

$$|a + b\tau| = |p_n - q_n x - q_n iy| = \frac{|\pm 1 - i|}{q'_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{q'_{n+1}}.$$

Also, if $Q = e^{\pi i T}$, we have

$$|Q| = e^{-\pi\lambda},$$

where

$$\lambda = \mathbf{I}(T) = \mathbf{I}\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = \mathbf{I}\left\{\frac{d}{b} - \frac{1}{b(a + b\tau)}\right\}$$

$$= \frac{y}{(1/q'_{n+1})^2 + q_n^2 y^2} = \frac{q'_{n+1}}{2q_n} > \frac{1}{2}.$$

Hence

$$|Q| < e^{-\frac{1}{2}\pi} < 1/(4.8) < .21,$$

$$2|Q| + 2|Q|^4 + \cdots < 2(.21) + 2(.21)^4 + \cdots$$

$$< \frac{1}{2}.$$

[1] *T. and M.*, Vol. 2, p. 262 (Table XLII).

$$|\vartheta(0,\ T)| = |1 \pm 2Q + 2Q^4 \pm \cdots| > \frac{1}{2}.$$

Consequently

$$|\vartheta_3(0,\ \tau)| > K\sqrt{q'_{n+1}} > K\sqrt{q_n q'_{n+1}} = K\sqrt{1/y}.$$

From this follows at once

Theorem 2. 24. *If $q = re^{\pi i x}$, where x is irrational, then*

$$1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} = \Omega\left\{\sqrt{\frac{1}{1-r}}\right\}$$

as $r \to 1$.

From this we can deduce Theorem 2. 22 as a corollary. For if we had

$$s_n = o(\sqrt{n}),$$

the series

$$1 + 2\sum_1^\infty e^{n^2\pi i x} r^{n^2} = \sum u_n r^n$$

would satisfy the condition

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = o(\sqrt{n}),$$

and so we should have

$$\sum u_n r^n = (1-r)\sum (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) r^n$$

$$= (1-r)\sum o(\sqrt{n})\, r^n$$

$$= o\left\{\sqrt{\frac{1}{1-r}}\right\};$$

an equation which Theorem 2. 24 shows to be untrue.

Again, let $\varphi(1/y)$ be any function which tends to zero with y. We have

$$|\vartheta_3(0,\ \tau)| > K\sqrt{q'_{n+1}} = K\sqrt{1/q_n y}.$$

We choose a value of x such that, for an infinity of values of n corresponding to one of the favourable cases 1°, 2°, 5°, 6°, we have

$$\sqrt{1/q_n} > \varphi(q_n q'_{n+1});$$

this may certainly be secured by supposing that a_{n+1} is sufficiently large. We have then

$$|\vartheta_3(0, \tau)| > K\sqrt{1/y}\,\varphi(1/y).$$

From this we deduce

Theorem 2. 241. *Given any function φ which tends to zero, it is possible to find irrational values of x such that*

$$1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} = \Omega\left\{\sqrt{\frac{1}{1-r}}\,\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}$$

when $q = re^{\pi i x}$ and $r \to 1$.

From this theorem Theorem **2. 221** follows as a corollary just as Theorem **2. 22** followed from Theorem **2. 24.**

2. 25. It is interesting to consider a little more closely the case in which x is an irrational for which $a_n = O(1)$.

Let us, instead of considering only the special value $1/(q_n q'_{n+1})$ of y, consider the range R_n defined by

$$\frac{1}{q'^2_{n+1}} \leq y \leq \frac{1}{q^2_n}$$

or

$$\frac{\eta}{q_n q'_{n+1}} \leq y \leq \frac{1}{\eta q_n q'_{n+1}},$$

where $\eta = q_n / q'_{n+1}$. It is clear that, for different values of n, these ranges cover up the *whole* range of variation of y. If now $y = \zeta/(q_n q'_{n+1})$, so that $\eta \leq \zeta \leq 1/\eta$, we have

$$\lambda = \frac{y}{(1/q'_{n+1})^2 + q_n^2 y^2} = \frac{\zeta}{1+\zeta^2}\,\frac{q'_{n+1}}{q_n}.$$

The least values of λ correspond to $\zeta = \eta,\ 1/\eta$; and then

$$\lambda = \frac{q'^2_{n+1}}{q^2_n + q'^2_{n+1}} \geq \frac{1}{2}.$$

Suppose first that n corresponds to a system of one of the types 1°, 2°, 5°, 6°. Then the argument of 2. 24 shows that the absolute value of $\vartheta(0, T)$ lies between $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$. If on the other hand n corresponds to a system of type [illegible] or 4°, we have

$$\vartheta_3(0,\ \tau) = \frac{1}{\omega\sqrt{a + b\tau}}\,\vartheta_2(0,\ T).$$

Now

$$\vartheta_2(0,\ T) = 2\,Q^{\frac{1}{4}}\,(1 + Q^2 + Q^6 + \cdots),$$

and the absolute value of the second factor lies between $\frac{3}{4}$ and $\frac{5}{4}$. On the other hand λ lies between $q'^2_{n+1}/(q_n^2 + q'^2_{n+1})$ and $q'_{n+1}/2\,q_n$, and *a fortiori* between $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2}(K+1)$, where K is the greatest value of a partial quotient. Hence in this case also $|\vartheta(0,\ T)|$ lies between fixed positive limits.

Thus, as the ranges R_n fill up the whole range of variation of y, we can determine two constants H_1, H_2 so that

$$\frac{H_1}{\sqrt{|a + b\tau|}} < |\vartheta_3(0,\ \tau)| < \frac{H_2}{\sqrt{|a + b\tau|}}.$$

But

$$\sqrt{|a + b\tau|} = \sqrt[4]{\left\{y\left(\frac{1}{q'^2_{n+1}\,y} + q_n^2\,y\right)\right\}}$$

and it is easy to see that the second factor under the radical lies between fixed positive limits. Hence we obtain

Theorem 2. 25. *If* $q = re^{\pi i x}$, *the partial quotients to* x *being limited, and* $r \to 1$, *then*

$$\left|1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}\right| \asymp \sqrt[4]{\frac{1}{1-r}}.\text{[1]}$$

2. 26. In the preceding discussion, the argument which showed that $\lambda > \frac{1}{2}$ was independent of any hypothesis as to the continued fraction. Hence we have in any case

$$|\vartheta_3(0,\ \tau)| < \frac{H_2}{\sqrt{|a + b\tau|}} < \frac{H_2}{\sqrt[4]{(1/q'_{n+1})^2 + q_n^2\,y^2}}$$

$$= O\left\{\frac{1}{\sqrt{q_n\,y}}\right\} = o\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right),$$

as $q_n \to \infty$. Hence we obtain

Theorem 2. 26. *For any irrational value of* x, *we have*

[1] The formula $f \asymp \varphi$ implies that $|f|/\varphi$ lies between fixed positive limits: see Hardy, *Orders of Infinity*, pp. 2, 5.

$$1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} = o\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{1-r}}\right\}.$$

This result may of course also be proved as a corollary of Theorem 2. 14, by reasoning analogous to that used in 2. 24. But the direct proof is none the less interesting.

2. 27. The argument used in 2. 24, in deducing Theorem 2. 22 from Theorem 2. 24, may be adapted so as to prove an interesting generalisation of the former theorem. Let us write, as before

$$1 + 2\sum_{1}^{\infty} e^{n^2\pi i x}\, r^{n^2} = \sum u_n r^n,$$

and suppose that $k!\, S_n^k / n^k$ is one of Cesàro's means associated with the series $\sum u_n$. Then

$$S_n^k = \Omega\left(n^{k+\frac{1}{4}}\right). \tag{2. 271}$$

For if this were not so, we should have

$$\sum u_n r^n = (1-r)^{k+1} \sum S_n^k r^n = (1-r)^{k+1} \sum o\left(n^{k+\frac{1}{4}}\right) r^n$$
$$= o\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{1-r}}\right\}.$$

From (2. 271) it follows that the series $\sum u_n$ cannot become summable (Ck) on the introduction of a convergence factor $n^{-\frac{1}{4}}$.[1] And from this we deduce

Theorem 2. 27. *The series*

$$\sum n^{-\alpha} e^{n^2\pi i x} \qquad \left(\alpha < \frac{1}{4}\right)$$

cannot be convergent, or summable by any of Cesàro's *means, for any irrational* x.

We need hardly remark that the same is true of

$$\sum n^{-\alpha} e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi i x}, \qquad \sum (-1)^n n^{-\alpha} e^{n^2\pi i x}.$$

On the other hand, if $\alpha > \frac{1}{4}$, all these series converge *presque partout* (2. 11, 2. 16).

[1] Hardy and Littlewood, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 11, p. 435

2. 3. — An application to the theory of trigonometrical series.[1]

2. 30. The problem of finding a trigonometrical series whose coefficients tend to zero, and which converges, if ever, only for a set of values of the argument of measure 0, was first formulated by FATOU[2] and first solved by LUSIN.[3] The results of the earlier part of this paper have led us to a solution of FATOU's problem which seems to us to have considerable advantages over LUSIN's.

We can, in fact, prove the following theorem, which is an extension of Theorem 2. 27.

Theorem 2. 30. *The series*

$$\sum n^{-\alpha} \cos (n^2 \pi x), \quad \sum n^{-\alpha} \sin (n^2 \pi x),$$

where $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, *are never convergent, or summable by any of* CESÀRO's *means, for any irrational value of* x.[4]

Considered simply as solutions of FATOU's problem, these series have, as against LUSIN's, two advantages. In the first place, they are series of a simple, natural, and elegant analytical form. In the second place, the problem of convergence is solved completely; there is no exceptional set of values of x for which doubt remains.[5]

2. 31. We proceed to the proof of Theorem 2. 30. This theorem is a corollary of

[1] An abstract of the contents of this part of the paper appeared, under the title »Trigonometrical Series which Converge Nowhere or Almost Nowhere», in the *Records of Proceedings of the London Math. Soc.* for 13 Febr. 1913.

[2] *Acta Mathematica,* Vol. 30, p. 398.

[3] *Rendiconti di Palermo,* Vol. 32, p. 386.

[4] The cosine series converges when x is a rational of the form $(2\lambda+1)/(2\mu+1)$ or $2\lambda/(4\mu+3)$, the sine series when x is a rational of the form $(2\lambda+1)/(2\mu+1)$ or $2\lambda/(4\mu+1)$ (see 2. 01). In the abstract referred to above this part of the result (which is of course trivial) was stated incorrectly.

[5] It is only since this paper was written that we have become aware of a different solution given by H. STEINHAUS (*Comptes Rendus de la Société Scientifique de Varsovie,* 1912, p. 223). STEINHAUS also solves the problem of convergence for his series completely; they converge, in fact, for *no* values of x. Thus in this respect our examples have no advantage over his; the advantage, if anywhere, is on his side. In respect of simplicity etc. our examples have the advantage over his as much as over LUSIN's.

Theorem 2. 31. *If* $q = re^{\pi i x}$, *where* x *is irrational, then, as* $r \to 1$, *both the real and the imaginary parts of*

$$f(q) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}$$

are of the form $\Omega\left\{\sqrt[4]{\frac{1}{1-r}}\right\}$.

In fact, when once this theorem has been established, Theorem 2. 30 follows from it in the same way as Theorem 2. 22 followed from Theorem 2. 24. And the proof of Theorem 2. 31 is in principle the same as that of Theorem 2. 24, though naturally more complicated.

Our notation will be the same as in 2. 23. We shall prove first that, *in cases* 1°, 2°, 5°, *and* 6°, *we have*

$$\text{(i)} \qquad |\vartheta_3(0, \tau)| > Ky^{-\frac{1}{4}},$$

$$\text{(ii)} \qquad \left|\operatorname{am} \vartheta_3(0, \tau) - \frac{1}{2}m\pi\right| > \delta$$

for all integral values of m, K *and* δ *being positive constants, provided either*

$$(\alpha) \quad a_{n+1} > 1$$

or

$$(\beta) \quad a_{n+1} = 1,\ a_{n+2} = 1.$$

We shall express this shortly by saying that 1°, 2°, 5°, 6° are *favourable cases*, except possibly when

$$a_{n+1} = 1,\ a_{n+2} > 1;$$

a 'favourable case' being one in which we can prove the inequalities

$$(2.\ 311) \qquad |\mathbf{R}\{\vartheta_3(0, \tau)\}| > Ky^{-\frac{1}{4}},\quad |\mathbf{I}\{\vartheta_3(0, \tau)\}| > Ky^{-\frac{1}{4}}.$$

We have

$$(2.\ 312) \qquad \vartheta_3(0, \tau) = \frac{1}{\omega\sqrt{a+b\tau}}\,\vartheta(0, T).$$

If $a_{n+1} > 1$,

$$|Q| = e^{-\pi q'_{n+1}/2q_n} < e^{-\pi} < \frac{1}{23};$$

and if $a_{n+1} = 1$, $a_{n+2} = 1$,

$$\frac{q'_{n+1}}{q_n} = 1 + \frac{1}{a'_{n+2}} + \frac{q_{n-1}}{q_n} > \frac{3}{2},$$

$$|Q| < e^{-\frac{3}{4}\pi} < \frac{1}{10}.$$

In either case

$$2|Q| + 2|Q|^4 + \cdots < \frac{1}{4},$$

and so

(2. 313) $$|\vartheta(0,\ T)| > \frac{3}{4}, \quad |\mathrm{am}\,\vartheta(0,\ T)| < \operatorname{arc\,tan}\frac{1}{4} < \frac{1}{12}\pi.$$

Again

$$a + b\tau = \pm(\eta_n + i)/q'_{n+1},$$

(2. 314) $$|a + b\tau|^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{4}}\sqrt{q'_{n+1}} > Ky^{-\frac{1}{4}},$$

(2. 315) $$\mathrm{am}\left\{(a + b\tau)^{-\frac{1}{2}}\right\} = -\frac{1}{8}\eta_n\pi \qquad \left(\mathrm{mod.}\ \frac{1}{2}\pi\right).$$

From (2. 312), (2. 313), (2. 314), and (2. 315) it follows, first that the modulus of $\vartheta_3(0,\ \tau)$ is greater than a constant multiple of $y^{-\frac{1}{4}}$ (as has been shown already under 2. 24), and secondly that

(2. 316) $$\mathrm{am}\,\vartheta_3(0,\ \tau) = -\frac{1}{8}\eta_n\pi + \left\{\frac{1}{12}\pi\right\} \qquad \left(\mathrm{mod.}\ \frac{1}{4}\pi\right),$$

where $\left\{\frac{1}{12}\pi\right\}$ denotes a number whose absolute value is less than $\frac{1}{12}\pi$. Hence am $\vartheta_3(0,\ \tau)$ must differ by at least

$$\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$$

from any multiple of $\frac{1}{2}\pi$; and so the cases which we are considering are all favourable.

2. 32. We shall now prove that, as $n \to \infty$, *favourable cases must recur infinitely often.* This will complete the proof of Theorem **2. 31**.

We represent the state of affairs, as regards the oddness or evenness of p_n and q_n, in a way which will be made most clear by an example. If every

p_n is odd, and q_n is alternately odd and even, we represent the continued fraction diagrammatically in the form

$$\begin{array}{l} O\ O\ O\ O\ O \dots \\ O\ E\ O\ E\ O \dots \end{array}$$

— and so in other cases.

Suppose first that $O\ O$ occurs infinitely often above. Then one or other of the systems

$$\begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O & O \\ E & O \end{pmatrix}$$

must occur infinitely often. If the first, which is system 2°, either favourable cases recur infinitely often, or the ensuing partial quotient is always 1. We represent this state of affairs by the symbol

$$\left.\begin{array}{cc} O & O \\ O & E \end{array}\right|.$$

In this case our diagram continues

$$\left.\begin{array}{cc} O & O \\ O & E \end{array}\right|\begin{array}{c} E \\ O \end{array};$$

and as $\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$ is case 5°, either favourable cases recur continually, or the next quotient is also 1, so that we have

$$\left.\begin{array}{cc} O & O \\ O & E \end{array}\right|\left.\begin{array}{c} E \\ O \end{array}\right|.$$

But then the first four letters represent a system of type 2° followed by two quotients $a_{n+1} = 1$, $a_{n+2} = 1$; and this is a favourable case. Thus if $\begin{pmatrix} O & O \\ O & E \end{pmatrix}$ recurs continually, favourable cases recur continually.

We consider next the result of supposing that $\begin{pmatrix} O & O \\ E & O \end{pmatrix}$ recurs continually. This is case 4°. If the diagram continues with an O above, it must continue in the form

$$\begin{array}{l} O\ O\ O \\ E\ O\ E \end{array}$$

and then we can repeat our previous argument. The only alternative is that it should continue

$$\begin{matrix} O & O & E \\ E & O & O \end{matrix}$$

— and as the last four letters form a system of type 6°, the next quotient must (in the unfavourable case) be 1. Hence we obtain

$$\begin{array}{ccc|c} O & O & E & O \\ E & O & O & E \end{array}.$$

The next quotient must also be 1; and so the system of type 6° gave in reality a favourable case.

We have thus proved that, whenever the succession $O\,O$ recurs continually above, we obtain an infinity of favourable cases. It only remains to consider the hypothesis that p_n is alternately odd and even.

If we have $O\,E$ above, we have one or other of the systems $\begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}$; systems 5° and 6°. Thus we have a favourable case unless $a_{n+1} = 1$. If the system is of type 5°, we are led to

$$\begin{array}{cc|c|} O & E & O \\ O & O & E \end{array}$$

— so that the system is favourable. On the other hand, if it is of type 6°, we are led to

$$\begin{array}{cc|c} O & E & O \\ E & O & O \end{array}.$$

As the next numerator is even, the next denominator is odd. Hence the next system is $\begin{pmatrix} O & E \\ O & O \end{pmatrix}$, and we have seen that this case must be favourable.

We have now examined all possible hypotheses, and found that they all involve the continual recurrence of favourable cases. Thus Theorem **2. 31** is established.

2. 33. From this theorem we can, as was explained in 2. 31, deduce Theorem **2. 30** as a corollary. The latter theorem has an interesting consequence which we have not seen stated explicitly.

The series

$$\sum n^{-\alpha} \cos (n^2 \pi x), \quad \sum n^{-\alpha} \sin (n^2 \pi x),$$

where $\alpha \leq \frac{1}{2}$, *are not* FOURIER's *series.*

For if they were they would be summable (C 1) almost everywhere, by a theorem of LEBESGUE.[1] It follows that trigonometrical series exist, such that

$$\sum (|a_n|^{2+\delta} + |b_n|^{2+\delta})$$

is convergent for every positive δ,[2] which are not FOURIER's series. This is of interest for the following reason. If $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ is convergent, the series is the FOURIER's series of a function whose square is summable.[3] Further if p is any odd integer, and

$$\sum \left(|a_n|^{1+\frac{1}{p}} + |b_n|^{1+\frac{1}{p}}\right)$$

is convergent, then the function has its $(1 + p)$-th power summable.[4] It would be natural to suppose that the RIESZ-FISCHER Theorem might be capable of extension in the opposite direction. One might expect, for example, to find that a series for which

$$\sum (|a_n|^{1+p} + |b_n|^{1+p})$$

is convergent must be the FOURIER's series of a function whose $\left(1 + \frac{1}{p}\right)$-th power is summable. That this is not true has been shown by YOUNG, by means of the series

[1] *Math. Annalen,* Vol. 61, p. 251. See also *Leçons sur les séries trigonométriques,* p. 94 where however the proof is inaccurate. A FOURIER's series is in fact summable ($C\delta$), for any positive δ, almost everywhere (HARDY, *Proc. Lond. Math. Soc.,* Vol. 12 p. 365). That our series are not FOURIER's series when $\alpha < \frac{1}{2}$ can in fact be inferred merely from their non-convergence, since to replace $n^{-\alpha}$ by $n^{-\beta}$, where β is any number greater than α, would, if they were FOURIER's series, render them convergent almost everywhere (YOUNG, *Comptes Rendus*, 23 Dec. 1912

[2] Or even for which

$$\sum \frac{|a_n|^2 + |b_n|^2}{(\log n)^{1+\delta}}$$

is convergent.

[3] This is the 'RIESZ-FISCHER Theorem'.

[4] W. H. YOUNG, *Proc. Lond. Math. Soc.*, Vol. 12, p. 71

$$\sum \frac{\cos nx + \sin nx}{n^{\frac{1}{4}} (\log n)^{\frac{1}{2}}}$$

— here $p = 3$. Our examples however show a good deal more, viz. that as soon as the 2 which occurs in the Riesz-Fischer Theorem is replaced by any higher index, the series ceases to be necessarily a Fourier's series at all.

2. 34. There are other classes of series the theory of which resembles in many respects that of the series studied in this paper. One such class comprises such series as

$$\sum \operatorname{cosec} n\pi x, \quad \sum (-1)^n \operatorname{cosec} n\pi x$$

and the corresponding series in which the cosecant is replaced by a cotangent: these series are limiting forms of q-series such as

$$\sum \frac{q^n}{1 - q^{2n}}.$$

Another class comprises the series

$$\sum \left\{ (nx) - \frac{1}{2} \right\}, \quad \sum (-1)^n \left\{ (nx) - \frac{1}{2} \right\}$$

and the corresponding series in which $(nx) - \frac{1}{2}$ is replaced by $\overline{nx}$. We have proved a considerable number of theorems, relating to these various series, of which we hope to give a systematic account on some future occasion.

Contents.

SUR LES FAMILLES DE FONCTIONS MULTIFORMES ADMETTANT DES VALEURS EXCEPTIONNELLES DANS UN DOMAINE.

PAR

M. GEORGES RÉMOUNDOS

à Athènes.

Introduction.

1. On sait que en 1904 M. Landau a découvert un théorème qui apporte au premier des célèbres théorèmes de M. Picard une précision nouvelle, qui consiste à donner une propriété commune à toute une famille de fonctions holomorphes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine.

Les valeurs exceptionnelles jouent un rôle important au point de vue de la convergence uniforme des séries de fonctions holomorphes, d'après les résultats de recherches récentes de MM. Vitali, Severini, Landau, Carathéodory et Montel.

Comme tous ces auteurs ne se sont occupés que de fonctions holomorphes ou méromorphes dans un domaine, je me suis proposé d'étudier les mêmes problèmes pour les familles de fonctions multiformes dans un domaine et cette étude fait le sujet de ce travail.

J'établis des théorèmes analogues à celui de M. Landau et concernant des familles de fonctions algébroïdes finies dans un domaine qui admettent deux valeurs exceptionnelles ou un domaine exceptionnel ou une ligne exceptionnelle. Pour étudier le rôle des valeurs exceptionnelles au point de vue de la convergence uniforme des séries de fonctions algébroïdes, je donne les définitions suivantes:

Étant donnée une série:

$$f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots \qquad (s)$$

de fonctions algébroïdes à ν branches finies dans un domaine D, je dis qu'un nombre a est une limite de convergence d'ordre de multiplicité K de la série (s) en un point z_0 de D, lorsque, étant donné un nombre arbitrairement petit ε, l'inégalité:

$$|f_n(z_0) - a| < \varepsilon$$

est satisfaite à partir d'une valeur de n pour K branches de $f_n(z)$.

Si $K = 1$ le nombre a est une limite simple, si $K > 1$ le nombre a est une limite multiple de convergence.

Nous dirons que la série:

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0), \ldots,\ f_n(z_0) \ldots$$

converge, lorsque la somme des ordres (de multiplicité) de toutes ses limites de convergence est égal à ν. On peut, alors, dire que la série admet ν limites de convergence distinctes ou non.

Supposons que la série (s) converge en tous les points du domaine D et soient $\lambda_1(z),\ \lambda_2(z),\ \lambda_3(z), \ldots \lambda_m(z)$ les limites de convergence d'ordre respectivement égal à $K_1,\ K_2,\ K_3, \ldots K_m$.

Nous dirons que la convergence est uniforme lorsque, à chaque nombre positif ε, arbitrairement petit, nous pouvons faire correspondre un entier n_1 tel que pour $n > n_1$ et pour tous les points du domaine D les inégalités:

$$|\lambda_1(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad |\lambda_2(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \quad |\lambda_3(z) - f_n(z)| < \varepsilon, \ldots, \quad |\lambda_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

soient satisfaites la première pour les K_1 branches, la seconde pour les K_2 branches, et ainsi de suite, la dernière pour les K_m branches de $f_n(z)$.

Les limites $\lambda_1(z),\ \lambda_2(z), \ldots,\ \lambda_m(z)$ peuvent être constantes pour tous les points du domaine D.

Nous dirons aussi que la constante infinie est une limite de convergence uniforme de la série (s), si à chaque nombre positif ε correspond un entier n_1 tel que l'inégalité:

$$\frac{1}{|f_n(z)|} < \varepsilon$$

soit satisfaite pour $n > n_1$ pour tout point z intérieur à D et pour une au moins

des branches de $f_n(z)$. S'il en est ainsi pour K branches de $f_n(z)$, la constante infinie sera une limite de convergence uniforme d'ordre K.

Je démontre que les fonctions algebroïdes à ν branches finies dans un domaine D, qui y admettent un domaine exceptionnel ou une ligne exceptionnelle, forment une famille *normale;* j'entends par là que: de toute suite infinie de fonctions de la famille nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergeant uniformément vers des fonctions algébroïdes et finies dans le domaine D ou vers la constante infinie, dont le nombre total des branches est égal à ν.

Une limite constante est considérée comme ayant un nombre de branches égal à son ordre. Nous établissons ensuite l'extension aux séries de fonctions algébroïdes dans un domaine des théorèmes bien connus de STIELTJES et de MM. OSGOOD, ARZELÁ, VITALI et MONTEL sur la convergence des séries de fonctions holomorphes.

Nous faisons des applications des résultats ci-dessus indiqués aux fonctions ayant une infinité de branches en complétant ainsi d'autres obtenus par M. BOUTROUX. Nous obtenons aussi d'autres théorèmes se rattachant intimement au but de ce travail.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans deux Notes insérées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris:* Tome CLVI (1er semestre 1913), 1) Sur les familles de fonctions algébroïdes (862—865), 2) Sur les séries et les familles de fonctions algébroïdes dans un domaine (1141—1144).

CHAPITRE I.

Un théorème sur les valeurs exceptionnelles de quelques familles de fonctions algébroïdes.

2. Dans un travail publié récemment dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Le théorème de M. PICARD et les fonctions algébroïdes, tomo XXXV, Anno 1913, Adunanza del 22 Dicembre 1912) nous avons établi le théorème suivant:

Théorème I. *Soit* $u = a(z)$ *une fonction algébroïde finie à distance finie et déterminée par l'équation:*

$$F(z, u) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \cdots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n(z) &= a_n + b_n z + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

et u_1 *un nombre différent des racines des équations:*

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + \cdots + a_{n-2} u + a_{n-1} = 0$$

$$Q(u) = b_n u^{n-1} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix} u^{n-2} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} \\ a_n & b_n \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a_n & b_n \end{vmatrix} = 0. \tag{2'}$$

Si nous envisageons aussi la fonction algébroïde $u = \mathrm{a}_1(z)$ *définie par l'équation:*

$$f(z, u) = u^{n-1} + A_1(z) u^{n-2} + A_2(z) u^{n-3} + \cdots + A_{n-1}(z) = 0$$

il existe un cercle

$$|z| < R = R(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$$

dont le rayon dépend seulement des nombres $n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ *[et nullement des autres coefficients des séries* (2)], *à l'intérieur duquel l'une au moins des équations:*

$$\mathrm{a}(z) = 0, \ \mathrm{a}(z) = u_1, \ \mathrm{a}_1(z) = u_1$$

admet des racines. Le rayon R *est plus grand que la fonction* $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ *indiquée par M.* Landau *dans ses travaux*[1] *et déterminée complètement par M.* Carathéodory[2], *les* γ_0 *et* γ_1 *ayant les valeurs*

$$\gamma_0 = -\frac{a_n}{u_1 P(u_1)}, \quad \gamma_1 = -\frac{Q(u_1)}{u_1 [P(u_1)]^2}. \tag{3}$$

Nous retrouverons ici ce théorème comme cas particulier d'un autre (théorème IV de ce travail). La fonction $\mathrm{a}_1(u)$, qui figure dans l'énoncé du théorème précédent, sera appelée *adjointe* par rapport à l'algébroïde donnée $\mathrm{a}(z)$.

[1] a) Über eine Verallgemeinerung des Picard'schen Satzes [Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1904, s. 1118—1133]; b) Über den Picard'schen Satz [Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. LI (1906), s. 252—318].

[2] Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard (Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. CXLI (2e semestre 1905), pp. 1213—1215].

Nous utiliserons ce théorème pour établir un autre concernant les familles de fonctions analytiques algébroïdes définies par une équation de la forme:

$$F(z,\ u) = u^n + A_1(z)\,u^{n-1} + A_2(z)\,u^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(z)\,u + g(z) = 0. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \dots\dots\dots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n-1}(z) &= a_{n-1} + b_{n-1} z + c_{n-1} z^2 + \cdots \\ g(z) &= a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

où les coefficients $a_1,\ b_1,\ c_1, \ldots,\ a_2,\ b_2,\ c_2, \ldots,\ a_{n-1},\ b_{n-1},\ c_{n-1},\ \ldots$, des fonctions entières $A_1(z),\ A_2(z), \ldots,\ A_{n-1}(z)$ sont donnés et *fixes* ainsi que le premier coefficient a de la fonction entière $g(z)$, tandis que les coefficients $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3, \ldots$ sont des *paramètres variables.* Désignons par (f) cette famille de fonctions algébroïdes dépendant d'une infinité de paramètres variables et définie par l'équation (4).

Si nous considérons un nombre u_1 différent des racines de l'équation:

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

l'algébroïde adjointe, qui est évidemment *fixe* comme ne dépendant pas de paramètres variables, ne prend pas en $z = 0$ la valeur u_1. Par conséquent, si nous désignons par $\mathrm{a}_1(z)$ l'algébroïde adjointe et par ϱ le plus petit des modules de zéros de l'équation

$$\mathrm{a}_1(z) = u_1$$

nous aurons $\varrho \neq 0$. Remarquons que les nombres ϱ et γ_0 sont fixes, tandis que le nombre γ_1 dépend du paramètre variable μ_1.

D'après le théorème de M. Carathéodory, nous avons:

$$\varphi(\gamma_0,\ \gamma_1) = \frac{2\,I\,[\nu(\gamma_0)]}{|\gamma_1|\,|\nu'(\gamma_0)|} = \frac{1}{|\gamma_1|}\,K_1(\gamma_0) \tag{6}$$

$\nu(y)$ désignant l'inverse de la fonction modulaire et $I\,[\nu(y)]$ sa partie imaginaire; la quantité $K_1 = K_1(\gamma_0)$ est évidemment fixe.

Cherchons les valeurs du paramètre μ_1 qui satisfont à l'inégalité:

$$\frac{K_1}{|\gamma_1|} < \varrho \quad \text{ou} \quad |\gamma_1| > \frac{K_1}{\varrho}$$

ou bien:

$$\frac{|Q(u_1)|}{|u_1[P(u_1)]^2|} > \frac{K_1}{\varrho};$$

elle s'écrit:

$$|Q(u_1)| > \frac{K_1}{\varrho} |u_1| |P(u_1)|^2 \quad \text{ou bien} \quad |Q(u_1)| > K_2 \tag{7}$$

en posant:

$$K_2 = \frac{K_1}{\varrho} |u_1| |P(u_1)|^2 . \tag{8}$$

Pour notre famille (f) de fonctions algébroïdes la quantité $Q(u)$ est donnée par la formule:

$$Q(u) = \mu_1 u^{n-1} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & \mu_1 \end{vmatrix} u^{n-2} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & \mu_1 \end{vmatrix} u^{n-3} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ a & \mu_1 \end{vmatrix}$$

ou bien:

$$Q(u) = \mu_1 (u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \cdots + a_{n-1}) - a (b_1 u^{n-2} + b_2 u^{n-3} + \cdots + b_{n-1});$$

on peut écrire:

$$Q(u) = \mu_1 P(u) - a N(u) \tag{9}$$

en posant:

$$N(u) = b_1 u^{n-2} + b_2 u^{n-3} + \cdots + b_{n-1}. \tag{10}$$

Nous avons, donc:

$$|Q(u_1)| = |\mu_1 P(u_1) - a N(u_1)| \geq |\mu_1| |P(u_1)| - |a| |N(u_1)|$$

et, alors, l'inégalité (7) sera satisfaite si l'on a:

$$|\mu_1| |P(u_1)| - |a| |N(u_1)| > K_2$$

ou bien:

$$|\mu_1| > \frac{K_2 + |a| |N(u_1)|}{|P(u_1)|}. \tag{11}$$

Rappelons-nous que $P(u_1) \neq 0$.

Le second membre de cette inégalité (11) étant fixe, si nous posons:

$$\frac{K_2 + |a| |N(u_1)|}{|P(u_1)|} = K \tag{12}$$

l'inégalité:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < \varrho \text{ sera bien satisfaite si l'on a: } |u_1| > K. \tag{13}$$

Les formules (6), (8), (10) et (12) déterminent complètement la valeur de K qui est:

$$K = \frac{K_1 |u_1| |P(u_1)|^2 + \varrho |a| |N(u_1)|}{\varrho |P(u_1)|} \quad \text{où } K_1 = \frac{2I[\nu(\gamma_0)]}{|\nu'(\gamma_0)|}. \tag{13'}$$

Remarque. Nous remarquons que nous pouvons supposer: $\gamma_0 \neq 0$ et $\gamma_0 \neq 1$, parce que, si $\gamma_0 = 0$ toutes les fonctions de la famille (f) prennent la valeur *zéro* pour $z = 0$; de même, si $\gamma_0 = 1$ nous avons:

$$\frac{-a}{u_1 P(u_1)} = 1 \text{ ou bien } u_1 P(u_1) + a = F(o, u_1) = 0$$

et, par conséquent, toutes les fonctions de la famille prennent, pour $z = 0$, la valeur u_1. L'inégalité $|\gamma_1| > \frac{K_1}{\varrho}$, qui est satisfaite avec (13), montre que, si l'on a: $|u_1| > K$ le nombre γ_1 sera différent de zéro.

Appliquons maintenant le théorème I aux fonctions de la famille (f) en choisissant le rayon R de façon à satisfaire aux inégalités:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < R < \varrho.$$

Cela est toujours possible pour toutes les fonctions (f) qui satisfont à l'inégalité (13) et qui constituent une nouvelle famille (f_1) faisant partie de la famille donnée (f). Par ce choix du rayon R, l'algébroïde adjointe de toute fonction de la famille (f_1) ne prend pas la valeur u_1 dans le cercle (c):

$$|z| < R$$

et, par conséquent, à l'intérieur du même cercle, d'après le théorème I, toute fonction de la famille (f_1) prend l'une au moins des valeurs *zéro* et u_1. Il en est, donc, de même à l'intérieur de tout cercle, dont le rayon est plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{K_1}{|\gamma_1|}$; ce nombre $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ n'est pas fixe, puisqu'il dépend du paramètre variable u_1, mais il ne dépend nullement des paramètres variables $u_2, u_3, u_4, \ldots$: il dépend seulement des nombres n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_{n-1}, b_{n-1}, a, u_1.

Si nous donnons au paramètre μ_1 une valeur fixe $\mu_1 = b > K$, nous obtenons une troisième famille (f_2) de fonctions, dépendant des paramètres variables $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$ pour laquelle la quantité $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ sera *fixe*.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème II. *Considérons une famille (f) de fonctions algébroïdes définie par l'équation:*

$$F(z, u) = u^n + A_1(z)\, u^{n-1} + A_2(z)\, u^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(z)\, u + g(z) = 0 \tag{14}$$

où les fonctions entières $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_{n-1}(z)$ *ont tous leurs coefficients donnés et fixes:*

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \cdots\cdots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + c_2 z^2 + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n-1}(z) &= a_{n-1} + b_{n-1} z + c_{n-1} z^2 + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

et $g(z)$ *désigne une fonction entière:*

$$g(z) = a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \cdots$$

dont le premier coefficient seulement est fixe tandis que tous les autres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ *sont des paramètres variables; considérons aussi un nombre* u_1 *différent des racines de l'équation:*

$$P(u) = u^{n-1} + a_1 u^{n-2} + a_2 u^{n-3} + \cdots + a_{n-1} = 0.$$

Il existe un nombre positif et fixe K tel que toute fonction de la famille (f) satisfaisant à la condition:

$$|\mu_1| > K$$

prenne une fois au moins l'une des valuers 0 *et* u_1 *à l'intérieur d'un cercle:*

$$|z| < R$$

dont le rayon dépend seulement des nombres $n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, a, \mu_1$ [*et nullement des autres coeffcients des séries* (15)]. *Le rayon R doit satisfaire à l'inégalité:*

$$R > \varphi(\gamma_0, \gamma_1)$$

où

$$\gamma_0 = \frac{-a}{u_1 P(u_1)}, \qquad \gamma_1 = \frac{Q(u_1)}{u_1 [P(u_1)]^2}.$$

Les valeurs de $Q(u_1)$ et de la constante K se donnent par les formules: (9), (10) et (13'). Nous complétons le théorème précédent par le suivant:

»*Si nous donnons à* u_1 *une valeur fixe* $u_1 = b > K$ *nous obtenons une nouvelle famille* (f_2) *de fonctions algébroïdes pour laquelle la quantité* $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ *est fixe; il existe, donc, un cercle*

$$|z| < R = R(n, u_1, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, a, b)$$

dont le rayon est fixe (constant), à l'intérieur duquel chacune des fonctions de la famille (f_2) *prend une fois au moins l'une des valeurs zéro et* u_1.»

CHAPITRE II.

Le module des algébroïdes admettant des valeurs exceptionnelles dans un cercle.

3. Considérons de nouveau l'algébroïde $u = \mathfrak{a}(z)$ définie par l'équation (1) et désignons ses diverses branches par $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. Si, à l'intérieur d'un cercle:

$$|z| < R \tag{16}$$

la fonction $\mathfrak{a}(z)$ ne prend ni la valeur zéro ni la valeur u', les fonctions:

$$A_n(z) \text{ et } F(z, u') = u' f(z, u') + A_n(z) \tag{17}$$

ne s'annulent pas à l'intérieur du même cercle; il en est de même de $f(z, u')$ si l'adjointe $\mathfrak{a}_1(z)$ ne prend pas la valeur u' dans le cercle (16).

Avec ces hypothèses, l'égalité (17) nous montre que la fonction:

$$\sum(z) = \frac{F(z, u')}{A_n(z)} = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \cdots \tag{18}$$

qui est régulière en $z = 0$, ne prend pas, dans le cercle (16) les valeurs *zéro* et *un* et, par conséquent, nous avons:

$$\left|\sum(z)\right| < \Omega(\delta_0) \tag{19}$$

cette inégalité étant satisfaite pour $|z| < \vartheta R$, où ϑ désigne un nombre positif quelconque plus petit que l'unité et $\Omega(\delta_0)$ désigne une quantité dépendant seulement de δ_0 [et nullement des autres coefficients $\delta_1, \delta_2, \ldots$]; nous appliquons ici un théorème bien connu de M. Schottky [Über den Picard'schen Satz und

die BOREL'schen Ungleichungen. Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1904, s. 1244—1262].

Or, nous avons:

$$F(z, u') = (u' - u_1)(u' - u_2)(u' - u_3) \dots (u' - u_n), \qquad A_n(z) = (-1)^n u_1 u_2 u_3 \dots u_n$$

il s'en suit:

$$\left|\sum(z)\right| = \left|\frac{u' - u_1}{u_1}\right| \left|\frac{u' - u_2}{u_2}\right| \left|\frac{u' - u_3}{u_3}\right| \dots \left|\frac{u' - u_n}{u_n}\right|. \tag{20}$$

Cette formule (20) montre que l'on aura, *pour une au moins des branches*, l'inégalité suivante:

$$\left|\frac{u' - u}{u}\right| \leq \left|\sum(z)\right|^{\frac{1}{n}} \tag{21}$$

car si, pour un point situé dans le cercle $|z| < \theta R$, on avait:

$$\left|\frac{u' - u_1}{u_1}\right| > \left|\sum(z)\right|^{\frac{1}{n}}, \quad \left|\frac{u' - u_2}{u_2}\right| > \left|\sum(z)\right|^{\frac{1}{n}}, \dots \quad \left|\frac{u' - u_n}{u_n}\right| > \left|\sum(z)\right|^{\frac{1}{n}}$$

il en résulterait:

$$\left|\frac{u' - u_1}{u_1}\right| \left|\frac{u' - u_2}{u_2}\right| \dots \left|\frac{u' - u_n}{u_n}\right| > \left|\sum(z)\right|.$$

L'inégalité (21) entraîne:

$$|u'| - |u| < |u| \left|\sum(z)\right|^{\frac{1}{n}} < |u| \left|\Omega(\delta_0)\right|^{\frac{1}{n}}$$

$$|u| > \frac{|u'|}{1 + \left|[\Omega(\delta_0)]\right|^{\frac{1}{n}}}. \tag{22}$$

pour une au moins des branches de la fonction u.

D'après l'égalité (18), nous avons:

$$\delta_0 = [(u')^n + a_1 (u')^{n-1} + a_2 (u')^{n-2} + \dots + a_{n-1} u' + a_n] \frac{1}{a_n} \tag{23}$$

et, par conséquent, la quantité $\Omega(\delta_0)$ ne dépend que de $u', a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. Pour abréger le langage, adoptons la définition suivante: Une valeur $u_1 \neq 0$ sera dite *hyperexceptionnelle* d'une fonction algébroïde a (z) dans un cercle (c) si

cette fonction $\mathfrak{a}(z)$ et son adjointe $\mathfrak{a}_1(z)$ ne prennent pas la valeur u_1 dans le cercle (c).

Nous avons ainsi obtenu le théorème suivant:

Théorème III. *Soit une famille* (G) *de fonctions algébroïdes* $u = \mathfrak{a}(z)$ *ayant les propriétés suivantes:* 1°. *Toute fonction de la famille prend, en* $z = 0$, *les* n *valeurs qui sont des racines de l'équation:*

$$u^n + a_1 u^{n-1} + a_2 u^{n-2} + \cdots + a_{n-1} u + a_n = 0. \tag{24}$$

2°. *Toutes les fonctions de la famille ont le même nombre* n *de branches.* 3°. *La valeur* 0 *est exceptionnelle et la valeur* $u_1 \neq 0$ *est hyperexceptionnelle pour toute fonction de la famille dans un cercle*

$$|z| < R. \tag{25}$$

Il existe, alors, un nombre positif fixe $K(u_1, a_1, a_2, \ldots a_n) > 0$ *tel que nous ayons l'inégalité:*

$$|u| > K$$

satisfaite pour une au moins des branches dans le cercle $|z| < \frac{R}{2}$. Le nombre K est donné par la formule:[1]

$$K = \frac{|u_1|}{1 + |\Omega(\delta_0, n)|} \tag{26}$$

où l'on a:

$$\Omega(\delta_0) = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\lambda}}$$

en désignant par λ le plus petit des nombres

$$|\log \delta_0|, \quad |\log(1 - \delta_0)|, \quad \left|\log\left(1 - \frac{1}{\delta_0}\right)\right|$$

les logarithmes étant pris en valeur réduite, c'est-à-dire de façon que leur partie imaginaire soit comprise entre $-\pi$ (excl.) et π (incl.).

L'égalité (23) montre que le nombre δ_0 est fini et différent de zéro, parce que, par hypothèse, les nombres 0 et u_1 diffèrent des racines de l'équation (24); d'autre part, nous avons:

[1] Il dépend aussi du degré n.

$$\delta_0 \neq 1$$

parce que, dans le cas contraire, nous aurions l'égalité:

$$u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + a_2 u_1^{n-2} + \cdots + a_n = a_n \quad \text{ou bien} \quad u_1^{n-1} + a_1 u_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que l'adjointe de toute fonction de la famille (G) ne prend pas, dans le cercle (25), la valeur u_1.

Nous avons, donc, $\delta_0 \neq 0$ et 1 et fini et, par conséquent, le nombre λ est fini et plus grand que zéro.

Nous remarquons que, d'après le théorème ci-dessus énoncé, si nous désignons par (E) le cercle décrit dans le plan de la variable $u = \mathrm{a}(z)$ du point $u = 0$ comme centre et avec un rayon égal à K, *les n points $u = \mathrm{a}(z)$ [correspondants aux diverses branches des fonctions $\mathrm{a}(z)$] ne pénètrent jamais simultanément dans le cercle (E), lorsque le point z se déplace d'une façon quelconque dans le cercle $|z| < \frac{R}{2}$. L'intérieur du cercle (E) est, dans ce sens, un domaine exceptionnel dans le cercle $|z| < \frac{R}{2}$ par rapport à l'ensemble des branches de toutes les fonctions de la famille donnée (G).*

Pour nous rendre compte de l'intérêt de cette propriété, rappelons-nous que, dans le cas d'une famille de fonctions *holomorphes*, cette propriété suffit pour que la famille soit *normale*. [Voir: P. MONTEL. Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine. Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 1912, tome 29 (3e série), p. 493 et 494.]

CHAPITRE III.

Généralisations du théorème II.

4. Considérons de nouveau la famille (f) du théorème II, définie par l'équation (14) et deux valeurs quelconques u_1 et u_2. La substitution: $u = u_1 + w$ fait correspondre à la famille (f) des fonctions $u(z)$ une nouvelle famille (f') de fonctions $w(z)$ et aux nombres u_1 et u_2 les nombres 0 et $u_2 - u_1$; la nouvelle famille sera déterminée par l'équation:

$$F_1(z, w) = F(z, u_1) + w F'_u(z, u_1) + \frac{w^2}{1 \cdot 2} F''_{u^2}(z, u_1) + \cdots$$

$$+ \frac{w^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} F^{(n-1)}_{u^{n-1}}(z, u_1) + w^n \ldots$$

dans laquelle les $F'_u(z, u_1)$, $F''_{u^2}(z, u_1)$, ... $F^{(n-1)}_{u^{n-1}}(z, u_1)$ ne dépendent que des $A_1(z)$, $A_2(z)$, ... $A_{n-1}(z)$ et, par conséquent, sont fixes (sans paramètres variables), tandis que le premier terme $F(z, u_1)$ dépend aussi de $g(z)$ et, par conséquent, contient les paramètres variables $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Si nous posons:

$$F(z, u_1) = a' + m_1 z + m_2 z^2 + m_3 z^3 + \cdots$$

nous avons évidemment:

$$\begin{aligned} a' &= u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + a_2 u_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1} u_1 + a \\ m_1 &= b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u_1 + \mu_1 \end{aligned} \tag{27}$$

grâce à l'égalité:

$$F(z, u_1) = u_1^n + A_1(z) u_1^{n-1} + A_2(z) u_1^{n-2} + \cdots + A_{n-1}(z) u_1 + g(z).$$

Si nous posons aussi:

$$F'_u(z, u_1) = a'_1 + b'_1 z + \cdots\cdots$$

$$F''_{u^2}(z, u_1) = a'_2 + b'_2 z + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F^{(n-1)}_{u^{n-1}}(z, u_1) = a'_{n-1} + b'_{n-1} z + \cdots$$

les coefficients $a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, \ldots a'_{n-1}, b'_{n-1}$ ne dépendent que des coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_{n-1}, b_{n-1}$ et des u_1 et n.

D'après le théorème II, il existe un nombre positif et fixe K tel que toute fonction de la famille (f') satisfaisant à la condition

$$|m_1| > K \tag{28}$$

prenne une fois au moins l'une des valeurs 0 et $u_2 - u_1$ à l'intérieur d'un cercle

$$|z| < R \tag{28'}$$

dont le rayon R dépend seulement des nombres n, $u_2 - u_1$, a'_1, b'_1, a'_2, b'_2, ...

a'_{n-1}, b'_{n-1}, a', m_1; ce rayon, donc, ne dépend que des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, $a, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$, μ_1 et des nombres n, u_1 et u_2. Si nous donnons à m_1 aussi une valeur fixe, le rayon R sera fixe.

D'autre part, en vertu de l'égalité (27), nous avons:

$$|m_1| > |\mu_1| - |b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u_1|,$$

il en résulte que l'inégalité (28) sera satisfaite si l'on a:

$$|\mu_1| - |b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u_1| > K,$$

ou bien:

$$|\mu_1| > K + |b_1 u_1^{n-1} + b_2 u_1^{n-2} + \cdots + b_{n-1} u_1|.$$

Nous pouvons écrire:

$$|\mu_1| > K + |u_1|\,|N(u_1)|, \tag{29}$$

en tenant compte de la notation donnée par la formule (10).

Donc, si le paramètre μ_1 satisfait à l'inégalité (29), toute fonction de la famille (f') prend, à l'intérieur du cercle (28'), une fois au moins l'une des valeurs o et $u_2 - u_1$ et, par conséquent, toute fonction de la famille donnée (f) prend, à l'intérieur du même cercle, l'une des valeurs u_1 et u_2. Le second membre de l'inégalité (29) est évidemment *fixe*. Nous avons ainsi démontré que *le théorème II est valable pour deux nombres quelconques u_1 et u_2: c'est-à-dire, dans l'énoncé de ce théorème, on peut remplacer la valeur* o *par une valeur quelquonque u_2.*

5. Envisageons maintenant la famille (F) de fonctions algébroïdes définie par l'équation:

$$\begin{aligned}\psi(z, u) = u^n + A_1(z)\,u^{n-1} + \cdots + A_{\nu-1}(z)\,u^{n-\nu+1} + \\ + g(z)\,u^{n-\nu} + \cdots + A_{n-1}(z)\,u + A_n(z) = 0\end{aligned} \tag{30}$$

où l'on a:

$$\begin{aligned}
g(z) &= a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \mu_3 z^3 + \cdots \\
A_1(z) &= a_1 + b_1 z + c_1 z^2 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{\nu-1}(z) &= a_{\nu-1} + b_{\nu-1} z + c_{\nu-1} z^2 + \cdots \\
A_{\nu+1}(z) &= a_{\nu+1} + b_{\nu+1} z + c_{\nu+1} z^2 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_n(z) &= a_n + b_n z + c_n z^2 + \cdots
\end{aligned} \tag{31}$$

les fonctions entières $A_1(z), A_2(z), \ldots A_{\nu-1}(z), A_{\nu+1}(z), \ldots A_n(z)$ étant fixes, tandis que la fonction entière $g(z)$ contient les paramètres variables $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$

Posons:

$$\frac{\psi(z, u)}{u^{n-\nu}} = Q(z, u), \tag{32}$$

et considérons la fonction

$$\sigma(z) = \frac{Q(z, u_1) - Q(z, u_2)}{Q(z, u_1)} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots \tag{33}$$

u_1 et u_2 étant deux nombres quelconques différents de zéro.

D'après le théorème de M. Landau,[1] il existe un cercle

$$|z| < R(\gamma_0, \gamma_1), \tag{34}$$

dont le rayon R dépend seulement des coefficients γ_0 et γ_1, à l'intérieur duquel la fonction $\sigma(z)$ ou bien admet au moins un point singulier ou bien prend au moins une fois l'une des valeurs 0 et 1; donc, à l'intérieur du cercle (34), une, au moins, des équations:

$$Q(z, u_1) = 0, \qquad Q(z, u_2) = 0, \tag{35}$$

$$Q(z, u_1) - Q(z, u_2) = 0, \tag{36}$$

admet des racines. Or, nous avons:

$$\begin{aligned} Q(z, u_1) &= u_1^\nu + A_1(z) u_1^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu-1}(z) u_1 + \\ &\qquad + g(z) + \cdots + A_{n-1}(z) \frac{1}{u_1^{n-\nu-1}} + \frac{A_n(z)}{u_1^{n-\nu}}, \\ Q(z, u_2) &= u_2^\nu + A_1(z) u_2^{\nu-1} + \cdots + A_{\nu-1}(z) u_2 + \\ &\qquad + g(z) + \cdots + A_{\nu-1}(z) \frac{1}{u_2^{n-\nu+1}} + \frac{A_n(z)}{u_2^{n-\nu}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(z, u_1) - Q(z, u_2) &= u_1^\nu - u_2^\nu + (u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) A_1 + \cdots + \\ &\qquad + (u_1 - u_2) A_{\nu-1} + \cdots + A_n \left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}}\right) \cdot \end{aligned}$$

et nous voyons que la fonction $Q(z, u_1) - Q(z, u_2)$ ne contient pas le coefficient variable $g(z)$; par conséquent, les racines de l'équation (36) sont *fixes* (ne dépendant pas des paramètres variables $\mu_1, \mu_2, \ldots$). Si, donc, nous désignons par ϱ celle qui a le module minimum, nous choisirons le paramètre μ_1 de façon que l'on ait:

[1] Travaux cités dans le No 2.

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < |\varrho|, \tag{37}$$

$\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ étant la fonction bien connue de M. Landau.

Si nous posons:

$$Q(z, u_1) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$$

$$Q(z, u_1) - Q(z, u_2) = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \cdots$$

nous avons:

$$q_0 = \frac{u_1^n + a_1 u_1^{n-1} + \cdots + a\, u_1^{n-\nu} + \cdots + a_n}{u_1^{n-\nu}}, \qquad q_1 = \frac{b_1 u_1^{n-1} + \cdots + \mu_1 u_1^{n-\nu} + \cdots + b_n}{u_1^{n-\nu}},$$

$$K_0 = (u_1^\nu - u_2^\nu) + a_1(u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \cdots + a_n\left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}}\right),$$
$$K_1 = b_1(u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \cdots + b_n\left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}}\right), \tag{37'}$$

$$\gamma_0 = \frac{K_0}{q_0}, \qquad \gamma_1 = \frac{q_0 K_1 - K_0 q_1}{q_0^2}. \tag{37''}$$

Nous savons que:[1]

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{1}{|\gamma_1|}\varphi(\gamma_0),$$

et, par conséquent, l'inégalité (37) est équivalente à

$$|\gamma_1| > \frac{\varphi(\gamma_0)}{|\varrho|}. \tag{38}$$

Les nombres ϱ, γ_0, q_0, K_0, K_1 étant fixes, il est facile de démontrer, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème II, que l'inégalité (38) sera satisfaite si l'on a:

$$|q_1| > C_1, \tag{39}$$

C_1 étant un nombre positif fixe. D'autre part, nous avons:

$$|q_1| > |\mu_1| - \left| b_1 u_1^{\nu-1} + b_2 u_1^{\nu-2} + \cdots + \frac{b_n}{u_1^{n-\nu}} \right|$$

et, par conséquent, l'inégalité (39) sera satisfaite si l'on a:

[1] Voir le travail de M. Landau: Über den Picard'schen Satz (Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft: in Zürich, Bd. LI, 1906, S. 252—318).

$$|u_1| > C_1 + \left| b_1 u_1^{\nu-1} + b_2 u_1^{\nu-2} + \cdots + \frac{b_n}{u_1^{n-\nu}} \right|. \tag{40}$$

Pour les valeurs, donc, du paramètre u_1 satisfaisant à cette inégalité on aura:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < |\varrho|,$$

et comme le théorème de M. LANDAU est vrai pour tout rayon plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, nous prendrons le rayon R de façon que l'on ait:

$$\varphi(\gamma_0, \gamma_1) < R < |\varrho|.$$

Alors, à l'intérieur de ce cercle $|z| < R$ l'équation (36) n'admet pas des racines et, par conséquent, l'une au moins des équations (35) a des racines. Nous en concluons que, à l'intérieur de tout cercle $|z| < R$ dont le rayon est plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, l'une au moins des équations:

$$\psi(z, u_1) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(z, u_2) = 0,$$

a des racines, puisque l'on a:

$$\frac{\psi(z, u_1)}{u_1^{n-\nu}} = Q(z, u_1), \qquad \frac{\psi(z, u_2)}{u_2^{n-\nu}} = Q(z, u_2).$$

Remarques. Notre procédé exige que $|\varrho| > 0$; pour cela il faut supposer:

$$K_0 = (u_1^\nu - u_2^\nu) + a_1(u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \cdots + a_{\nu-1}(u_1 - u_2) +$$
$$+ a_{\nu+1}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) + \cdots + a_n\left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}}\right) \neq 0,$$

ce qui entraîne $\gamma_0 \neq 0$. Nous pouvons aussi supposer $\gamma_0 \neq 1$, parce que, dans le cas contraire, toutes les fonctions $Q(z, u_2)$ s'annuleraient en $z = 0$ et, par conséquent, toutes les fonctions de la famille (F) prendraient en $z = 0$ la valeur u_2.

Les formules (37') montrent que la quantité $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$ ne dépend que des nombres n, ν, u_1, u_2, et des coefficients

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_{\nu-1}, b_{\nu-1}, a, u_1, \ldots a_n, b_n.$$

Nous avons ainsi établi le théorème suivant qui est aussi une généralisation du théorème II.

Théorème IV. *Soit une famille (F) de fonctions algébroïdes définie par l'équation:*

$$\psi(z, u) = u^n + A_1(z)\, u^{n-1} + \cdots + A_{\nu-1}(z)\, u^{n-\nu+1} +$$
$$+ g(z)\, u^{n-\nu} + A_{\nu+1}(z)\, u^{n-\nu-1} + \cdots + A_n(z) = 0,$$

où l'on a:

$$\left.\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \cdots\cdots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{\nu-1}(z) &= a_{\nu-1} + b_{\nu-1} z + \cdots\cdots \\ g(z) &= a + \mu_1 z + \mu_2 z^2 + \cdots \\ A_{\nu+1}(z) &= a_{\nu+1} + b_{\nu+1} z + \cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n(z) &= a_n + b_n z + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

les fonctions entières $A_1(z)$, $A_2(z)$, ... $A_{\nu-1}(z)$, $A_{\nu+1}(z)$, ... $A_n(z)$ étant fixes, tandis que la fonction entière $g(z)$ a une infinité de paramètres variables (le premier coefficient a seulement étant fixe) $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Si nous considérons aussi deux nombres quelconques u_1 et u_2 différents de zéro et ne satisfaisant pas à l'égalité:

$$\begin{aligned}(u_1^\nu - u_2^\nu) + a_1(u_1^{\nu-1} - u_2^{\nu-1}) + \cdots + a_{\nu-1}(u_1 - u_2) + \\ + a_{\nu+1}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) + \cdots + a_n\left(\frac{1}{u_1^{n-\nu}} - \frac{1}{u_2^{n-\nu}}\right) = 0,\end{aligned} \tag{42}$$

il existe un nombre positif fixe C tel que toute fonction de la famille (F) assujettie à la condition

$$|\mu_1| > C, \tag{43}$$

prenne une fois au moins l'une des valeurs u_1 et u_2 à l'intérieur d'un cercle: $|z| < R$, dont le rayon dépend seulement des nombres n, ν, u_1, u_2, a_1, b_1, a_2, b_2, ... $a_{\nu-1}$, $b_{\nu-1}$, a, μ_1, ... a_n, b_n [et nullement des autres coefficients des séries (41)].

Le rayon R doit être plus grand que $\varphi(\gamma_0, \gamma_1)$, où les nombres γ_0 et γ_1 sont bien déterminés par les formules (37′) et (37″). La constante C est déterminée par les formules (37′), (37″), (38), (39) et (40).

Si nous donnons au paramètre μ_1 une valeur fixe $\mu_1 = b$ telle que $|b| > C$, nous obtenons une nouvelle famille (F_1), dont chaque fonction prend au moins une fois l'une des valeurs u_1 et u_2 dans le cercle $|z| < R$ ci-dessus indiqué. La

famille (F_1), qui dépend d'une infinité de paramètres variables $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$, fait évidemment partie de la famille donnée (F).

6. Remarquons[1] encore que les théorèmes II et IV peuvent visiblement s'étendre au cas où les fonctions algébroïdes des familles considérées possèdent des infinis à distance finie. C'est ainsi, par exemple, que l'équation (14) peut être remplacée par une équation:

$$F(z, u) = g(z) + A_1(z)\, u + A_2(z)\, u^2 + \cdots + A_{n-1}(z)\, u^{n-1} + A_n(z)\, u^n = 0,$$

les $g(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, $\ldots$ $A_n(z)$ désignant des fonctions entières, il suffit de modifier legèrement le sens des valeurs exceptionnelles: *une valeur $u = u_1$ sera dite exceptionnelle dans un domaine (D), si aucune fonction $F(z, u_1)$ n'y prend la valeur zéro.* Cette définition est analogue à celle de l'équation exceptionnelle utilisée par M. Borel pour généraliser le théorème de M. Picard dans le cas des fonctions méromorphes: [É. Borel. Leçons sur les fonctions méromorphes professées au collège de France. Paris, Gauthier-Villars, 1903, pages 55—66]. Je ne veux pas insister davantage sur ce point facile, parce qu'il ne s'agit pas de changer les méthodes suivies pour les théorèmes en question.

CHAPITRE IV.

Les familles bornées en module.

Envisageons une famille (F) de fonctions $f(z)$ algébroïdes et ayant le même nombre ν (fixe) de branches[2] dans un domaine (D) et supposons que cette famille soit composée de fonctions *bornées dans leur ensemble dans l'intérieur du domaine D:* Nous entendons par là qu'il existe un nombre fixe M tel que nous ayons l'inégalité:

$$|f(z)| < M, \tag{44'}$$

satisfaite pour *toutes les branches* de toute fonction $f(z)$ de la famille et pour tout point intérieur à un domaine D_1, en désignant par D_1 un domaine quelconque intérieur à D. Soit:

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ \ldots\ f_n(z),\ \ldots \tag{44}$$

une suite infinie de fonctions appartenant à la famille (F); nous démontrerons

[1] Il faut aussi remarquer que le théorème II se déduit comme cas particulier du théorème IV: c'est le cas où $\nu = n$ et, par conséquent, l'une des valeurs u_1 et u_2 peut être egale à *zero*.

[2] Nous supposons aussi que les fonctions de la famille soient finies dans le domaine D

que l'on peut en extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur du domaine D vers une fonction limite.

La fonction $u = f_n(z)$, étant algébroïde à ν branches dans le domaine D, satisfera à une équation:

$$u^\nu + A_n(z)\, u^{\nu-1} + B_n(z)\, u^{\nu-2} + C_n(z)\, u^{\nu-3} + \cdots = 0, \tag{45}$$

où les $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z), \ldots$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine D.

Ainsi la suite (44) de fonctions algébroïdes dans D correspond à ν autres suites:

$$\begin{array}{l} A_1(z),\ A_2(z),\ A_3(z), \ldots,\ A_n(z), \ldots \\ B_1(z),\ B_2(z),\ B_3(z), \ldots,\ B_n(z), \ldots \\ C_1(z),\ C_2(z),\ C_3(z), \ldots,\ C_n(z), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{46}$$

de fonctions holomorphes dans le même domaine.

Nous avons:

$$\begin{aligned} -A_n(z) &= f_{n1} + f_{n2} + f_{n3} + \cdots + f_{n\nu}, \\ B_n(z) &= \sum f_{n1} f_{n2}, \\ -C_n(z) &= \sum f_{n1} f_{n2} f_{n3}, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{47}$$

en désignant par $f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \ldots f_{n\nu}$ les branches de la fonction $f_n(z)$, par $\sum f_{n1} f_{n2}$ la somme de tous les produits des branches prises deux-à-deux, par $\sum f_{n1} f_{n2} f_{n3}$ la somme de tous les produits des branches prises trois-à-trois et ainsi de suite.

Les formules (44') et (47) nous donnent les inégalités:

$$|A_n(z)| < \nu M, \quad |B_n(z)| < \frac{\nu(\nu-1)}{1.2} M^2, \quad |C_n(z)| < \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3} M^3, \ldots\ldots$$

qui montrent que les fonctions $A_n(z)$, $B_n(z)$, $C_n(z), \ldots$ sont bornées en module dans leur ensemble dans le domaine (D), parce que les nombres ν et M sont fixes.

Or, on sait que de toute suite de fonctions holomorphes bornées on peut extraire une nouvelle suite convergeant uniformément vers une fonction [Voir:

P. MONTEL. Sur les suites infinies de fonctions. Paris, 1907, Gauthier-Villars, pages 67—70, thèse de doctorat. P. MONTEL. Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, p. 22—27. Paris, Gauthier-Villars; 1910].

On peut, donc, extraire de la suite:

$$A_1(z),\ A_2(z),\ A_3(z),\ \ldots,\ A_n(z),\ \ldots \tag{48}$$

une nouvelle suite:

$$A_{\alpha_1}(z),\ A_{\alpha_2}(z),\ A_{\alpha_3}(z),\ \ldots,\ A_{\alpha_n}(z),\ \ldots \tag{49}$$

convergeant uniformément vers une fonction a (z) holomorphe dans tout domaine D_1 intérieur à D. Ensuite, si la suite:

$$B_{\alpha_1}(z),\ B_{\alpha_2}(z),\ B_{\alpha_3}(z),\ \ldots,\ B_{\alpha_n}(z),\ \ldots \tag{50}$$

ne converge pas uniformément vers une fonction limite, nous pouvons en extraire une nouvelle serie:

$$B_{\beta_1}(z),\ B_{\beta_2}(z),\ B_{\beta_3}(z),\ \ldots,\ B_{\beta_n}(z),\ \ldots \tag{51}$$

convergeant uniformément vers une fonction holomorphe b (z) dans le domaine D_1; la suite: $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \ldots$ est évidemment extraite de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ et, par conséquent, de la suite $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Nous considérons maintenant la suite:

$$C_{\beta_1}(z),\ C_{\beta_2}(z),\ C_{\beta_3}(z),\ \ldots,\ C_{\beta_n}(z),\ \ldots$$

de laquelle nous pouvons extraire une nouvelle suite:

$$C_{\gamma_1}(z),\ C_{\gamma_2}(z),\ C_{\gamma_3}(z),\ \ldots,\ C_{\gamma_n}(z),\ \ldots \tag{52}$$

convergeant uniformément vers une fonction limite c (z) holomorphe dans le domaine D_1. En continuant ainsi nous arriverons enfin à une suite infinie de nombres entiers:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots,\ m_n,\ \ldots$$

extraite des toutes les suites précédentes:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots$$

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots$$

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \ldots,\ \gamma_n,\ \ldots$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

telle que chacune des suites:

$$\begin{array}{l} A_{m_1}(z),\ A_{m_2}(z),\ A_{m_3}(z), \ldots,\ A_{m_n}(z), \ldots \\ B_{m_1}(z),\ B_{m_2}(z),\ B_{m_3}(z), \ldots,\ B_{m_n}(z), \ldots \\ C_{m_1}(z),\ C_{m_2}(z),\ C_{m_3}(z), \ldots,\ C_{m_n}(z), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{53}$$

converge uniformément vers une fonction holomorphe dans le domaine D_1; la première vers $\mathrm{a}(z)$, la seconde vers $\mathrm{b}(z)$, la troisième vers $\mathrm{c}(z)$ et ainsi de suite. En effet, la première des suites (53) peut être extraite de la suite (49) qui converge vers la fonction $\mathrm{a}(z)$, la seconde de la suite (51) qui converge vers la fonction $\mathrm{b}(z)$, la troisième de la suite (52) qui converge vers la fonction $\mathrm{c}(z)$, et ainsi de suite.

Or, la fonction algébroïde $u = f_{m_n}(z)$ satisfait à l'équation:

$$u^\nu + A_{m_n}(z)\, u^{\nu-1} + B_{m_n}(z)\, u^{\nu-2} + C_{m_n}(z)\, u^{\nu-3} + \cdots = 0, \tag{54}$$

il en résulte que les ν suites (53) de fonctions holomorphes correspondent à la suite:

$$f_{m_1}(z),\ f_{m_2}(z),\ f_{m_3}(z), \ldots,\ f_{m_n}(z), \ldots \tag{55}$$

qui converge, par conséquent, vers les fonctions $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation:

$$w^\nu + \mathrm{a}(z)\, w^{\nu-1} + \mathrm{b}(z)\, w^{\nu-2} + \mathrm{c}(z)\, w^{\nu-3} + \cdots = 0, \tag{56}$$

parce que les suites $A_{m_n}(z)$, $B_{m_n}(z)$, $C_{m_n}(z), \ldots$ convergent uniformément dans le domaine D_1 respectivement vers les fonctions $\mathrm{a}(z)$, $\mathrm{b}(z)$, $\mathrm{c}(z), \ldots$ qui sont aussi holomorphes dans D_1, d'après un théorème classique de Weierstrass; la suite (55) est évidemment extraite de la suite initiale (44). Si l'équation (56) est irréductible, la suite (55) n'admet qu'une fonction-limite qui est algébroïde à ν branches et finie dans le domaine D; si l'équation (56) est réductible, les fonctions-limites sont au plus ν et le nombre total de leurs branches est égal à ν.

7. Donnons maintenant la définition suivante: Soit:

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z), \ldots,\ \varphi_n(z), \ldots \tag{57}$$

une suite infinie de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches et finies dans un domaine D, et désignons par $\varphi_{n1}, \varphi_{n2}, \varphi_{n3}, \ldots, \varphi_{n\nu}$ les valeurs de $\varphi_n(z)$. Soit aussi $\varphi(z)$ un ensemble fini de fonctions, dont le nombre total des

branches dans le domaine D est égal à ν. Nous dirons que la suite (57) converge *uniformément*, à l'intérieur de D, vers les fonctions $w = \varphi(z)$ si, D_1 étant un domaine quelconque complètement intérieur à D, on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε arbitrairement petit un entier p, *tel que, pour* $n > p$ *et pour tout point* z *du domaine* D_1, *le tableau des* ν^2 *nombres:*

$$\begin{array}{l} w_1 - \varphi_{n1},\ w_1 - \varphi_{n2},\ w_1 - \varphi_{n3},\ \ldots,\ w_1 - \varphi_{n\nu}, \\ w_2 - \varphi_{n1},\ w_2 - \varphi_{n2},\ w_2 - \varphi_{n3},\ \ldots,\ w_2 - \varphi_{n\nu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_\nu - \varphi_{n1},\ w_\nu - \varphi_{n2},\ w_\nu - \varphi_{n3},\ \ldots,\ w_\nu - \varphi_{n\nu}, \end{array}$$

où $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\nu$ *sont les* ν *valeurs des fonctions* $\varphi(z)$ *au point* z, *contienne au moins* ν *différences dont le module est inférieur à* ε.

Cela posé, nous démontrerons que la série (55) converge *uniformément*, à l'intérieur de D, vers les fonctions-limites $w = f(z)$.

Si nous désignons par $u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}, \ldots, u_{n\nu}$ les valeurs de $u = f_{m_n}(z)$ et par $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\nu$ les valeurs des fonctions $w = f(z)$, il suffit de démontrer que, à chaque nombre positif ε nous pouvons faire correspondre un entier p tel que, pour $n > p$ et pour tout point intérieur à D, le tableau:

$$\begin{array}{l} w_1 - u_{n1},\ w_1 - u_{n2},\ w_1 - u_{n3},\ \ldots,\ w_1 - u_{n\nu}, \\ w_2 - u_{n1},\ w_2 - u_{n2},\ w_2 - u_{n3},\ \ldots,\ w_2 - u_{n\nu}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_\nu - u_{n1},\ w_\nu - u_{n2},\ w_\nu - u_{n3},\ \ldots,\ w_\nu - u_{n\nu}, \end{array} \tag{58}$$

contienne au moins ν différences de module inférieur à ε.

Comme les fonctions $w = f(z)$ sont des limites de $u = f_{m_n}(z)$, il est clair que, lorsque n croît indéfiniment, il existe ν différences de ce tableau (58) qui tendent vers zéro; c'est-à-dire à chaque point z intérieur au domaine D correspondent ν différences du tableau (58), dont le module, à partir d'une valeur de l'indice n, est plus petit qu'un nombre η arbitrairement petit donné d'avance. Par conséquent, si nous considérons l'équation:

$$y^\mu + H_1(z)\, y^{\mu-1} + \cdots + H_{\mu-2}(z)\, y^2 + H_{\mu-1}(z)\, y + H_\mu(z) = 0, \qquad \mu = \nu^2, \tag{59}$$

qui, pour chaque point intérieur à D, admet comme racines les différences du tableau (58), il y a ν au moins racines de cette équation qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$; il en résulte que les coefficients $H_\mu(z)$, $H_{\mu-1}(z)$, $H_{\mu-2}(z), \ldots, H_{\mu-\nu+1}(z)$ tendent vers zéro dans le domaine D. D'autre part, il est facile de voir que toutes les fonctions $H_1(z), H_2(z), \ldots, H_\mu(z)$ sont holomorphes dans D et, par conséquent, d'après un théorème de M. M. OSGOOD[1] et MONTEL[2] les ν séries $H_\mu(z)$, $H_{\mu-1}(z)$, $H_{\mu-2}(z), \ldots, H_{\mu-\nu+1}(z)$ convergent uniformément, à l'intérieur de D, vers zéro.[3]

Si nous désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ les racines de l'équation (59), nous avons:

$$H_\mu(z) = (-1)^\mu r_1 r_2 r_3 \ldots r_\mu,$$

et à chaque nombre positif θ correspond un entier p tel que, pour $n > p$ et pour tout point intérieur à D, l'on ait

$$|r_1 r_2 r_3 \ldots r_\mu| < \theta, \quad |H_{\mu-1}(z)| < \theta, \quad |H_{\mu-2}(z)| < \theta, \ldots$$

et, par conséquent, le module d'une au moins racine sera inférieur à $\left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|$: soit:

$$|r_1| < \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|.$$

Or, nous avons:

$$H_{\mu-1}(z) = (-1)^{\mu-1} \sum r_1 r_2 r_3 \ldots r_{\mu-1},$$

en désignant ainsi la somme des produits des racines $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ prises $\mu - 1$ à $\mu - 1$. Si nous posons:

$$H_{\mu-1}(z) = (-1)^{\mu-1} r_2 r_3 \ldots r_\mu + g_{\mu-1}, \tag{60}$$

et si nous désignons par M le module maximum dans tout le domaine D_1 de toutes les fonctions de la série (55) et des fonctions-limites $w = f(z)$, le module de chaque terme de $g_{\mu-1}$ sera inférieur à

$$2^{\mu-2} M^{\mu-2} \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|,$$

[1] Annals of Mathematics, 2e série, t. III, no 1, 1901.

[2] *Sur les suites infinies de fonctions* (Annales de l'École normale, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 307). Voir aussi: P. MONTEL, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine.* Annales de l'École normale, tome 29, 3e série, 1912, p. 529—535. C. ARZELÀ. *Sulle serie di funzioni analitiche.* Rendiconti dell. R. Accad. delle Scienze di Bologna, 1902—1903.

[3] Il est facile de voir que les modules des fonctions $H_1(z), H_2(z), \ldots H_\mu(z)$ sont bornés dans le domaine D.

et, par conséquent, l'inégalité $|H_{\mu-1}(z)| < \theta$ et la formule (60) nous donnent:

$$|r_2 r_3 \ldots r_\mu| < \theta + (\mu - 1)\, 2^{\mu-2} M^{\mu-2} \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|,$$

il en résulte que le module d'une au moins des racines $r_2, r_3, \ldots, r_\mu$ sera inférieur à $|\delta_2(\theta)|$, où

$$\delta_2(\theta) = \left[\theta + (\mu - 1)\, 2^{\mu-2} M^{\mu-2} \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|\right]^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Soit: $|r_2| < |\delta_2(\theta)|$. En continuant ainsi de proche en proche, à l'aide des inégalités:

$$|H_{\mu-2}(z)| < \theta, \ |H_{\mu-3}(z)| < \theta, \ldots, \ |H_{\mu-\nu+1}(z)| < \theta,$$

successivement utilisées, nous pouvons évidemment démontrer qu'il y a au moins ν racines $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_\nu$ satisfaisant aux inégalités:

$$|r_1| < \left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right|, \ |r_2| < |\delta_2(\theta)|, \ |r_3| < |\delta_3(\theta)|, \ldots, \ |r_\nu| < |\delta_\nu(\theta)|,$$

où $\delta_2(\theta), \delta_3(\theta), \ldots, \delta_\nu(\theta)$ désignent des quantités dépendant seulement des θ, μ, ν, et M et tendant vers zéro avec θ; dès lors, étant donné un nombre positif ε quelconque nous pouvons choisir θ assez petit pour que l'on ait:

$$\left|\theta^{\frac{1}{\mu}}\right| < \varepsilon, \ |\delta_2(\theta)| < \varepsilon, \ |\delta_3(\theta)| < \varepsilon, \ldots, \ |\delta_\nu(\theta)| < \varepsilon,$$

ou bien:

$$|r_1| < \varepsilon, \ |r_2| < \varepsilon, \ |r_3| < \varepsilon, \ldots, \ |r_\nu| < \varepsilon,$$

pour $n > p$ et pour tous les points z intérieurs au domaine D.

Nous avons, donc, démontré la convergence *uniforme* de la série (55) vers les fonctions $w = f(z)$ et établi le théorème suivant:

Théorème V. *Si nous considérons une famille (F) de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D, dont les modules sont bornés dans leur ensemble dans le même domaine, une telle famille a la propriété suivante: De toute suite infinie de fonctions appartenant à la famille (F) on peut extraire une nouvelle suite convergeant uniformément, à l'intérieur de D, vers des fonctions algébroïdes ou holomorphes dans D, dont le nombre total de branches est égal à ν.*

Adoptons la définition suivante: Une famille (F) de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D sera dite *normale* dans D si

de toute suite infinie formée de fonctions de la famille (F) on peut extraire une suite nouvelle *convergeant uniformément, dans l'intérieur de D, vers des fonctions algébroïdes dans D, dont le nombre total de branches est égal à ν.* Le nombre des fonctions-limites, qui peuvent être aussi des constantes finies ou infinies, sera, par conséquent, au plus égal à ν; si $\nu = 1$ nous retombons immédiatement à la notion des familles normales de fonctions holomorphes dans un domaine, utilisée par M. P. Montel dans ses importants travaux ci-dessus indiqués.

À l'aide de la définition que nous venons d'adopter, le théorème V peut s'énoncer aussi de la façon suivante:

Toute famille de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D, bornées dans leur ensemble dans le même domaine, est une famille normale dans D.

C'est une extension aux fonctions algébroïdes dans un domaine d'un théorème établi par M. P. Montel [*Sur les suites infinies de fonctions*, Annales de l'École normale, 3e série, tome XXIV, 1907, p. 67—70].

8. Soit:

$$f_1(z),\, f_2(z),\, \ldots,\, f_n(z),\, \ldots \tag{61}$$

une suite infinie de fonctions algébroïdes à ν branches et bornées dans un domaine D; si nous supposons que cette suite converge vers les fonctions $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation:

$$F(z, w) = w^\nu + B_1(z)\, w^{\nu-1} + B_2(z)\, w^{\nu-2} + \cdots + B_{\nu-1}(z)\, w + B_\nu(z) = 0, \tag{62}$$

la convergence, d'après le N° précédent, est uniforme et les fonctions $B_1(z)$, $B_2(z), \ldots, B_{\nu-1}(z)$, $B_\nu(z)$ sont aussi holomorphes dans le domaine D. Si la fonction $u = f_n(z)$ est définie par l'équation:

$$F_n(z, u) = u^\nu + A_{n1}(z)\, u^{\nu-1} + A_{n2}(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{n,\nu-1}(z)\, u + A_{n\nu}(z) = 0, \tag{63}$$

les fonctions $A_{n1}(z), A_{n2}(z), \ldots, A_{n\nu}(z)$ convergent uniformément vers les fonctions-limites respectives $B_1(z), B_2(z), \ldots, B_\nu(z)$.

Supposons maintenant que, étant donné un nombre a, aucune des fonctions limites $w = f(z)$ ne soit égale à la constante a; alors la fonction holomorphe $F(z, a)$ n'est pas constamment égale à zéro. Il est clair que, pour qu'une au moins branche de $f_n(z)$ prenne la valeur a dans D, il faut et il suffit que la fonction holomorphe $F_n(z, a)$ s'y annule; de même, pour qu'une au moins des fonctions $f(z)$ prenne dans D la valeur a, il faut et il suffit que la fonction holomorphe $F(z, a)$ s'y annule. Or, d'après un théorème établi par M. Montel

dans son travail déjà cité [*Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Annales de l'École normale, tome 29 de la 3me série, 1912, page 490], si nous considérons un point z_0 situé à l'intérieur de D, pour que l'on ait: $F(z_0, a) = 0$ il faut et il suffit que, à partir d'un certain rang, les fonctions holomorphes $F_n(z, a)$ s'annulent toutes dans le voisinage du point $z = z_0$: en effet, la suite des fonctions holomorphes $F_n(z, a)$ converge uniformément vers la fonction $F(z, a)$. Nous obtenons, donc, le théorème suivant:

Théorème VI. *Soit:*

$$f_1(z),\ f_2(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots$$

une suite infinie de fonctions algébroïdes à ν branches bornées dans un domaine D et convergeant uniformément vers des fonctions $w = f(z)$, dont le nombre total des branches est égal à ν.

Si aucune des fonctions-limites $f(z)$ n'est égale à une constante a, pour que l'une au moins de ces fonctions prenne en $z = z_0$ la valeur a, il faut et il suffit que, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n(z)$ prennent toutes la valeur a dans le voisinage de z_0.

C'est une extension aux suites de fonctions algébroïdes du théorème ci-dessus indiqué et utilisé de M. Montel.

CHAPITRE V.

La convergence des séries de fonctions algébroïdes.

9. Soit:

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z), \ldots,\ f_n(z), \ldots \tag{64}$$

une série de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D; nous supposons aussi qu'elles soient bornées dans le même domaine. Nous commencerons par donner la définition suivante:

Nous dirons que la suite (64) converge en un point z_0 du domaine D, *lorsque la série:*

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0),\ f_3(z_0), \ldots,\ f_n(z_0), \ldots \tag{65}$$

peut donner naissance à ν séries convergentes:

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \ldots,\ a_{1n},\ \ldots \\
a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \ldots,\ a_{2n},\ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
a_{\nu 1},\ a_{\nu 2},\ a_{\nu 3},\ \ldots,\ a_{\nu n},\ \ldots
\end{array}\right\} \qquad (66)
$$

en désignant, d'une façon générale, par $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{\nu n}$ les ν valeurs de $f_n(z_0)$; chacune des séries (66) doit contenir une valeur de chaque terme de la série (65) et une seule; soient $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ les limites respectivement des séries (66). Il en résulte que, si la fonction algébroïde $u = f_n(z)$ est définie par l'équation:

$$u^\nu + A_{1n}(z)\, u^{\nu-1} + A_{2n}(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu n}(z) = 0, \qquad (67)$$

les séries:

$$
\left.\begin{array}{l}
A_{11}(z_0),\ A_{12}(z_0),\ \ldots,\ A_{1n}(z_0),\ \ldots \\
A_{21}(z_0),\ A_{22}(z_0),\ \ldots,\ A_{2n}(z_0),\ \ldots \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_{\nu 1}(z_0),\ A_{\nu 2}(z_0),\ \ldots,\ A_{\nu n}(z_0),\ \ldots
\end{array}\right\} \qquad (68)
$$

convergent aussi, la première vers $-(b_1 + b_2 + \cdots + b_\nu)$, la seconde vers le nombre $\sum b_1 b_2$, la troisième vers le nombre $-\sum b_1 b_2 b_3, \ldots$, la dernière vers le nombre $(-1)^\nu b_1 b_2 b_3 \ldots b_\nu$, en désignant par $\sum b_1 b_2$ la somme des produits des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ pris deux-à-deux par $\sum b_1 b_2 b_3$ la somme des produits des mêmes nombres pris trois-à-trois et ainsi de suite. En effet, nous avons:

$$
\begin{aligned}
A_{1n}(z_0) &= -(a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{\nu n}), \\
A_{2n}(z_0) &= \sum a_{1n} a_{2n}, \\
A_{3n}(z_0) &= -\sum a_{1n} a_{2n} a_{3n}, \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_{\nu n}(z_0) &= (-1)^\nu a_{1n} a_{2n} \ldots a_{\nu n},
\end{aligned}
$$

pour toute valeur de n.

Supposons maintenant que la série (64) converge en une infinité de points du domaine D ayant au moins un point P de condensation (un point limite)

à l'intérieur de D et désignons par (E) l'ensemble de ces points; alors, comme nous venons de voir, les séries de fonctions holomorphes

$$\begin{array}{l} A_{11}(z),\ A_{12}(z),\ \ldots,\ A_{1n}(z),\ \cdots \\ A_{21}(z),\ A_{22}(z),\ \ldots,\ A_{2n}(z),\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{\nu 1}(z),\ A_{\nu 2}(z),\ \ldots,\ A_{\nu n}(z),\ \cdots \end{array} \tag{69}$$

convergent aussi en tous les points de l'ensemble (E); nous en concluons, d'après un théorème de M. VITALI[1], qu'elles convergent uniformément dans l'intérieur de D vers des fonctions holomorphes $B_1(z),\ B_2(z),\ B_3(z),\ \ldots,\ B_\nu(z)$. Donc, la série (64) converge vers les fonctions $w = f(z)$ satisfaisant à l'équation:

$$w^\nu + B_1(z)\,w^{\nu-1} + B_2(z)\,w^{\nu-2} + \cdots + B_{\nu-1}(z)\,w + B_\nu(z) = 0,$$

qui sont algébroïdes dans le domaine D: En d'autres termes, si nous considérons un point quelconque z_1 situé à l'intérieur du domaine D, on peut avec les valeurs en ce point des termes de la suite (64) construire ν séries convergentes:

$$\begin{array}{l} u_{11},\ u_{12},\ u_{13},\ \ldots,\ u_{1n},\ \cdots \\ u_{21},\ u_{22},\ u_{23},\ \ldots,\ u_{2n},\ \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{\nu 1},\ u_{\nu 2},\ u_{\nu 3},\ \ldots,\ u_{\nu n},\ \cdots \end{array} \tag{70}$$

où les $u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{\nu 1}$ sont les valeurs de $f_1(z_1)$, les $u_{12}, u_{22}, \ldots, u_{\nu 2}$ sont les valeurs de $f_2(z_1)$, les $u_{13}, u_{23}, \ldots, u_{\nu 3}$ sont les valeurs de $f_3(z_1)$ et, en général, les $u_{1n}, u_{2n}, \ldots, u_{\nu n}$ sont les valeurs de $f_n(z_1)$; les séries (70) convergent respectivement vers les ν racines de l'équation:

$$w^\nu + B_1(z_1)\,w^{\nu-1} + B_2(z_1)\,w^{\nu-2} + \cdots + B_{\nu-1}(z_1)\,w + B_\nu(z_1) = 0,$$

qui sont toujours toutes finies.

[1] G. VITALI *Sopra le serie di funzioni analitiche* [Rendiconti del R. Inst. Lombardo, 2e serie, t. XXXVI, 1903, p. 772; Annali di Matematica pura ed applicata, 3e série, t. X, 1904, p. 73]. Voir aussi: H. PORTER *Concerning series of Analytic Fonctions* [Annals of Mathematics, 2e serie, t. VI, 1904—1905, p. 190].

Je dis maintenant que la suite (64) converge *uniformément*, à l'intérieur de D, vers les fonctions limites $w = f(z)$. Soit D_1 un domaine quelconque intérieur à D. Si la convergence n'était pas uniforme dans D_1, il existerait un nombre ε tel que, en un point au moins z_1 de D_1 et pour une infinité de fonctions

$$f_{m_1}(z),\ f_{m_2}(z),\ \ldots,\ f_{m_n}(z),\ \ldots, \tag{71}$$

de la série donnée le tableau:

$$\begin{array}{l} w_1 - u_{1n},\ w_1 - u_{2n},\ \ldots,\ w_1 - u_{\nu n}, \\ w_2 - u_{1n},\ w_1 - u_{2n},\ \ldots,\ w_2 - u_{\nu n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_\nu - u_{1n},\ w_\nu - u_{2n},\ \ldots,\ w_\nu - u_{\nu n}, \end{array}$$

ne contienne pas ν différences au moins de module inférieur à ε, les $w_1, w_2, \ldots, w_\nu$ désignant les valeurs pour $z = z_1$ des fonctions-limites de la série donnée.

Mais, alors, il est clair que l'on ne pourrait extraire de cette suite (71) une nouvelle suite convergeant *uniformément*, ce qui est absurde, parce que, d'après le théorème V, les fonctions de la série donnée (64) appartiennent à une famille normale. La convergence *uniforme* de la série (64) est ainsi démontrée. Nous avons, donc, établi le théorème suivant:

Théorème VII. *Soit une série:*

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots \tag{72}$$

de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches dans un domaine D et bornées dans le même domaine.

Si cette série converge en une infinité de points du domaine D ayant au moins un point de condensation (point limite) à l'intérieur de D, elle converge uniformément dans tout l'intérieur du domaine D vers des fonctions algébroïdes ou holomorphes, dont le nombre total de branches est égal à ν.

C'est visiblement une extension aux fonctions algébroïdes dans un domaine des théorèmes bien connus de Stieltjes[1] et de MM. Osgood[2], Arzelá, Montel[3] et Vitali[4] sur les fonctions holomorphes.

[1] *Correspondance* d'Hermite *et de* Stieltjes, t. II, lettres nos 399 et 400, p. 368; Recherches sur les fractions continues (Annales de la Faculté de Toulouse, t. VIII, 1894).

[2] Annals of Mathematics, 2e série, t. III, no 1, 1901.

[3] *Sur les suites infinies de fonctions* (Annales de l'École normale, 3e série, t, XXIV, 1907, p. 307).

[4] Dans son travail ci-dessus cité et utilisé.

10. Nous remarquons que le théorème VII, ci-dessus énoncé, peut s'étendre au cas plus général où les fonctions de la série considérée ne sont soumis qu'à la condition d'appartenir à une famille normale: c'est-à-dire l'hypothèse que les fonctions de la série soient bornées peut être remplacée par la condition plus générale qu'elles appartiennent à une famille normale de fonctions algébroïdes.

La démonstration étant identique à celle du théorème VII, je crois inutile de l'exposer en détail. Remarquons d'abord que si les fonctions de la série (72) appartiennent à une famille normale, il en est de même des séries (69) de fonctions holomorphes dans D; dès lors, nous n'avons qu'à employer un théorème général de M. Montel établi récemment dans son travail déjà cité [P. Montel. *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Annales de l'École normale supérieure, tome 29, 3e série, année 1912, pages 531 et 532] et répéter les autres raisonnements faits pour la démonstration du théorème VII pour obtenir le théorème suivant:

Théorème VIII. *Soit une suite infinie de fonctions*

$$f_1(z),\ f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

algébroïdes à un nombre fixe ν *de branches finies dans un domaine* D *et appartenant à une famille normale dans ce domaine.*

Si la suite converge en une infinité de points du domaine D *ayant au moins un point-limite intérieur à* D, *elle converge dans tout le domaine* D *et la convergence est uniforme à l'intérieur de* D. *Les fonctions-limites sont algébroïdes ou holomorphes dans le domaine* D *et le nombre total de leurs branches y est égal à* ν.

C'est visiblement l'extension aux séries de fonctions algébroïdes du théorème de M. Montel ci-dessus mentionné, qui joue pour la démonstration du théorème VIII le même rôle que le théorème de M. Vitali pour la démonstration de notre théorème VII.

CHAPITRE VI.

Les familles de fonctions algébroïdes qui admettent dans un domaine un cercle exceptionnel fixe.

11. M. Montel a démontré qu'une famille de fonctions holomorphes dans un domaine D admettant dans D un cercle exceptionnel *fixe* est une famille normale dans D [P. Montel: *Sur les familles de fonctions analytiques*…, Annales

de l'École normale, t. 29, 3ᵉ série, 1912, pag. 493 et 494]. Ces familles comprennent comme cas particulier les familles de fonctions bornées dans leur ensemble, pour lesquelles il n'y a qu'un cercle non exceptionnel ayant comme centre l'origine des coordonnées. Nous allons étendre aux familles de fonctions algébroïdes dans un domaine D le théorème ci-dessus indiqué de M. MONTEL en suivant sa méthode elle-même pour les ramener aux familles de fonctions algébroïdes bornées en module.

Soit (F) une famille de fonctions algébroïdes[1] à ν branches dans un domaine D admettant dans D un cercle exceptionnel fixe et $u = f(z)$ une fonction quelconque de cette famille; si le centre du cercle exceptionnel est le point a du plan u et son rayon est égal à K nous aurons l'inégalité:

$$|f(z) - a| > K \tag{73}$$

satisfaite pour toutes les branches de toutes les fonctions $f(z)$ et pour tout point z du domaine D; en d'autres termes, les points $u = f(z)$ ne pénètrent jamais dans le cercle:

$$|u - a| < K.$$

Posons:

$$f(z) - a = \frac{1}{\varphi(z)},$$

et cosidérons la famille (F') composée des fonctions

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}, \tag{74}$$

qui sont bornées dans D, puisque nous avons:

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{K},$$

pour toutes les branches de toutes les fonctions $\varphi(z)$ et pour tout point z du domaine D; la famille (F') est donc normale d'après notre théorème V.

Considérons maintenant une suite infinie de fonctions de la famille (F)

$$f_1(z),\, f_2(z),\, f_3(z),\, \ldots,\, f_n(z),\, \ldots \tag{75}$$

[1] Supposées finies dans le domaine D; nous supposons, c'est à dire, qu'elles ne prennent pas dans D la valeur ∞.

à laquelle correspond, moyennant l'égalité (74), une suite infinie:

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \varphi_3(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots \tag{76}$$

de fonctions de la famille (F'). De cette suite (76) nous pouvons extraire une nouvelle suite:

$$\varphi_{m_1}(z),\ \varphi_{m_2}(z),\ \ldots,\ \varphi_{m_n}(z),\ \ldots \tag{77}$$

convergeant uniformément vers des fonctions algébroïdes ou holomorphes dans D, dont le nombre total de branches est égal à ν; à cette suite correspond une suite:

$$f_{m_1}(z),\ f_{m_2}(z),\ \ldots,\ f_{m_n}(z),\ \ldots, \tag{78}$$

de fonctions de la famille donnée (F). Soit $\Phi(z)$ une fonction limite de la suite (77); si cette fonction est identiquement nulle, il lui correspond *l'infini* comme fonction-limite de la suite (78); si $\Phi(z)$ n'est pas identiquement nulle, elle ne prend pas dans le domaine D la valeur 0, puisque il en est de même des fonctions $\varphi_{m_1}(z),\ \varphi_{m_2}(z),\ \ldots,\ \varphi_{m_n}(z),\ \ldots,$ (d'après le théorème VI): en effet, par hypothèse, les fonctions $f(z)$ restent finies dans le domaine D; donc, à la fonction algébroïde $\Phi(z)$ correspond une fonction $a + \frac{1}{\Phi(z)}$ *algébroïde et finie* dans le domaine D, qui est une fonction-limite[1] de la suite (78). Or, la suite (78) est extraite de la suite (75); nous en concluons que l'on peut extraire de la suite (75) une suite nouvelle convergeant uniformément vers des fonctions algébroïdes et finies dans le domaine D ou vers l'infini, le nombre total des branches des fonctions limites (l'infini compris) étant égal à ν. Nous avons, donc, établi le théorème suivant:

Théorème IX. *Soit une famille (F) de fonctions $u = f(z)$ algébroïdes à ν branches et finies dans un domaine D. Si cette famille admet dans le plan u un cercle quelconque exceptionnel fixe, elle est normale dans le domaine D.*

12. Envisageons la famille (F) composée de toutes les fonctions algébroïdes $u = \mathrm{a}(z)$ définies par l'équation:

$$\sigma(z, u) = u^\nu + A_1(z)\,u^{\nu-1} + A_2(z)\,u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(z)\,u + A_\nu(z) = 0, \tag{79}$$

où les $A_1(z),\ A_2(z),\ \ldots,\ A_\nu(z)$ désignent des fonctions holomorphes dans un cercle $|z| < R$

[1] La convergence de la suite (78) est uniforme, parce que le module des fonctions (77) est borné inférieurement et, par conséquent, celui des fonctions (78) est borné supérieurement.

$$
\begin{aligned}
A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_{\nu-1}(z) &= a_{\nu-1} + b_{\nu-1} z + \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A_\nu(z) &= a_\nu + b_\nu z + \ .\ .\ .\ .
\end{aligned}
\tag{80}
$$

les coefficients a_1, b_1, a_2, $b_2, \ldots, a_{\nu-1}$, $b_{\nu-1}$, a_ν, b_ν étant fixes, tandis que les coefficients non écrits sont *quelconques* (*des paramètres variables*). Ainsi les fonctions de la famille (F) sont *algébroïdes* et *finies* dans le cercle (C):

$$|z| < R. \tag{81}$$

Supposons que, lorsque le point z se déplace dans le cercle (C) les points $u = \mathrm{a}(z)$ ne pénètrent jamais (pour aucune fonction de la famille) dans un cercle (K) du plan u; en d'autres termes, nous supposons qu'il existe un nombre γ fixe tel que l'inégalité:

$$|u - \gamma| > q, \tag{82}$$

soit satisfaite pour toutes les branches de chaque fonction de la famille et pour tous les points situés dans le cercle (C), q désignant un nombre positif fixe.

Le cercle (K) défini par l'inégalité:

$$|u - \gamma| < q,$$

s'appelle alors *exceptionnel* dans le cercle (C), parce que tous ses points sont exceptionnels dans (C) par rapport à l'ensemble des fonctions de la famille: cette dénomination est déjà utilisée dans le N° précédent.

Si nous désignons par u_1, u_2, $u_3, \ldots, u_\nu$ les branches de $u = \mathrm{a}(z)$, nous aurons:

$$|u_1 - \gamma| > q, \quad |u_2 - \gamma| > q, \quad |u_3 - \gamma| > q, \ldots, \quad |u_\nu - \gamma| > q,$$

et, par conséquent:

$$|(u_1 - \gamma)(u_2 - \gamma)(u_3 - \gamma) \ldots (u_\nu - \gamma)| > q^\nu.$$

Or, nous avons:

$$|(u_1 - \gamma)(u_2 - \gamma)(u_3 - \gamma) \ldots (u_\nu - \gamma)| = |\varphi(z, \gamma)|.$$

On en déduit;

$$|\sigma(z, \gamma)| > q^\nu \quad \text{ou} \quad \left|\frac{1}{\sigma(z, \gamma)}\right| < \frac{1}{q^\nu}.$$

La fonction $\dfrac{1}{\sigma(z, \gamma)}$ est holomorphe dans le cercle (C), puisque $\sigma(z, \gamma)$ est holomorphe dans le même cercle et ne s'y annule pas; si nous posons:

$$\frac{1}{\sigma(z, \gamma)} = \delta_0 + \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \cdots,$$

nous avons;

$$\delta_0 = \frac{1}{\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1}\gamma + a_\nu},$$

$$\delta_1 = -\frac{b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}\gamma + b_\nu}{(\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1}\gamma + a_\nu)^2}.$$

D'après un théorème classique de Cauchy, nous avons:

$$\frac{|b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}\gamma + b_\nu|}{|\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + \cdots + a_{\nu-1}\gamma + a_\nu|^2} \leq \frac{\text{Max de} \left|\dfrac{1}{\sigma(z, \gamma)}\right| \text{ pour } |z| = \dfrac{R}{2}}{\dfrac{R}{2}} < \frac{\dfrac{1}{q^\nu}}{\dfrac{R}{2}},$$

ou bien:

$$R \,.\, |b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}\gamma + b_\nu| < \frac{2}{q^\nu} |\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1}\gamma + a_\nu|^2.$$

On en déduit:

$$R < \frac{2}{q^\nu} \frac{|\gamma^\nu + a_1 \gamma^{\nu-1} + a_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1}\gamma + a_\nu|^2}{|b_1 \gamma^{\nu-1} + b_2 \gamma^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}\gamma + b_\nu|}, \tag{83}$$

en supposant que le nombre γ ne soit pas une racine de l'équation:

$$b_1 x^{\nu-1} + b_2 x^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1} x + b_\nu = 0. \tag{84}$$

Nous voyons que le second membre de l'inégalité (83) dépend seulement des nombres donnés fixes $\nu, q, \gamma, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ [et nullement des paramètres variables qui figurent dans les séries (80)]. Nous remarquons que l'équation (84) ne doit pas être une identité, si nous voulons tirer un parti utile de

ces considérations; il faut, donc, supposer que les coefficients $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\nu$, ne soient pas *tous nuls*.

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème X. *Soit* (F) *la famille composée de toutes les fonctions* $u = \mathrm{a}(z)$ *définies par l'équation:*

$$\sigma(z, u) = u^\nu + A_1(z)\, u^{\nu-1} + A_2(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(z)\, u + A_\nu(z) = 0, \tag{85}$$

où les $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$ *désignent des fonctions régulières* en $z = 0$:

$$\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \cdots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_\nu(z) &= a_\nu + b_\nu z + \cdots \end{aligned} \tag{86}$$

es coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu$ *étant fixes, tandis que les coefffcients non écrits sont des paramètres variables. Nous supposons que les* $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\nu$ *ne soient pas tous nuls. Si nous considérons l'ensemble* (E) *des valeurs* u *qui satisfont à l'inégalité:*

$$|u - \gamma| < q, \tag{87}$$

γ *étant un nombre*[1] *quelconque fixe et* q *un nombre positif aussi fixe, il existe un cercle:*

$$|z| < R = R(\nu, \gamma, q, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_1, b_2, \ldots, b_\nu), \tag{88}$$

dont le rayon est fixe ne dépendant que des nombres donnés $\nu, \gamma, q, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ [*et nullement des paramètres variables des séries* (86)], *à l'intérieur duquel toute fonction de la famille* (F) *ou bien prend au moins une fois une valeur de l'ensemble* (E) *ou bien admet un point singulier transcendant* [*c'est-à-dire: elle n'est pas algébroïde dans le cercle* (88)].

Ce théorème nous fournit aussi la proposition suivante:

[1] différent des racines de l'équation:

$$b_1 x^{\nu-1} + b_2 x^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1} x + b_\nu = 0.$$

Étant donnés ν couples de nombres $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_\nu, b_\nu)$ tels que les $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\nu$, ne soient pas tous nuls, si nous désignons par (E) l'ensemble de toutes les valeurs u qui satisfont à l'inégalité:

$$|u-\gamma| < q,$$

le nombre γ n'étant pas une racine de l'équation

$$b_1 x^{\nu-1} + b_2 x^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1} x + b_\nu = 0$$

il existe un nombre positif $\Phi(\nu, \gamma, q, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$, dépendant seulement des nombres donnés $\nu, \gamma, q, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, jouissant des propriétés suivantes: α!) δ étant un nombre positif arbitrairement petit, toute fonction de la famille (F), définie par l'équation (85) *et les formules* (86), *algébroïde dans le cercle:*

$$|z| < \Phi + \delta,$$

prend, dans ce cercle, au moins une fois l'une des valeurs de l'ensemble (E) ou l'infini. β!) Si $\Phi > 0$ et $0 < \delta < \Phi$, il existe au moins une fonction de la famille (F) algébroïde et ne prenant dans le cercle:

$$|z| < \Phi - \delta,$$

aucune des valeurs de l'ensemble (E) ni la valeur ∞.

Remarquons que l'ensemble (E) est représenté sur un plan u par l'ensemble des points situés dans le cercle ayant comme centre le point γ et son rayon égal à q; ce cercle peut avoir un rayon q arbitrairement petit.

Le théorème X peut s'énoncer d'une façon abrégée comme il suit;

Aucune fonction $u = f(z)$ de la famille (F) algébroïde et finie dans le cercle de centre origine et de rayon

$$R > \frac{2}{q^\nu} \frac{|\gamma^\nu + a_1\gamma^{\nu-1} + a_2\gamma^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1}\gamma + a_\nu|^2}{|b_1\gamma^{\nu-1} + b_2\gamma^{\nu-2} + \cdots + b_{\nu-1}\gamma + b_\nu|}.$$

ne saurait admettre, dans ce cercle, un domaine exceptionnel du plan u renfermant complètement dans son intérieur le cercle

$$|u-\gamma| < q.$$

CHAPITRE VII.

Remarques sur les séries composées.

13. Soit:

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots, \tag{1}$$

une série de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches finies dans un domaine D et désignons par $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \alpha_{n3}, \ldots, \alpha_{n\nu}$ les ν valeurs de $f_n(z_0)$, où z_0 est un point quelconque du domaine D.

Toute série de la forme:

$$\alpha_{1K_1},\ \alpha_{2K_2},\ \alpha_{3K_3},\ \ldots,\ \alpha_{nK_n},\ \ldots, \tag{2}$$

contenant *une détermination et une seule* de chaque terme de la série:

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0),\ f_3(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0),\ \ldots, \tag{3}$$

s'appelle *branche* de cette série (3).

D'après la définition du N° 9, *la série* (3) *est dite convergente, s'il existe des branches convergentes de cette série, dont le nombre est au moins égal à* ν.[1] Nous dirons qu'un tel ensemble de ν branches convergentes de la série (3) forme un *système fondamental* de branches. Soit (S) un tel système de branches convergeant vers les limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$ qui ne sont pas nécessairement distinctes; je dis que toute série (quelconque) formée par des déterminations des termes de la série (3) [c'est-à-dire: toute série, dont chaque terme a une valeur unique qui est une détermination d'un terme de la série (3)] ne saurait avoir d'autres limites que les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$.

Supposons, en effet, qu'une telle série (S_1) ait une limite b différente des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$; on pourrait, alors, en extraire une nouvelle série (S_2) convergeant vers le nombre b. La suite (S_2) étant infinie, il est clair qu'elle contient une infinité de termes d'une au moins des branches du système fondamental (S); on pourra, donc, extraire de la série (S_2) une nouvelle série (S_3) qui peut être aussi extraite d'une branche (B) du système fondamental (S). Nous voyons que la série (S_3) converge d'une part vers le nombre b [comme extraite de la série (S_2)] et d'autre part vers un des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$ [comme extraite de la série (B)]; donc, la limite b n'est égale qu'à un des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$.

[1] et dont l'ensemble contient toutes les déterminations de chaque terme de la série (3).

La série (3) sera appelée *composée*, puisque chaque terme a ν valeurs, que nous ne voulons pas séparer comme étant les ν valeurs en z_0 d'une fonction multiforme.

Toute série, dont chaque terme n'a qu'une valeur *unique*, qui est une valeur d'un terme de la série (3), sera appelée *série simple extraite de la série composée* (3). Nous avons ci-dessus établi le théorème suivant:

Théorème XI. *Soit:*

$$f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots \tag{4}$$

une série de fonctions algébroïdes à un nombre fixe ν de branches finies dans un domaine D et z_0 un point de ce domaine.

Si cette série converge en z_0, toute série simple extraite de la série composée

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0),\ f_3(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0),\ \ldots \tag{5}$$

ne saurait admettre d'autres limites que celles des branches formant un système fondamental. Parmi les séries simples extraites de (5) les plus intéressantes sont les branches de (5), dont ν au moins sont des séries convergentes.

14. Considérons une série composée

$$f_{m_1}(z_0),\ f_{m_2}(z_0),\ f_{m_3}(z_0),\ \ldots,\ f_{m_n}(z_0),\ \ldots \tag{6}$$

extraite de la série (5) supposée convergente; il est clair que l'ensemble de toutes les séries simples extraites de (6) admet toutes les limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$ d'un système fondamental de branches de la série (5).

Inversement, supposons que de *toute* série (6) extraite de (5) nous pouvons extraire au moins une série simple convergeant vers un nombre fixe λ_1; je dis que, alors, une au moins des branches de la série multiforme (5) converge vers le même nombre λ_1.

En effet, désignons par (E) l'ensemble des points du plan u, qui représentent les déterminations de tous les termes de la série (5) et décrivons un cercle (C) de centre λ_1 et de rayon quelconque r; désignons aussi par (A) l'ensemble des points de (E) qui sont situés dans le cercle (C) et par (A_1) l'ensemble des points qui représentent toutes les déterminations de tous les termes d'une suite infinie:

$$f_{K_1}(z_0),\ f_{K_2}(z_0),\ f_{K_3}(z_0),\ \ldots \tag{7}$$

extraite de la série (5). Si tous les points de l'ensemble (A_1) étaient en dehors du cercle (C), il serait impossible d'extraire de la suite (7) une série *simple* con-

vergeant vers le nombre λ_1, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse ci-dessus indiquée; nous en concluons que les ν points $f_n(z_0)$ ne sauraient être *tous* en dehors du cercle (C) sauf, peut-être, pour un nombre fini de termes de la série (5) et, par conséquent, il existe au moins une branche:

$$a_{1\mu_1},\ a_{2\mu_2},\ a_{3\mu_3},\ \ldots \tag{8}$$

de la série (5) telle que tous les points $a_{1\mu_1}, a_{2\mu_2}, a_{3\mu_3}, \ldots$ de cette branche (8), sauf, peut-être, un nombre fini d'entre eux, soient intérieurs au cercle (C), aussi petit que soit le rayon r. Si, donc, l'ensemble dérivé (E') de (E) est fini, nous pouvons prendre le rayon r assez petit pour que le centre du cercle (C) soit le seul élément de l'ensemble (E') qui se trouve à l'intérieur du cercle (C); alors, l'ensemble (A) n'a d'autre point limite et la branche (8), dont les termes appartiennent à l'ensemble (A) [sauf, peut-être, un nombre fini de termes], converge, par conséquent, vers le nombre λ_1.

Supposons maintenant qu'il existe ν nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$ tels que l'ensemble des valeurs des termes de toute suite infinie:

$$f_{K_1}(z_0),\ f_{K_2}(z_0),\ f_{K_3}(z_0),\ \ldots \tag{9}$$

extraite de la suite (5) possède les limites $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$; alors, comme nous venons de démontrer, il existera ν branches convergentes de la suite (5) ayant comme limites respectives les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_\nu$ et, par conséquent, la série (5) sera convergente.

Ces considérations nous amènent à adopter la définition suivante: *Nous dirons qu'un nombre λ est une limite simple de convergence de la série* (5), *si tout cercle de centre λ et de rayon suffisamment petit renferme, dans son intérieur, une valeur* (*et une seule*) *de chaque terme de cette série* [*sauf, peut-être, un nombre fini de termes*].

En général, *nous dirons qu'un nombre λ est une limite de convergence multiple d'ordre P de la série* (5), *si tout cercle de centre λ et de rayon suffisamment petit renferme, dans son intérieur, P valeurs* (*exactement*) *de chaque terme de cette série* [*sauf, peut-être, un nombre fini de termes*]. Une limite d'ordre de multiplicité égal à p comptera pour p limites distinctes (simples).

À l'aide de ces notions nous pouvons donner sous une forme très simple la définition de la convergence d'une série composée.

Une série:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

dont chaque terme a ν valeurs, s'appelle série composée d'ordre ν.

Une série composée d'ordre ν sera dite convergente, si elle possède exactement ν limites de convergence [c'est-à-dire si la somme des ordres de multiplicitée de toutes les limites est égal à ν].

Il est évident que cette définition est équivalente à celle que nous avons donnée dans le paragraphe 9; nous remarquons que, d'après le théorème XI, les limites de la série composée:

$$f_1(z_0),\ f_2(z_0),\ f_3(z_0),\ \ldots,\ f_n(z_0),\ \ldots$$

sont les seules limites de l'ensemble des valeurs de tous ces termes. Dans certaines questions, l'étude des limites d'un ensemble dénombrable de nombres se ramène d'une façon naturelle à l'étude des limites de convergence d'une série composée: c'est surtout dans les cas où les nombres de l'ensemble peuvent former des groupes tels que les nombres de chaque groupe se trouvent en liaison intime: soient, par exemple, les ν valeurs en un point z_0 d'une fonction algébroïde dans un domaine D contenant ce point et ayant ν branches dans le même domaine.

CHAPITRE VIII.

Application aux fonctions ayant un nombre infini de branches dans un domaine.

15. M. PIERRE BOUTROUX a publié des travaux intéressants sur les fonctions analytiques d'une variable complexe ayant un nombre infini de branches et sur leurs branches-limites ou fonctions limites.[1] Soit $y(z)$ une fonction multiforme possédant une infinité de branches bornées en module dans un domaine D et soit $z = \bar{z}$ un point qui n'est pas point-limite de points singuliers d'un ensemble de branches $y_1(z)$, $y_2(z)$, ..., alors, on peut extraire de cet ensemble un autre ensemble $y_{K_1}(z)$, $y_{K_2}(z)$, ..., convergeant uniformément vers une fonction-limite holomorphe dans le voisinage de $z = \bar{z}$: cela résulte du théorème de M. MONTEL déjà utilisé pour établir le théorème V, qui est son extension aux séries de fonctions algébroïdes dans un domaine. Nous considérons comme point critique distinct (avec M. BOUTROUX) tout point autour duquel se permutent deux déterminations de $y(z)$: ainsi, un point autour duquel se permutent ν déterminations comptera pour $\nu - 1$ points critiques distincts; si, donc, le point $\bar{z}$ n'est pas point-limite de

[1] Fonctions multiformes à une infinité de branches [Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, 3e série, t. XXII (1905), p. 441—460].

points-critiques, les termes de la série: $y_1(z), y_2(z), \ldots, y_n(z), \ldots$ seront, à partir d'un certain rang, holomorphes en $z = \bar{z}$.

M. Boutroux a démontré que, si le point $\bar{z}$ n'est pas un point-limite d'intersections des branches $y_i(z)$[1] et si la série $y_1(z), y_2(z), \ldots, y_n(z), \ldots$ converge pour $z = \bar{z}$, les branches y_i sont nécessairement bornées en module au voisinage de $\bar{z}$ et, par conséquent, la limite Y de cette série (branche-limite ou fonction-limite) est une fonction holomorphe au voisinage de $\bar{z}$. De plus, la convergence de la série est uniforme, au voisinage de $\bar{z}$.

Supposons que le point $\bar{z}$ soit un point-limite d'intersections des branches y_i supposées holomorphes ou méromorphes dans un certain cercle entourant le point $\bar{z}$ et qu'il existe un entier m tel que deux branches y_i quelconques se coupent moins de m fois à l'intérieur de γ, aussi grands que soient les indices i. Dans ce cas, M. Boutroux démontre que, si la série $y_1(z), y_2(z), \ldots$ sur un chemin aboutissant au point $\bar{z}$ converge vers une fonction-limite $Y(z)$, cette fonction sera méromorphe au voisinage de $z = \bar{z}$ [Voir son travail[2] 1, pag. 3—6].

Notre théorie de séries et familles de fonctions algébroïdes dans un domaine D nous permettra d'obtenir un nouveau résultat sur le sujet étudié par M. Boutroux et concernant le cas des points qui sont des limites de points critiques de nôtre fonction multiforme $y(z)$.

16. Considérons un ensemble infini (E) de branches de $y(z)$ algébroïdes dans le voisinage d'un point $z = z_0$ et bornées en module, dans leur ensemble, dans un domaine D auquel appartient le point z_0. Si une branche y_i ne se permute qu'avec $\nu - 1$ autres branches, dans le voisinage du point z_0, nous dirons que la branche y_i est *d'ordre* ν en $z = z_0$. Si l'ordre des branches de l'ensemble (E) est *borné*, il y a évidemment une infinité de branches de (E) d'ordre fixe égal à un nombre ν. On peut alors former une suite infinie

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots, f_n(z), \ldots \tag{10}$$

de fonctions algébroïdes à ν branches dans le voisinage du point z_0, toutes les branches des termes appartenant à l'ensemble (E); soit:

$$u^\nu + A_{1n}(z)\,u^{\nu-1} + A_{2n}(z)\,u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1,n}(z)\,u + A_{\nu n}(z) = 0, \tag{11}$$

l'équation qui définit la fonction $u = f_n(z)$, les coefficients $A_{1n}(z), A_{2n}(z), \ldots, A_{\nu n}(z)$ étant holomorphes dans le voisinage du point z_0. D'après le théorème V, on peut extraire de la série (10) une autre série

[1] Supposées holomorphes en $z = \bar{z}$.

[2] Sur les fonctions-limites des fonctions multiformes [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXIV, anno 1907].

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \varphi_3(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots \tag{12}$$

convergeant uniformément vers des fonctions algébroïdes dans le voisinage de z_0, dont le nombre total de branches est égal à ν; soit:

$$u^\nu + B_{1n}(z)\,u^{\nu-1} + B_{2n}(z)\,u^{\nu-2} + \cdots + B_{\nu-1,n}(z)\,u + B_{\nu n}(z) = 0, \tag{13}$$

l'équation qui définit la fonction $u = \varphi_n(z)$ dans le voisinage du point $z = z_0$.

Si les fonctions $A_{1n}(z),\ A_{2n}(z),\ \ldots,\ A_{\nu n}(z)$ sont holomorphes dans le voisinage d'un point $z = z_1$ du domaine D, quel que soit l'indice n, ce point sera appelé normal pour la suite (10). Le même point ne sera pas normal pour la suite (10), si la condition d'holomorphie ci-dessus indiquée est en défaut pour une infinité de termes de la suite.

Si nous désignons par $w = f(z)$ une fonction-limite de la série (12), il est clair que cette fonction est algébroïde dans le voisinage de tout point normal de la suite (12); nous remarquons qu'un point normal de cette suite peut bien être un point limite de points critiques de notre fonction multiforme $y(z)$.

Il existe, donc, une branche-limite qui sera algébroïde en tout point normal de la suite (12).

Une série composée telle que (10), dont chaque terme satisfait à une équation de la forme (11) où le dégré ν est fixe et les coefficients $A_i(z)$ sont holomorphes dans le voisinage d'un point $z = z_0$, sera appelée série *canonique* dans le voisinage de $z = z_0$ formée par des branches de nôtre fonction multiforme; elle admet comme point normal tout point dans le voisinage duquel elle ne *cesse pas d'être canonique.*

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème XII. *Soit $y(z)$ une fonction multiforme à une infinité de branches et supposons qu'il existe une série composée ou simple (S) canonique dans le voisinage d'un point $z = z_0$ formée par des branches de $y(z)$ bornées en module, dans leur ensemble, dans un domaine D. Il existe, alors, des fonctions-limites (branches-limites) algébroïdes en tout point normal de la série (S) intérieur au domaine D. Si, donc, la série (S) est canonique en tous les points du domaine D, les branches-limites sont algébroïdes dans tout le domaine D.*

Nous dirons que la série canonique (S) est de degré ν, si l'entier ν est égal au degré fixe de l'équation à laquelle satisfont les branches de chaque terme de la série: alors, chaque terme possède ν valeurs distinctes ou non, et la série (S) admet, d'après le théorème V, des fonctions-limites dont le nombre total de branches est égal à ν.

Si la série (S) converge en une infinité de points tendant vers un point z_0 comme point-limite, il en est de même, d'après le théorème VII, dans tout le voisinage de ce point: c'est-à-dire: la série (S) convergera dans un cercle (C) de centre z_0 vers des branches-limites algébroïdes dans le même cercle, dont le nombre total de branches est égal à ν. Par conséquent, d'après le théorème XI, l'ensemble (E) ne saurait avoir plus de ν valeurs limites pour tout point z intérieur au cercle (C).

Nous obtenons, donc, le théorème suivant qui complète le précédent:

Théorème XIII. *Soit un ensemble (E) de branches de $y(z)$ bornées en module et formant une série (S) canonique de degré ν dans le voisinage d'un point z_0. Si la série (S) converge en une infinité de points z tendant vers le point z_0 comme point limite, l'ensemble dérivé de (E) aura au plus ν valeurs pour tout point du voisinage de z_0: c'est-à-dire: pour tout point intérieur à un certain cercle de centre z_0.*

Ces deux théorèmes XII et XIII fournissent visiblement des relations entre la distribution des points critiques de la fonction multiforme $y(z)$ et la distribution de ses déterminations pour une valeur de z. Ils complètent, d'une façon naturelle, les résultats de M. Boutroux plus haut mentionnés.

Lorsque le point z_0 n'appartient pas à l'ensemble dérivé de l'ensemble (ζ) des points critiques de la fonction multiforme nous sommes dans le cas de M. Boutroux. Notre cas est celui où le point z_0 appartient à l'ensemble dérivé de (ζ) de façon qu'il soit point limite de points critiques *algébriques* pour chaque branche de l'ensemble (E).

CHAPITRE IX.

Familles et séries de fonctions ayant une infinité de branches.

17. Envisageons une famille (F) de fonctions $u = \varphi(z)$ ayant une infinité de branches, bornées en module dans un domaine D, et déterminées par une équation:

$$g(z, u) = 0, \tag{14}$$

$g(z, u)$ désignant une fonction des deux variables z et u holomorphe dans le domaine D pour z et dans un certain cercle (C) de rayon ϱ pour la variable u. D'après notre hypothèse, il existe un nombre positif fixe K tel que, pour toute fonction de la famille et pour tout point z_0 du domaine D, le module des zéros de la fonction $g(u) = g(z_0, u)$ est inférieur à K; si nous considérons le cercle fixe:

$$|u| < K,$$

ce cercle contient (dans son intérieur) toujours tous les zéros de la fonction $q(u)$. Nous en concluons que, si cette fonction $q(u)$ possède une infinité de zéros, nous aurons l'inégalité:

$$\varrho < K, \tag{15}$$

puisque la fonction $q(u)$ n'est pas holomorphe dans le cercle (C'):

$$|u| < K, \tag{16}$$

à l'intérieur duquel elle admet une infinité de zéros.

Si, donc, nous faisons l'hypothèse que chaque fonction $u = f(z)$ de la famille admette *une infinité de valeurs pour chaque point z du domaine D*, l'inégalité (15) sera satisfaite pour toute fonction de la famille et pour tout point z du domaine D.

D'autre part, si nous posons:

$$g(z, u) = A_0(z) + A_1(z)\,u + A_2(z)\,u^2 + \cdots + A_n(z)\,u^n + \cdots$$

nous savons que le rayon de convergence de cette série est égal à $\frac{1}{L}$, L désignant la plus grande limite (ou limite supérieure d'indétermination d'après du Bois-Reymond) de la suite des nombres:

$$|A_1(z)|,\ \left|\sqrt{A_2(z)}\right|,\ \left|\sqrt[3]{A_3(z)}\right|, \ldots,\ \left|\sqrt[n]{A_n(z)}\right|, \ldots \tag{17}$$

Nous avons donc:

$$\frac{1}{L} < K \quad \text{ou bien} \quad L > \frac{1}{K}. \tag{18}$$

Avant d'aller plus loin nous donnerons quelques notions, qui nous sont utiles ici.

Si nous considérons une suite infinie de nombres positifs:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots \theta_n, \ldots \tag{19}$$

il existe un nombre θ ayant la propriété suivante: Tout nombre positif plus petit que θ est inférieur à θ_n à partir d'une valeur de n et tout nombre plus grand que θ est supérieur à θ_n pour une infinité de valeurs de n. Ce nombre θ sera

appelé *limite inférieure d'indétermination* et le maximum de la quantité $|\theta_n - \theta|$ sera appelé *écart maximum* de la suite (19).

Il est clair que la limite inférieure d'indétermination de la série:

$$\frac{1}{|A_1(z)|}, \quad \frac{1}{|\sqrt{A_2(z)}|}, \quad \frac{1}{|\sqrt[3]{A_3(z)}|}, \ldots, \frac{1}{|\sqrt[n]{A_n(z)}|}, \ldots \tag{20}$$

est égale à $\frac{1}{L}$. Supposons que l'écart maximum de cette suite soit *borné* dans le domaine D pour la famille F; alors, il existera un nombre positif fixe μ tel que l'inégalité:

$$\frac{1}{|\sqrt[n]{A_n(z)}|} - \frac{1}{L} < \mu, \tag{21}$$

soit satisfaite pour tout point z du domaine D pour toute valeur de n et pour toute fonction $u = \varphi(z)$ de la famille donnée F. On aura donc:

$$\frac{1}{|\sqrt[n]{A_n(z)}|} < \frac{1}{L} + \mu < K + \mu \quad \text{ou bien:} \quad |\sqrt[n]{A_n(z)}| > \frac{1}{K+\mu}. \tag{22}$$

On en déduit:

$$|A_n(z)| > \frac{1}{(K+\mu)^n}, \tag{23}$$

pour tout point intérieur au domaine D pour toute valeur de n et pour toute fonction de la famille donnée F.

Si nous désignons par f_n la famille des fonctions holomorphes $A_n(z)$, qui correspond à la famille donnée F, nous voyons que, grâce à cette inégalité (23) et à un théorème déjà mentionné de M. Montel, la famille f_n est *normale* pour toute valeur finie de l'indice n: les fonctions de chacune de ces familles sont bornées (dans leur ensemble) en module inférieurement. Nous avons ainsi établi le théorème suivant.

Théorème XIV: *Considérons une famille* (F) *de fonctions ayant une infinité de valeurs pour chaque point d'un domaine D, déterminées par une équation de la forme:*

$$g(z, u) = A_0(z) + A_1(z)u + A_2(z)u^2 + A_3(z)u^3 + \cdots + A_n(z)u^n + \cdots = 0,$$

où $g(z, u)$ désigne une fonction holomorphe dans le domaine D du plan z et dans un cercle $|u| < \varrho$ du plan u; supposons en outre que l'écart maximum des séries:

$$\frac{1}{|A_1(z)|}, \quad \frac{1}{|\sqrt{A_2(z)}|}, \quad \frac{1}{|\sqrt[3]{A_3(z)}|}, \ldots, \quad \frac{1}{|\sqrt[n]{A_n(z)}|}, \ldots,$$

soit borné pour la famille F dans le domaine D et désignons par f_n la famille des fonctions holomorphes $A_n(z)$ correspondante à la famille F.

Si la famille donnée F est composée de fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D, la famille f_n est normale dans le même domaine D pour toute valeur finie de l'indice n.

CHAPITRE X.

Familles de fonctions algébroïdes admettant une courbe exceptionnelle.

18. Soit une famille F de fonctions $u = \varphi(z)$ algébroïdes à ν branches dans un domaine D du plan z et ne prenant, dans ce domaine, aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe Γ du plan des u. Nous démontrerons qu'une telle famille est *normale* dans le domaine D; pour faire la démonstration, nous distinguons deux cas:

A! cas. Si la courbe Γ est fermée, elle partage le plan u en deux régions Δ_1 et Δ_2 et, par conséquent, nous pouvons utiliser les raisonnements de M. Montel dans son Mémoire [Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent .... Annales de l'École normale, XXIX—Novembre 1912, page 494]; Lorsque z parcourt le domaine connexe D, le point $u = \varphi(z)$ décrit un domaine connexe Δ situé tout entier dans Δ_1 ou tout entier dans Δ_2; par conséquent, si nous considérons une suite infinie de fonctions de la famille, on peut en extraire une nouvelle suite (S) de fonctions pour lesquelles le domaine Δ est contenu tout entier ou dans Δ_1 (pour toutes) ou dans Δ_2 (pour toutes); alors pour les fonctions de cette suite (S) l'un des domaines Δ_1 et Δ_2 sera exceptionnel et, par conséquent, d'après le théorème IX, nous pouvons extraire de la suite S une nouvelle suite S_1 convergeant uniformément vers des fonctions algébroïdes dans D ou vers l'infini, dont le nombre total de branches est égal à ν.

La famille donnée F est donc *normale*.

B! cas. Supposons maintenant que la courbe Γ soit ouverte joignant le point a au point b. Je suivrai, dans ce cas aussi la voie indiquée par M.

Montel dans son Mémoire ci-dessus cité (pages 495 et 496) et utilisée pour les familles de fonctions holomorphes.

Il est d'abord clair que le domaine Δ n'est traversé par la courbe Γ pour aucune des fonctions $u = \varphi(z)$. Posons:

$$\frac{u-a}{u-b} = \omega, \qquad w = \sigma(z) = \log \omega, \tag{24}$$

et remarquons que les fonctions ω ne prennent, dans le domaine D, aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe (Γ_1) continue joignant l'origine avec l'infini; par conséquent, lorsque le point z parcourt le domaine connexe D, les point ω ne traversent pas cette courbe Γ_1 et, par suite, ne peuvent tourner autour de l'origine.

Pour déterminer complètement la fonction $\sigma(z)$ convenons qu'en un point de départ z_0 du domaine D la parte imaginaire de $\log \omega$ sera comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, la limite inférieure exclue. La fonction ω étant algébroïde à ν branches dans le domaine D, soient:

$$\omega_1 = \varrho_1 e^{i\theta_1}, \quad \omega_2 = \varrho_2 e^{i\theta_2}, \quad \omega_3 = \varrho_3 e^{i\theta_3}, \ldots, \omega_\nu = \varrho_\nu e^{i\theta_\nu},$$

les ν valeurs de ω en $z = z_0$, où les $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_\nu$ désignent leurs modules. Les valeurs de $\sigma(z)$ en z_0 seront:

$$\log \varrho_1 + i\theta_1, \ \log \varrho_2 + i\theta_2, \ldots, \log \varrho_\nu + i\theta_\nu, \tag{25}$$

avec:

$$-\pi < \theta_1 < \pi, \quad -\pi < \theta_2 < \pi, \ldots, \quad -\pi < \theta_\nu \leq \pi.$$

Si maintenant nous passons à un autre point quelconque z_1 du domaine D par les divers chemins qui joignent les points z_0 et z_1 et sont situés dans le domaine D, nous obtiendrons des valeurs de $\sigma(z_1)$, dont les parties imaginaires sont comprises entre -3π et $+3\pi$. D'autre part, si nous désignons par

$$R_1 e^{i\gamma_1}, \ R_2 e^{i\gamma_2}, \ R_3 e^{i\gamma_3}, \ldots, \ R_\nu e^{i\gamma_\nu}, \tag{26}$$

les valeurs en $z = z_1$ de la fonction ω, celles de la fonction $\sigma(z)$ au même point z_1 seront de la forme:

$$\log R_1 + i(\gamma_1 + 2K_1\pi), \ \log R_2 + i(\gamma_2 + 2K_2\pi), \ldots, \ \log R_\nu + i(\gamma_\nu + 2K_\nu\pi), \tag{27}$$

les $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ étant des entiers positifs ou négatifs. Mais à chacune de ces ν formes ne correspond qu'une seule valeur de $\sigma(z_1)$, parce que chacune des

formes (27) ne contient que des nombrées qui diffèrent d'un multiple de $2\pi i$: pour passer, par exemple, d'une valeur $\log R_1 + i(\gamma_1 + 2K_1\pi)$ à une autre valeur de la forme, il faudrait que, le point z parcourant le domaine connexe D, le point $R_1 e^{i\gamma_1}$ puisse tourner autour de l'origine, ce qui est impossible.

Nous en concluons que les fonctions $w = \sigma(z)$ sont aussi *algébroïdes à ν branches* dans le domaine D et les points $w = \sigma(z)$ ne sortiront pas d'une bande (B) du plan des w limitées par deux droites parallèles à l'axe des parties réelles menées à la distance 3π de cet axe: en d'autres termes toute la région du plan des w située en dehors de la bande B est exceptionnelle pour les fonctions $w = \sigma(z)$ dans le domaine D et ces fonctions sont aussi finies dans le même domaine, puisque les fonctions $\omega = \dfrac{u-a}{u-b}$ n'y prennent ni la valeur *zéro* ni la valeur *infini*. Donc, d'après le théorème IX, les fonctions $w = \sigma(z)$ forment une famille *normale* et, par conséquent, de toute suite infinie de fonctions $\sigma(z)$ nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergeant uniformément vers des fonctions algébroïdes finies dans le domaine D ou vers la constante infinie, dont le nombre total de branches est égal à ν.

En disant que le nombre total des fonctions-limites est égal à ν, nous entendons que toutes les fonctions-limites W satisfont à une équation algébrique du degré ν par rapport à W.

Si nous prenons maintenant une suite infinie de fonctions de la famille donnée, les formules (24) lui font correspondre une suite infinie de fonctions $\sigma(z)$, de laquelle nous pouvons, puisqu'elles forment une famille normale, extraire une nouvelle suite:

$$\sigma_1(z),\ \sigma_2(z),\ \sigma_3(z),\ \ldots,\ \sigma_n(z),\ \ldots, \tag{28}$$

convergeant uniformément vers des fonctions-limites algébroïdes finies dans D ou vers la constante infinie, dont le nombre total de branches est égal à ν.

À cette suite correspond une suite de fonctions:

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \varphi_3(z),\ \ldots,\ \varphi_n(z),\ \ldots, \tag{29}$$

de la famille donnée, la correspondance étant déterminée par la relation:

$$\varphi_n(z) = \frac{a - b\,e^{\sigma_n(z)}}{1 - e^{\sigma_n(z)}}. \tag{30}$$

20. Distinguons ici quatre cas:

α! cas. Supposons qu'aucune des fonctions-limites $\sum_1(z)$, $\sum_2(z), \ldots, \sum_q(z)$ de la suite (28) ne soit la constante infinie ou la constante $2K\pi i$, où K désigne un nombre entier ou zéro; alors ces fonctions ne prennent pas à l'intérieur de D, ni la valeur $2K\pi i$ ni la valeur infinie, puisqu'il en est ainsi des fonctions $\sigma_n(z)$; en effet les fonctions $\omega = \dfrac{u-a}{u-b}$ ne prennent pas la valeur 1. Nous appliquons ici le théorème VI. La suite (29) converge vers les fonctions:

$$\Phi_1(z) = \frac{a - b\,e^{\Sigma_1(z)}}{1 - e^{\Sigma_1(z)}}, \quad \Phi_2(z) = \frac{a - b\,e^{\Sigma_2(z)}}{1 - e^{\Sigma_2(z)}}, \ldots, \quad \Phi_q(z) = \frac{a - b\,e^{\Sigma_q(z)}}{1 - e^{\Sigma_q(z)}}, \tag{31}$$

qui sont algébroïdes et finies dans D et dont le nombre total de branches est égal à ν.

β! cas. Supposons que l'une des fonctions-limites $\sum_1(z)$, $\sum_2(z), \ldots, \sum_q(z)$ soit une constante $2K\pi i$: soit:

$$\sum\nolimits_q(z) = 2K\pi i.$$

Les fonctions $e^{\sigma_n(z)}$ convergent uniformément vers les fonctions $e^{\Sigma_1(z)}$, $e^{\Sigma_2(z)}, \ldots,$ $e^{\Sigma_{q-1}(z)}$ et la constante 1 et la suite (29) converge uniformément vers les fonctions $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_{q-1}(z)$ et la constante infinie: Nous entendons par là que, étant donné un nombre ε arbitrairement petit, les inégalités:

$$|\Phi_1(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad |\Phi_2(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \ldots, \quad |\Phi_{q-1}(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad |\varphi_n(z)| > \frac{1}{\varepsilon},$$

sont satisfaites pour une branche au moins de $\varphi_n(z)$, à partir d'une valeur de n, et pour tous les points z intérieurs au domaine D.

γ! cas. Supposons enfin que l'une des fonctions-limites $\sum_1(z)$, $\sum_2(z), \ldots,$ $\sum_q(z)$ soit la constante infinie; soit, par exemple: $\sum_q(z) = \infty$; alors, à chaque nombre positif ε arbitrairement petit on peut faire correspondre un entier μ tel que pour $n > \mu$ et pour tous les points intérieurs au domaine D l'on ait les inégalités:

$$\left|\sum\nolimits_1(z) - \sigma_n(z)\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum\nolimits_2(z) - \sigma_n(z)\right| < \varepsilon, \ldots, \quad \left|\sum\nolimits_{q-1}(z) - \sigma_n(z)\right| < \varepsilon, \quad |\sigma_n(z)| > \frac{1}{\varepsilon},$$

chacune de ces inégalités étant satisfaite pour une au moins branche de toutes les fonctions $\sigma_n(z)$. Puisque la partie imaginaire des $\sigma_n(z)$ est comprise entre -3π et $+3\pi$, nous aurons les inégalités:

$$\left|\sum\nolimits_1(z) - \sigma_n(z)\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum\nolimits_2(z) - \sigma_n(z)\right| < \varepsilon, \ldots, \quad \left|\sum\nolimits_{q-1}(z) - \sigma_n(z)\right| < \varepsilon, \quad |R_n(z)| > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad (32)$$

satisfaites à partir d'une valeur n_1 de n pour tous les points intérieurs à D et chacune pour une branche au moins de $\sigma_n(z)$, en désignant par $R_n(z)$ la partie réelle des fonctions $\sigma_n(z)$. La dernière des inégalités (32) peut être remplacée par l'une des inégalités:

$$|e^{\sigma_n(z)}| < e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \quad \text{ou} \quad |e^{-\sigma_n(z)}| < e^{-\frac{1}{\varepsilon}},$$

satisfaite pour une au moins des branches.

Nous pouvons, donc, faire correspondre au nombre positif ε un entier n tel que pour $n > n$, pour tous les points intérieurs au domaine D et pour toutes fonctions $e^{\sigma_n(z)}$ l'on ait les inégalités:

$$|e^{\Sigma_1(z)} - e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \quad |e^{\Sigma_2(z)} - e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \ldots, \quad |e^{\Sigma_{q-1}(z)} - e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \qquad (33)$$

et l'une des inégalités:

$$|e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \quad |e^{-\sigma_n(z)}| < \varepsilon, \qquad (34)$$

chacune des (33) étant satisfaite pour une au moins des branches des $\sigma_n(z)$ et l'une des inégalités (34) pour une branche au moins des $\sigma_n(z)$ de façon que chaque branche des $\sigma_n(z)$ satisfasse à l'une des inégalités (33) et (34).

Les inégalités (33) nous donnent:

$$|e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon + e^{\Sigma_1(z)}, \quad |e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon + e^{\Sigma_2(z)}, \ldots, \quad |e^{\sigma_n(z)}| < \varepsilon + e^{\Sigma_{q-1}(z)}.$$

D'autre par, nous avons:

$$e^{\sigma_n(z)} = \frac{\varphi_n(z) - a}{\varphi_n(z) - b}.$$

Nous obtenons donc la conclusion que, étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut lui faire correspondre un entier n tel que pour $n > n$ et pour tous les points du domaine D chaque branche de toute fonction $\varphi_n(z)$ de la série (29) satisfait à l'une au moins des inégalités suivantes:

$$|\Phi_1(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \quad |\Phi_2(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \ldots, \quad |\Phi_{q-1}(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon, \qquad (35)$$

$$\left|\frac{\varphi_n(z) - a}{\varphi_n(z) - b}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\varphi_n(z) - b}{\varphi_n(z) - a}\right| < \varepsilon. \qquad (36)$$

Les fonctions $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z), \ldots, \Phi_{q-1}(z)$ étant finies dans le domaine D et le nombre ε arbitrairement petit, il en résulte que le module des fonctions $\varphi_n(z)$ est borné. En effet, il existe un nombre M assez grand pour être supérieur au module de tous les $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_{q-1}$ et de tous les $\varphi_n(z)$ correspondant à $n > n$; il existe aussi un nombre fixe m plus grand que le module des $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z), \ldots, \varphi_n(z)$.

Donc, les fonctions $\varphi_n(z)$ de la suite (29) forment une famille normale et, par conséquent, nous pouvons extraire de la suite (29) une nouvelle suite:

$$\varphi_{c_1}(z), \varphi_{c_2}(z), \ldots, \varphi_{c_n}(z), \ldots, \tag{37}$$

convergeant uniformément vers des fonctions-limites algébroïdes et finies dans le domaine D, dont le nombre total de branches est égal à ν. Les branches de $\varphi_{c_n}(z)$ qui ne satisfont à aucune des inégalités (35) convergent ou vers la constante a ou vers la constante b et vers toutes les deux, tandis que les branches qui satisfont aux inégalités (35) convergent vers les fonctions $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z), \ldots, \Phi_{q-1}(z)$.

δ! cas. Supposons que l'une des fonctions-limites $\sum_1(z), \sum_2(z), \ldots, \sum_q(z)$ soit la constante infinie et d'autres soient égales à des constantes de la forme $2K\pi i$, où K désigne un nombre entier positif ou négatif. Ce cas se ramène immédiatement aux deux cas précédents et, en faisant les mêmes raisonnements, nous obtenons une suite de fonctions de la famille donnée, extraite de la suite donnée, et convergeant vers des fonctions-limites, dont l'une est la constante infinie, une au moins des autres est égale à la constante a ou b et toutes les autres sont algébroïdes et finies dans le domaine D; le nombre total des branches des fonctions-limites est égal à ν. Mais il est nécessaire de remarquer qu'une constante finie ou infinie, considérée comme fonction-limite, peut être *multiple* ou *à plusieurs branches*, la multiplicité étant telle que le nombre total des branches soit égal à ν. Par exemple, la constante a sera une fonction-limite multiple d'ordre (de multiplicité) égal à P de la série (37), lorsque cette constante est la limite de convergence de P branches des fonctions $\varphi_{c_n}(z)$. On s'en rend bien compte par les considérations développées dans le N° 14 sur la convergence des séries composées.

Nous voyons que, dans tous les cas, de toute suite de fonctions de la famille donnée nous pouvons extraire une nouvelle suite convergeant uniformément vers des fonctions algébroides et finies dans le domaine D ou vers la constante infinie, dont le nombre total des branches est égal à ν. Nous obtenons, donc, le théorème suivant:

Théorème XV. *Soit une famille* (F) *de fonctions* $u = \varphi(z)$ *algébroïdes à* ν *branches finies dans un domaine* D. *Si les fonctions de cette famille ne prennent, dans ce domaine, aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe* Γ *du plan* u (cette courbe est, alors, exceptionnelle pour l'ensemble des fonctions de la famille dans le domaine D), *la famille est normale dans le domaine* D; *c'est-à-dire: de toute suite infinie de fonctions de la famille nous pouvons extraire une nouvelle suite infinie convergeant uniformément vers des fonctions-limites algébroïdes et finies dans* D *ou la constante infinie, dont le nombre total de branches est égal à* ν.

20. Revenons aux considérations des deux numéros précédents et rappelons-nous que les fonctions $w = \sigma(z)$ sont algébroïdes et finies dans le domaine D et satisfont, par conséquent, à une équation de la forme:

$$W^{\nu} + B_1(z)\, W^{\nu-1} + B_2(z)\, W^{\nu-2} + \cdots + B_{\nu-1}(z)\, W + B_{\nu}(z) = 0, \tag{38}$$

où les $B_1(z), B_2(z), \ldots, B_{\nu}(z)$ désignent des fonctions holomorphes dans le domaine D.

Les branches W_K se lient avec les branches u_K des fonctions $u = \varphi(z)$ par la relation:

$$W_K = \log \frac{u_K - a}{u_K - b}. \tag{39}$$

Comme on a les égalités:

$$-B_1(z) = W_1 + W_2 + \cdots + W_{\nu},\quad B_2(z) = \sum W_1 W_2, \ldots,\quad (-1)^{\nu} B_{\nu}(z) = \\ = W_1 W_2 W_3 \ldots W_{\nu},$$

les nombres $B_1(0), B_2(0), \ldots, B_{\nu}(0), B'_1(0), B'_2(0), \ldots, B'_{\nu}(0)$ ne dépendent que des valeurs en $z = 0$ de la fonction $u = \varphi(z)$ et de sa dérivée $u' = \varphi'(z)$.

Soit, donc:

$$u^{\nu} + A_1(z)\, u^{\nu-1} + A_2(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(z)\, u + A_{\nu}(z) = f(z, u) = 0, \tag{40}$$

l'équation qui détermine la fonction $u = \varphi(z)$, et posons:

$$A_1(z) = a_1 + b_1 z + \cdots,\ A_2(z) = a_2 + b_2 z + \cdots,\ A_{\nu-1}(z) = a_{\nu-1} + b_{\nu-1} z + \cdots, \\ A_{\nu}(z) = a_{\nu} + b_{\nu} z + \cdots \tag{41}$$

Les valeurs de $\varphi(0)$ sont les racines de l'équation algébrique:

$$u^{\nu} + a_1 u^{\nu-1} + a_2 u^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} u + a_{\nu} = 0, \tag{42}$$

et les valeurs de $\varphi'(0)$ sont égales à:

$$-\frac{f'_z(0, r_1)}{f'_u(0, r_1)}, \quad -\frac{f'_z(0, r_2)}{f'_u(0, r_2)}, \ldots, \quad -\frac{f'_z(0, r_{\nu-1})}{f'_u(0, r_{\nu-1})}, \quad -\frac{f'_z(0, r_\nu)}{f'_u(0, r_\nu)}, \tag{43}$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_{\nu-1}, r_\nu$ désignent les racines de l'équation (42).

Si le point $z = 0$ n'est pas un point de rencontre de branches de la fonction $u = \varphi(z)$ les valeurs (43) ne dépendent que des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$, $a_\nu, b_1, b_2, \ldots b_{\nu-1}, b_\nu$ des séries (41) et nullement des autres coefficients et il en sera, par conséquent, de même des nombres:

$$B_1(0), B_2(0), \ldots, B_\nu(0), B'_1(0), B'_2(0), \ldots, B'_\nu(0).$$

Nous savons que tous les points qui n'appartiennent pas à la bande B sont exceptionnels pour les fonctions $w = \sigma(z)$. Si, donc, nous prenons un point γ extérieur à la bande B et si nous désignons par δ sa plus petite distance des droites parallèles qui limitent la bande, l'intérieur du cercle

$$|w - \gamma| < \delta, \tag{44}$$

est exceptionnel pour les fonctions $w = \sigma(z)$.

On a:

$$-B_1(z) = \log\frac{a - u_1}{b - u_1} + \log\frac{a - u_2}{b - u_2} + \cdots + \log\frac{a - u_\nu}{b - u_\nu} =$$

$$= \log\frac{(a - u_1)(a - u_2)\ldots(a - u_\nu)}{(b - u_1)(b - u_2)\ldots(b - u_\nu)},$$

$$(a - u_1)(a - u_2)\ldots,(a - u_\nu) = f(a, z) = a^\nu + A_1(z)a^{\nu-1} +$$
$$+ A_2(z)a^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(z)a + A_\nu(z),$$

$$(b - u_1)(b - u_2)\ldots,(b - u_\nu) = f(b, z) = b^\nu + A_1(z)b^{\nu-1} +$$
$$+ A_2(z)b^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(z)b + A_\nu(z),$$

et

$$-B_1(z) = \log\frac{f(a, z)}{f(b, z)} = \log\frac{P(z)}{Q(z)},$$

en posant:

$$f(a, z) = P(z), \quad f(b, z) = Q(z).$$

On en déduit:

$$B'_1(z) = \frac{Q(z)P'(z) - P(z)Q'(z)}{P(z)Q(z)}.$$

d'où:

$$-B'_1(0) = \frac{(b^\nu + a_1 b^{\nu-1} + a_2 b^{\nu-2} + \cdots + a_\nu)(b_1 a^{\nu-1} + b_2 a^{\nu-2} + \cdots + b_\nu) -}{[P(z) .}$$

$$\frac{-(a^\nu + a_1 a^{\nu-1} + a_2 a^{\nu-2} + \cdots + a_\nu)(b_1 b^{\nu-1} + b_2 b^{\nu-2} + \cdots + b_\nu)}{. Q(z)]_{z=0}}.$$

Si, donc, les nombres a et b ne satisfont pas à la relation:

$$\frac{a^\nu + a_1 a^{\nu-1} + a_2 a^{\nu-2} + \cdots + a_\nu}{b^\nu + a_1 b^{\nu-1} + a_2 b^{\nu-2} + \cdots + a_\nu} = \frac{b_1 a^{\nu-1} + b_2 a^{\nu-2} + \cdots + b_\nu}{b_1 b^{\nu-1} + b_2 b^{\nu-2} + \cdots + b_\nu}, \tag{45}$$

le nombre $B'_1(0)$ est différent de zéro et, par conséquent, l'équation:

$$B'_1(0)\, x^{\nu-1} + B'_2(0)\, x^{\nu-2} + \cdots + B'_{\nu-1}(0)\, x + B'_\nu(0) = 0, \tag{46}$$

ne sera pas une identité. En choisissant alors le nombre γ de façon qu'il ne soit pas une racine de cette équation algébrique, nous pouvons appliquer le théorème X à la famille des fonctions $w = \sigma(z)$ qui admettent le cercle exceptionnel (44). Si, donc, le domaine D est un cercle de centre l'origine et de rayon R, ce rayon satisfera à l'inégalité:

$$R < \frac{2}{\delta^\nu} \frac{|\gamma^\nu + \gamma^{\nu-1} B_1(0) + \gamma^{\nu-2} B_2(0) + \cdots + \gamma B_{\nu-1}(0) + B_\nu(0)|^2}{|\gamma^{\nu-1} B'_1(0) + \gamma^{\nu-2} B'_2(0) + \cdots + \gamma B'_{\nu-1}(0) + B'_\nu(0)|}, \tag{47}$$

dont le second membre ne dépend que des nombres ν, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu$, $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\nu$ et nullement des autres coefficients des séries (41); en effet, le nombre γ est arbitraire étant seulement soumis à des inégalités qui ne dépendent que des nombres ci-dessus indiqués, et le nombre δ dépend seulement de γ.

Il en résulte que, dans un cercle de centre l'origine et de rayon supérieur au second membre de l'inégalité (47), toute fonction $u = \varphi(z)$ de la famille donnée prend au moins une fois l'une au moins des valeurs représentées par les points de toute ligne du plan u joignant les points a et b. Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

Théorème XVI. *Soit (F) la famille composée de toutes les fonctions $u = \varphi(z)$ définies par l'équation:*

$$f(z, u) = u^\nu + A_1(z)\, u^{\nu-1} + A_2(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{\nu-1}(z)\, u + A_\nu(z) = 0, \tag{48}$$

où les $A_1(z), A_2(z), \ldots, A_\nu(z)$ désignent des fonctions holomorphes dans le voisinage de $z = 0$:

$$\left.\begin{aligned} A_1(z) &= a_1 + b_1 z + \cdots \\ A_2(z) &= a_2 + b_2 z + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_\nu(z) &= a_\nu + b_\nu z + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu$ *et le degré* ν *étant fixes, tandis que les coefficients non écrits sont des paramètres variables; soient aussi deux nombres quelconques* a *et* b *assujettis seulement à la condition:*

$$\frac{a^\nu + a_1 a^{\nu-1} + a_2 a^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} a + a_\nu}{b^\nu + a_1 b^{\nu-1} + a_2 b^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} b + a_\nu} \neq \frac{b_1 a^{\nu-1} + b_2 a^{\nu-2} + \cdots + b_\nu}{b_1 b^{\nu-1} + b_2 b^{\nu-2} + \cdots + b_\nu}.$$

Si le point $z = 0$ *n'est pas un point d'intersection des branches*[1], *il existe un cercle:*

$$|z| < R = R(\nu, a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu),$$

dont le rayon est fixe, ne dépendant que des nombres $\nu, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_\nu, b_\nu, a$ *et* b [et nullement des paramètres variables des séries (49)], *à l'intérieur duquel toute fonction finie de la famille* (F) *ou bien admet un point singulier transcendant ou bien prend au moins une fois l'une au moins des valeurs représentées par les points de toute courbe (ligne) joignant le point* a *au point* b.

Le second membre de l'inégalité (47) est une quantité variable avec le nombre arbitraire γ et le rayon du cercle du théorème ci-dessus énoncé peut-être pris plus grand que toute valeur de l'expression (47), mais il est, bien entendu, avantageux d'employer sa valeur minimum qui sera nécessairement différente de zéro.

21. Le théorème XVI est visiblement la plus précise des extensions aux fonctions multiformes dans un domaine du théorème de M. Landau, que nous avons établies dans ce travail: ces extensions remplacent le cercle d'holomorphie de M. Landau par un cercle pouvant contenir des points critiques algébriques quelconques de la fonction, mais elles ne conservent pas, *au point de vue des*

[1] Cette condition ne concerne aussi que les nombres fixes $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu$, puisqu'elle se ramène à supposer que l'équation algébrique:

$$x^\nu + a_1 x^{\nu-1} + a_2 x^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1} x + a_\nu = 0,$$

n'ait pas des racines multiples.

valeurs exceptionnelles, la précision du théorème de M. LANDAU, parce que ou bien l'ensemble des valeurs exceptionnelles est continu ou bien la considération de deux valeurs exceptionnelles est accompagnée de quelques restrictions. Dans deux Notes publiées récemment dans le Bulletin de la Société mathématique de France nous avons donné une autre extension qui conserve toute la précision au point de vue des valeurs exceptionnelles et qui est applicable dans un cercle, dont le centre est un point critique algébrique de la fonction.

J'espère de pouvoir établir prochaînement l'extension la plus parfaite aux fonctions algébroïdes à ν branches dans un cercle par la considération de 2ν valeurs exceptionnelles (l'infini non compris).

CHAPITRE XI.

Fonctions-limites d'une suite convergeant uniformément.

22. Soit:

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_n(z),\ \ldots \tag{50}$$

une suite de fonctions algébroïdes à ν branches finies dans un domaine D convergeant uniformément et soit:

$$F_n(z, u) = u^\nu + A_{n1}(z)\, u^{\nu-1} + A_{n2}(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{n\nu}(z) = 0,$$

l'équation qui détermine la fonction $u = f_n(z)$, où les $A_{n1}(z), A_{n2}(z), \ldots, A_{n\nu}(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le domaine D.

Si nous désignons par $\lambda_1(z), \lambda_2(z), \ldots, \lambda_\nu(z)$ les limites de convergence de la série (50), les fonctions $A_{n1}(z)$ convergent uniformément vers la fonction-limite:

$$-[\lambda_1(z) + \lambda_2(z) + \cdots + \lambda_\nu(z)] = A_1(z),$$

qui est aussi holomorphe dans le domaine D, d'après un théorème classique de WEIERSTRASS publié en 1880. De même, les fonctions $A_{n2}(z)$ convergent uniformément vers la fonction holomorphe:

$$A_2(z) = \sum \lambda_1(z)\, \lambda_2(z), \qquad \text{[somme des combinaisons deux-à-deux]}$$

et ainsi de suite ... les fonctions $A_{n\nu}(z)$ convergent uniformément vers la fonction holomorphe dans D:

$$\mathcal{A}_\nu(z) = (-1)^\nu \lambda_1(z)\, \lambda_2(z) \ldots \lambda_\nu(z),$$

et, par conséquent, les fonctions-limites de la suite (50) satisfont à l'équation:

$$F(z, w) = w^\nu + \mathcal{A}_1(z)\, w^{\nu-1} + \mathcal{A}_2(z)\, w^{\nu-2} + \cdots + \mathcal{A}_\nu(z) = 0. \qquad (51)$$

Nous avons, donc, établi le théorème suivant:

Théorème XVII. *Si une suite infinie de fonctions algébroïdes à ν branches finies dans un domaine D converge uniformément, les fonctions-limites sont aussi algébroïdes et finies dans le domaine D et leur nombre total de branches est égal à ν.*

C'est une extension aux fonctions algébroïdes dans un domaine D du théorème classique de Weierstrass ci-dessus utilisé.

Nous pouvons aussi dire que ce théorème est une conséquence immédiate du théorème VIII, parce que les fonctions de la suite considérée forment une famille normale: cela résulte d'un raisonnement facile indiqué par M. Montel dans son Mémoire: *Sur les suites infinies de fonctions* (thèse de doctorat, 1907, p. 74) et utilisé déjà par nous dans le N° 20 de ce travail.

Si dans l'expression:

$$\frac{\partial F_n(z, u)}{\partial u} = \nu u^{\nu-1} + (\nu - 1)\, A_{n1}(z)\, u^{\nu-2} + \cdots + A_{n,\nu-1}(z),$$

nous remplaçons u par $f_n(z)$ nous obtenons une fonction $\sigma_n(z)$ algébroïde à ν branches finies dans D telle que la série:

$$\sigma_1(z),\ \sigma_2(z),\ \ldots,\ \sigma_n(z),\ \ldots$$

converge uniformément vers les fonctions $\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w}$, où w désigne les fonctions-limites de la suite (50) qui satisfont à l'équation (51).

Si les fonctions $f_n(z)$ sont, à partir d'une valeur de n, multiformes dans le domaine D, les fonctions $\sigma_n(z)$ admettent des zéros à partir d'une valeur de n et il en est de même d'une au moins des fonctions-limites: $\dfrac{\partial F(z, w)}{\partial w} = \sigma(z)$ dans le cas où aucune de ces fonctions n'est *la constante zéro* [d'après le théorème VI]. Nous en concluons que l'une au moins des fonctions-limites $w = f(z)$ de la suite (50) admet des *points doubles*, c'est-à-dire il y a des points de rencontre de branches d'une au moins des fonctions-limites de la suite (50).

Nous pouvons, donc, compléter le théorème XVII de la façon suivante:

Si les fonctions algébroïdes de la suite sont multiformes à partir d'une valeur de n et si aucune des fonctions-limites ne satisfait aussi à l'équation $F_w(z, w) = 0$, *il y a toujours dans le domaine D des points d'intersection de branches des fonctions-limites* $w = f(z)$.

Athènes, le 11 septembre 1913.

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre VIII.

Applications aux fonctions ayant un nombre infini de branches dans un domaine.

Chapitre IX.

Familles et séries de fonctions ayant une infinité de branches.

Chapitre X.

Familles de fonctions algébroïdes admettant une courbe exceptionnelle.

Chapitre XI.

Fonctions-limites d'une suite convergeant uniformément.

PERIODISCHE FUNKTIONEN UND SYSTEME VON UNENDLICH VIELEN LINEAREN GLEICHUNGEN.

Von

OSKAR PERRON

in Tübingen.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn Stäckel.)

...... In § 3 Ihrer soeben in den Acta Mathematica, Band 37, S. 59 ff. erschienenen Arbeit fragen Sie nach denjenigen Lösungen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des Gleichungssystems

$$(5) \qquad \sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

welche zugleich einer Differenzengleichung r^{ter} Ordnung

$$(9) \qquad a_{n+r} = \lambda_0 a_n + \lambda_1 a_{n+1} + \cdots + \lambda_{r-1} a_{n+r-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

genügen, wo dann die λ_ν als Unbekannte anzusehen sind. Natürlich soll die Zahl r so gewählt sein, dass a_n nicht schon einer Differenzengleichung von geringerer als der r^{ten} Ordnung mit konstanten Coefficienten genügt; insbesondere ist also $\lambda_0 \neq 0$.

Diese Frage lässt sich vollständig beantworten, wenn man auf die Differenzengleichung (9) die Lagrange'sche Auflösungsmethode anwendet. An Stelle der Unbekannten $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_{r-1}$ führe man die Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_r$ der Gleichung

$$(\text{A}) \qquad \varrho^r = \lambda_0 + \lambda_1 \varrho + \cdots + \lambda_{r-1} \varrho^{r-1}$$

als neue Unbekannte ein. Wegen $\lambda_0 \neq 0$ sind diese Wurzeln $\neq 0$, und wie sich weiter unten zeigen wird, müssen sie notwendig auch von einander verschieden sein. Nimmt man das einstweilen als bewiesen an, so erhält man als Lagrange'sche Lösung von (9):

(9 a) $$a_n = \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \varrho_\nu^n ,$$

wo die C_ν gewiss $\neq 0$ sind, weil sonst a_n einer Differenzengleichung von geringerer als der r^{ten} Ordnung genügen würde.

Führt man nun (9 a) in Ihre Gleichungen (5) ein, so kommt:

$$\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \sum_{t=1}^{\infty} \varrho_\nu^{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0,$$

oder also

(5 a) $$\sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \varrho_\nu^{n+1} \frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Das sind unendlich viele lineare Gleichungen für die r Unbekannten $\frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c}$. Die r ersten dieser Gleichungen haben die Determinante

$$\begin{vmatrix} C_1 \varrho_1 & \cdot & \cdot & \cdot & C_r \varrho_r \\ C_1 \varrho_1^2 & \cdot & \cdot & \cdot & C_r \varrho_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_1 \varrho_1^r & \cdot & \cdot & \cdot & C_r \varrho_r^r \end{vmatrix},$$

welche $\neq 0$ ist; also muss

$$\frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c} = 0$$

sein, und dann sind auch die Gleichungen (5 a) *sämtlich* erfüllt. Daraus folgt nun

$$\varrho_\nu = \frac{2 \pi i k_\nu}{c},$$

wo die k_ν positive oder negative ganze Zahlen sind. Nach (9 a) ist also

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{r} C \left(\frac{2 \pi i k_\nu}{c}\right)^n.$$

Damit ist die Frage gelöst. Setzt man den gefundenen Wert von a_n in Ihre Gleichung (1) ein, so kommt:

$$P(z) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{2\pi i k_\nu z}{c}\right)^n$$

$$= a_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu \left(e^{\frac{2\pi i k_\nu z}{c}} - 1\right) = C_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu e^{\frac{2\pi i k_\nu z}{c}}.$$

Somit hat sich ergeben, dass Ihr Ansatz (9) alle periodischen Funktionen liefert, welche in der Form

$$P(z) = C_0 + \sum_{\nu=1}^{r} C_\nu e^{\frac{2\pi i k_\nu z}{c}}$$

enthalten sind, aber auch nur diese. Soll c eine *primitive* Periode sein, so dürfen die k_ν keinen gemeinsamen Teiler haben, eine Bedingung, die sowohl notwendig als hinreichend ist.

Ich muss Ihnen jetzt noch zeigen, dass die Annahme, die Gleichung (A) habe mehrfache Wurzeln, unzulässig ist. Nehmen Sie zu dem Zweck an, die von einander verschiedenen Wurzeln seien $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_k$, und dabei sei ϱ_ν eine r_ν-fache Wurzel, sodass $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = r$ ist; speciell mag $r_1 > 1$ sein. Dann ergibt die Lagrange'sche Lösung von (9):

$$\text{(9 b)} \qquad a_n = \sum_{\nu=1}^{k} \varrho_\nu^n P_\nu(n),$$

wobei $P_\nu(n)$ ein Polynom vom $(r_\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grad ist (nicht von geringerem, sonst würde a_n einer Differenzengleichung von geringerer als der r^{ten} Ordnung genügen). Setzt man nun (9 b) in (5) ein, so kommt:

$$\text{(5 b)} \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{t=1}^{\infty} \varrho_\nu^{n+t} P_\nu(n+t) \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Nun ist bekanntlich

$$P_\nu(n+t) = P_\nu(n) + \frac{t}{1!} \Delta P_\nu(n) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 P_\nu(n) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{t(t-1) \cdots (t - r_\nu + 2)}{(r_\nu - 1)!} \Delta^{r_\nu - 1} P_\nu(n).$$

Führt man das in (5 b) ein, so lässt sich die Summation nach t ausführen, und man erhält:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \varrho_\nu^{n+1} \left\{ P_\nu(n) \frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c} + \Delta P_\nu(n) \frac{e^{\varrho_\nu c}}{1!} + \cdots + \Delta^{r_\nu - 1} P_\nu(n) \frac{(\varrho_\nu c)^{r_\nu - 2} e^{\varrho_\nu c}}{(r_\nu - 1)!} \right\} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Das sind unendlich viele lineare Gleichungen für die r Unbekannten

$$\text{(B)} \qquad \frac{e^{\varrho_\nu c} - 1}{\varrho_\nu c}, \quad \frac{e^{\varrho_\nu c}}{1!}, \quad \frac{\varrho_\nu c\, e^{\varrho_\nu c}}{2!}, \quad \frac{(\varrho_\nu c)^{r_\nu - 2} e^{\varrho_\nu c}}{(r_\nu - 1)!} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots k).$$

Die r ersten dieser Gleichungen haben die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 P_1(0) & \varrho_1 \Delta P_1(0) \ldots & \varrho_1 \Delta^{r_1 - 1} P_1(0) & \varrho_2 P_2(0) & \varrho_2 \Delta P_2(0) \ldots \\ \varrho_1^2 P_1(1) & \varrho_1^2 \Delta P_1(1) \ldots & \varrho_1^2 \Delta^{r_1 - 1} P_1(1) & \varrho_2^2 P_2(1) & \varrho_2^2 \Delta P_2(1) \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varrho_1^r P_1(r-1) & \varrho_1^r \Delta P_1(r-1) \cdots & \varrho_1^r \Delta^{r_1 - 1} P_1(r-1) & \varrho_2^r P_2(r-1) & \varrho_2^r \Delta P_2(r-1) \cdots \end{vmatrix},$$

welche $\neq 0$ ist, wie Sie unter Beachtung des Umstandes, dass $P_\nu(n)$ *genau* vom $(r_\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grad ist, leicht erkennen. Daher müssen die Unbekannten (B) verschwinden; wegen $r_1 > 1$ muss also insbesondere $e^{\varrho_1 c} = 0$ sein, was aber unmöglich ist. W. z. b. w.

BIBLIOGRAPHIE.

Fr. Ackermann's Verlag.

Weinheim u. Leipzig 1913.

EMMERICH, ALBRECHT, Leitfaden und Übungsbuch der Stereometrie. Neubearbeit. d. 10. Aufl. von W. Minks Lehrbuch der Geometrie II, Abt. B. — VIII + 160 pp. 8. M. 1: 80 geh., M. 2: 20 geb.

Gerade u. Ebenen im Raume. Körperliche Ecken. Darstellung v. Raumgebilden in Parallelprojektion. Prisma u. Zylinder. Pyramide u. Kegel. Abstumpfungsformen u. Prismatoid. Kugel u. Kugelteile. Aufgab. üb. die Kugel u. ein- od. umgeschriebene Körper. Regelmässige Polyeder. Schwerpunkt u. Rotationsgebilde.

Akademische Verlagsgesellschaft.

Leipzig 1912.

PLANCK, MAX, Über neuere thermodynamische Theorien. (Nernstsches Wärmetheorem und Quantenhypothese.) Vortrag geh. am 16. Dez. 1911. — 34 pp. 8. M. 1: 60.

Félix Alcan.

Paris 1911—1913.

BRUNSCHVICG, LÉON, Les étapes de la philosophie mathématique. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.) — XI + 591 pp. 8. Fr. 10: —.

Périodes de constitution: L'éthnographie et l. prem. opérations numériques. Le calcul égyptien. L'arithmétisme d. pythagoriciens. Le mathématisme d. platoniciens. La naissance de la logique formelle. La géométrie euclidienne. La géométrie analyt. La philosophie math. d. cartésiens. — La découverte du calcul infinitésimal. La philosophie math. de Leibniz. L'idéalité math. et le réalisme métaphysique. — Période moderne: La philosophie math. de Kant. La phil. math. d'Auguste Comte. Transformat.

d. bases scientifiques. — L'évolution de l'arithmétisme: Le dogmatisme du nombre. Le nominalisme arithmét. — Le mouvement logistique: Formation de la philos. logist. d. mathématiques. Dissolut. de la philos. logist. L'idée de la déduction absolue. — L'intelligence mathémat. et la vérité: La notion moderne de l'intuition. Les racines de la vérité aritmétique. L. racines de la vérité géom. L. racines de la vérité algébr. La réaction contre le mathématisme.

Painlevé, Paul, Borel, Émile, & Maurin, Ch., L'aviation. 6:ième éd., rev. et augm. — 298 pp. 8. Fr. 3: 50.

Historique de l'aviation. Le vol des oiseaux. Les orthoptères et les hélicoptères. Les aéroplanes sans moteur: cerfs-volants et planeurs. L'aéroplane. La manœuvre de l'aéroplane. Le rôle de l'angle d'attaque. L'avenir de l'aéroplane. Records et concours. Les recherches aérotechniques. — Remarques sur les moteurs à explosion. Les lois de la résistance de l'air. Propulseurs hélicoïdaux. Application d. lois de la résist. de l'air à l'aéroplane. Equilibre de l'aéroplane. Procédés de stabilisation automatique. Stabilité longitudinale. Stabilité latérale. Virage d'un aéroplane. — Quelques principes élément. de mécanique.

Perrin, Jean, Les atomes. Avec 13 fig. (Nouvelle Collection scientifique. Directeur: Emile Borel). — XVI + 296 pp. 8.

Préf. — La théorie atomique et la chimie: Molécules. Atomes. L'hypothèse d'Avogadro. Structures d. molécules. L. solutions. Limite sup. d. grandeurs moléculaires. — L'agitation moléculaire: Vitesses d. molécules. Rotations ou vibrations d. molécules. Libre parcours moléculaire. — Mouvement brownien. Emulsions: Historique et caractères gén. L'équilibre statistique d. émulsions. — Lois du mouvement Brownien: Théorie d'Einstein. Contrôle expérimental. — Fluctuations. — La lumière et l. quanta: Le corps noir. Extension de la théorie d. quanta. — L'atome d'électricité: Ionisation des gaz. Struct. atomique de l'électricité. — Genèse et déstruction d'atomes: Transmutations. Dénombrement d'atomes. — Conclusions.

Sageret, Jules, Le système du monde des Chaldéens à Newton. Avec 20 fig. (Nouvelle Collection scientifique. Emile Borel.) — 280 pp. 8. Fr. 3: 50.

La géométrie empirique. La génèse de la géométrie scientif. et d. mathématiques. Cosmologies primitives. Cosmologie grecque. De l'inutilité pratique de l'astronomie dans l'antique. La génèse d. méthodes et du matériel astronomique. Les éclipses. Astronomie chaldéenne. Astronomie d. positions angulaires. Astronomie grecque. Astronomie d. distances et d. mécanismes. — Génèse astronomique du syst. héliocentrique. La dynamique Aristotélicienne. Evolution de la cosmologie et de la dynamique depuis l'antiquité jusqu'à Newton. La dynamique Newtonienne et le syst. héliocentrique.

Winter, Maximilien, La méthode dans la philosophie des mathématiques. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.) — III + 200 pp. 8. Fr. 2: 50.

Considérations gén. Applicat. d. considérat. précédentes au kantisme et au néokantisme. — Le champ d'applicat. de la logistique. La définition du nombre irrat. et

la généralisat. du nombre. Les intégrales irréductibles et le nombre d. idées primitives. La notion de fonction et ses condit. restrictives pour son usage math. Conclusion. — Le nombre imag. en arithmétique. L. nombres idéaux et l. idéaux. La notion de groupe en arithm. La variable continue en arithm. — L. mémoires de Lagrange. L. notions fondament. Théorie de Galois concern. la résolubilité d. équations algébr. Extension de la notion de résolubilité: Hermite, Kronecker, Brioschi, Gordan. Indications s. la théorie gén. de la résolut. d. équat. d'ordre sup.: travaux de M. Jordan et de M. Klein.

H. S. Art'l.

Dessau 1912—1913.

BERGHOLZ, OTTO ANDREAS, Die Lösung des Fermatschen Problems $x^n + y^n = z^n$ und ihr Unicum, die hierbei in algebraischen Gleichungen in infinitum zulässige Vertauschung von Faktoren und in der Summandenreihe stehender Potenz-Grundzahlen. — 19 pp. 8. M. 1:—.

BERGHOLZ, OTTO ANDR., Kennzeichnung der n-Potenz-Differenzen als Inpotenzen. Erläuterung und Ergänzung der »Lösung des Fermatschen Problems». — 32 pp. 8. M. 1:50.

BERGHOLZ, OTTO ANDR., Substitutionsbeweis des grossen Fermatschen Satzes auf Grund der Formel für $(a + b)^2$. — 21 pp. 8. M. 1:50.

Fratelli Bocca.

Milano, Torino, Roma 1912.

D'OVIDIO, ENRICO, Geometria analitica. Ed. 4. (Biblioteca matematica, 8.) — XVI + 250 pp. 8. Lire 14:—.

Preliminari. Retta punteggiata. Fascio di rette. Fascio di piani. Piano punteggiato. Piano regato. Stelle di rette e di piani. Spazio punteggiato. Spazio di piani. Coordinate projettive omogenee ed omografia nelle forme geometriche di 1^a specie. Coordinate projettive omogenee, omografia e correlazione nelle forme geometriche di 2^a specie, di 3^a specia. Spazio rigato. Proprietà projettive delle coniche. Proprietà diametrali delle coniche. Equazioni ridotte e classificazione delle coniche. Proprietà focali delle coniche. Propr. projettive delle quadriche. Propr. diametrali delle quadriche. Equazioni ridotte e classificazione delle quadriche. Propr. focali delle quadriche.

Cambridge University Press.

1905—1913.

CULLIS, C. E., Matrices and determinoids. (University of Calcutta. Readership lectures.) Vol. I. — XII + 430 pp. 8. 21 sh.

Introduction of rectangular matrices and determinoids. Affects of the elements and derived products of a matrix or determinoid. Sequences and the affects of derived sequences. Affects of derived matrices and der. determinoids. Expansions of a determinoid. Properties of a product formed by a chain of matrix factors. Determinoid of a product formed by a chain of matrix factors. Matrices of minor determinants. Rank of a matrix and connections between the rows of a matrix. Matrix equations of the first degree. Solution of any system of linear algebraic equations.

Hatton, J. L. S., The principles of projective geometry, applied to the straight line and conic. — X + 366 pp. 8. 10 sh. 6 d.

Notation. Principle of duality. Definitions. Measurement of distances. Measurement of angles. Projective forms anharmonic. Projective forms harmonic. Conical projection and plane perspective. Applications. Triangles in perspective. Anharmonic forms. Harmonic forms. Involution. Coplanar figures. Problems of the first degree. Projective forms in relations to the circle. Special properties of the circle. Projective theorems to the circle. Projective forms in relation to the conic. Deductions from the anharmonic property of the conic, from the pole and polar properties of the conic, from Carnot's theorem. Deductions from Pascal's theorem, from Desargues' theorem, from the complete inscribed quadrangle and circumscribed quadrilateral of a conic. Conics in selfperspective. The rectangular hyperbola. Construction of self-corresponding elements. Problems of the second degree. Construction of conics under various conditions. Triangle loci and envelopes. Anharmonic and general loci and envelopes. Six points on a conic and six tangents to a conic. Theorems concerning two conics. The constant of an involution. Focal properties and confocal conics. Geometrical correspondence. Pascal hexagons for six points on a conic. Involution in connexion with the conic. Non-project. proofs of properties of straight lines of propert. of circles.

Henderson, Archibald, The twenty-seven lines upon the cubic surface. (Cambridge tracts in mathematics and math. physics, No. 13). — 100 pp. 8. 4 sh. 6 d.

Historical summary. Introd. Preliminary theorems. The double six configuration. Auxiliary theorems. The trihedral pair config. Analyt. investigation of the twenty-seven lines and forty-five triple tangent planes for the gen. equation of the cubic surface. The constrution of a model of a double six. The construct. of the configurations of the straight lines upon the twenty-one types of the cubic surface. On some config. associated with the config. of the lines upon the cubic surface. Bibl. Intersection table. Plates 1—13.

Hobson, E. W., & Love, A. E. H., Proceedings of the fifth international congress of mathematicians (Cambridge, 22—28 August 1912). Vol. 1—2. 1157 pp. 8.

Report of the congress. Lectures. Communications: Section I—IV. (Arithmetic, algebra, Analysis. Geometry. Mechanics, Physical Mathematics, Astronomy. Economics, Actuarial Science. Statistics. Philosophy, History, Didactics.)

HUDSON, R. W. H. T., Kummer's quartic surface. — XI + 222 pp. 8. 8 sh.

Kummer's configuration. The quartic surface. The orthogonal matrix of linear forms. Line geometry. The quadratic complex and congruence. Plücker's complex surface. Sets of nodes. Equations of Kummer's surface. The wave surface. Reality and topology. Geometry of four dimensions. Algebraic curves on the surface. Curves of different orders. Weddle's surface. Theta functions. Applications of Abel's theorem. Singular Kummer surfaces.

LONEY, S. L., An elementary treatise on the dynamics of a particle and of rigid bodies. — VIII + 374 pp. 8. 12 sh.

Fundamental definitions a. principles. Motion in a straight line. Uniplanar motion where the accelerations parallel to fixed axes are given. Uniplanar motion referred to polar coordinates. Uniplanar motion when the acceleration is towards a fixed centre and varies as the inverse square of the distance. Tangential and normal accelerations. Motion in a resisting medium. Oscillatory motion. Motion in three dimensions. Accelerations in terms of polar coordinates, in Cartesian coordinates. The hodograph. — Moments a. products of inertia. D'Alembert's principle. Motion about a fixed axis. Motion in two dimensions. Finite forces. Impulsive forces. Instantaneous centre. Conservation of linear a. angular momentum. Conservat. of energy. Lagrange's equations in generalized coordinates. Small oscillations. Motion of a top.

LONEY, S. L., An elementary treatise on statics. — VIII + 393 pp. 8. 12 sh.

Introduction. Composition and resolution of forces acting at one point. Parallel forces. Moments. Couples. Equilibrium of a rigid body acted on by forces in one plane astatic equilibrium. Friction. Work. Virtual work. Graphic solutions. Shearing stresses. Bending moments. Centre of gravity. Stable and unstable equilibrium. Forces in three dimensions. Machines. Equilibrium of strings and chains. Attractions and potential. Equilibrium of slightly elastic beams.

LOVE, A. E. H., Theoretical mechanics. An introductory treatise on the principles of dynamics. With applications and numerous examples. Second ed. — XVI + 367 pp. 8. 12 sh.

Introduct. Displacement, velocity, acceleration. The motion of a free particle in a field of force. Forces acting on a particle. Motion of a particle under given forces Motion under constraints and resistances. The law of reaction. Reduction of a system of localized vectors. Miscellaneous methods a. applications. Motion of a rigid body in two dimensions. Rigid bodies a. connected systems. The rotation of the earth. Summary and discussion of the principles of dynamics. Appendix.

RAYLEIGH, JOHN WILLIAM STRUTT, Baron, Scientific papers. Vol. 5: 1902—1910. — XII + 624 pp. 8. 15 sh.

ROUTH, EDWARD JOHN, A treatise on analytical statics. With numerous examples. Second ed. Vol. 1. XII + 391 pp. 8. 14 sh. — Vol. 2. With illustr.

taken from the theories of electricity and magnetism. XIV + 376 pp. 8. 14 sh.

1. The parallelogram of forces. Forces acting at a point. Parallel forces. Forces in two dimensions. On friction. The principle of work. Forces in tree dimensions. Graphical statics. Centre of gravity. On strings. The machines. Note on two theorems in conics assumed in arts.

2. Introductory remarks. Attractions of rods, Discs, etc. The potential. Spherical surface. Laplace's, Poisson's and Gauss' theorems. Theorems on the potential. Attraction of a thin stratum. Green's theorem. Given the potential, find the body. Method of inversion. Circular rings and anchor rings. Attraction of ellipsoids. Rectilinear figures. Magnetic attractions. Electrical attractions. Magnetic induction. — The bending of rods: Introd. remarks. The stretching of rods. The bending of rods. Rods in three dimensions. — Astatics: Astatic couples. The central ellipsoid. The central plane a. the central point. The confocals. Arrangement of Poinsot's central axes. Reduction to three a. to four forces. Notes.

Rutherford, E., Radioactive substances and their radiations. — VII + 699 pp. 8. 15 sh.

Radioactive substances. Ionisation of gases. Metods of measurement. The alpha rays. The beta rays. The gamma or very penetrating rays. Properties of the radiations. Continuous production and decay of radio-active matter. Radio-active gases. Active deposits. Theory of successive transformations. Uranium, ionium, and the origin of radium. Radium and its emanation. Active deposit of radium. Actinium and its products. Thorium and its products. Production of helium and emission of heat. General results and relations. Radio-activity of the earth and atmosphere. Appendix A, B, C.

Whitehead, Alfred North, and Russel, Bertrand, Principia Mathematica. Vol. 3. — X + 491 pp. 8. 21 sh.

Series (contin.): Well-ordered series. Element. properties of well-ordered series. Ordinal numbers. Segments of well-ordered series. Sect. relat. of well-ord. ser. Greater and less among well-ord. ser. Greater a. less among ord. numbers. The ser. of ordinals. The transfinite ancestral relation. Zermelo's theorem. Inductively defined correlations. — Finite a. infinite series and ordinals. Compact series, rational ser., a. continous ser. — Quantity: Positive a. negit. integers, a. numerical relations. Num. defined powers of relations. On relative primes. Ratios. The ser. of ratios. Multiplicat. of simple ratios. Addit. of simple ratios. Generalized ratios. Addit. of gener. ratios. Multiplicat. of gener. ratios. The ser. of real numbers. Addit. of concordant real numbers. Algebraic addit. of real numb. Multiplicat. of real numb. Real numbers as relations. — Elem. properties of vector-families. Connected fam. On the representat. of a relation in a family. Open, serial, initial families. The series of vectors. Multiples a. submultiples of vectors. — Ratios of memb. of a fam. Submultipl. families. Rational multiples of a given vector. Rational fam. Ration. nets. Measurement by real numb. Existence-theorems for vector-fam. — Elem. properties of cyclic families. The ser. of vectors. Integral sect. of the ser. of vectors. Submultiples of identity. Principal submult. Princip. ratios.

WOOD, P. W., The twisted cubic with some account of the metrical properties of the cubical hyperbola (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. 14). — VI + 78 pp. 8. 2 s. 6 d.

Preface. Notation Projective properties of the twisted cubic. The cubical hyperbola. Bibliographical note. Appendix. Diagram 10.

Tipografía de G. Casañal.

Zaragoza 1913.

DE GALDEANO, Z. G., Sumario de mis cursos de cálculo infinitesimal con arreglo al nuevo método de enseñanza (1912 a 1914). — 192 pp. 8, 4: — Pes.

Columbia University Press.

New York 1912—1913.

RUNGE, CARL, Graphical methods. Columbia University lectures. — VII + 148 pp. 8. 6 s. 6 d.

Introduct. — Graphical arithmetic. Integral functions. Linear functions of any number of variables. The graphical handling of complex numbers. — Functions of one indep. variable. The principle of the slide rule. Rectangular coordinates with intervals of varying size. Functions of two indep. variables. Depiction of one plane on another plane. Other methods of represent. relations between three variables. Relat. between four variables. — Graphical integration. Graph. differentiation. Differential equations of the first order. Different. equat. of the sec. and higher orders.

WOOD, R. W., Researches in physical optics, with especial reference to the radiation of electrons. P. 1. (Columbia University in the City of New York, publ. numb. 6 of the Ernest Kempton Adams fund for physical research). 134 pp. 4.

The resonance spectra of iodine vapor and their transformation into band spectra by gases of the helium group. Resonance spectra of iodine vapor by multiplex excitation. The selective scattering, absorption, and reflection of light by resonating gas molecules. The select. dispersion of mercury vapor. Resonance experiments with very long heat waves. Diffraction gratings with controlled groove form, anh anomalous distribution of intensity. Nickeled glass reflectors for astronom. photography in the ultraviolet. Select. reflection from the moon's surface and lunar petrography. Prelimin. note on the electron atmospheres of metals. The satellites of the mercury lines. The imprisonment of radiation by internal reflection and its liberation.

Jacob Dybwad.

Kristiania 1913.

STORMER, CARL, Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire. 1: Trajectoires par l'origine. (Videnskapsselskapets Skrifter. I. Mat.-naturv. Klasse. 1913. No. 4). — 73 pp. 8.

La méthode d'intégration numérique. Remarques supplémentaires. Généralisation de la méthode à un système quelconque d'équat. différentielles. Exemple numérique. L. trajectoires par l'origine. L. résultats d. l'intégration numérique. Explicat. d. planches I et II.

École spéciale des travaux publics.

Paris 1911.

ESPITALLIER, G., & CHASSÉRIAUD, RENÉ, Cours d'aviation. Livre 1: Appareils d'aviation et propulseurs. — 295 pp. 8. 13 Fr.

Considérations générales sur l. différents genres d'appareils d'aviation. Historique de l'aviation. Comment l'homme apprit son métier d'oiseau. La période contemporaine. Les principaux types d'aéroplanes. De la résistance de l'air sur un plan octogonal. De la résist. de l'air sur l. surfaces inclinées. Expériences sur la résist. d. plaques inclinées. Conséquences pratiques d. expériences Eiffel. Étude du profil d. ailes. Expériences Eiffel sur un aéroplane complet. Application au calcul d'un appareil. Problème gén. de la sustentation dynamique. Le parachute et le planeur. Théorie de l'aéroplane. De la stabilité. Théorie du virage. Des Hélices. Études expérimentales sur l. hélices. Les applications. Conclusion.

Ferdinand Enke.

Stuttgart 1912.

DRUDE, PAUL, Physik des Aethers auf elektromagnetischer Grundlage. 2:e Aufl., neu bearb. von Walter König. — XVI + 671 pp. 8. M. 16: —.

Elektrostatik. Magnetismus. Elektromagnetismus. Elektrodynamik. Elektroinduktion im Magnetfeld. Elektrokinematik. Das elektromagnetische Feld in Isolatoren. Elektrische Schwingungen. Elektrische Wellen.

HÄFNER, PHILIPP, Einführung in die Differential- und Integralrechnung für höhere Techniker. Mit Anwend. aus d. wichtigsten Gebieten d. techn. Praxis, zum Selbstunterricht geeignet. Mit 223 Abb. — XII + 564 pp. 8. M. 16: —.

Über gegenseit. Beeinflussung von zwei veränderl. Grössen, graphische Darstellung v. Funktionen. Kritische Erörterung üb. den Verlauf ebener Linien. Zusammen-

stellung und Ableit. d. Differentialquotienten für die einfachen algebraischen Funktionen mit einer unabhäng. Veränderl. Integration d. Summe u. d. Potenz d. unabhäng. Veränderlichen. Differenzierung d. Exponentialfunktionen u. d. log. Funktionen. Integration d. Exponentialfunkt. u. d. log. Funktionen. Differenzierung d. trig. Funktionen. Integration d. trig. Funkt. Differenzierung d. zyklometrischen Funktionen. Integration d. zyklometr. Funkt. Teilweise (partielle) Integration u. Integration rationaler, algebr. Brüche. Polarkurven. Krümmung u. Krümmungsradius. Einiges aus d. Wärmelehre. Einiges aus d. Elektrotechnik. Einige vermischte Anwend. Anhang.

Mie, Gustav, Die Materie. Vortrag gehalten am 27. Januar 1912 (Kaisers Geburtstag) in der Aula d. Universität Greifswald. — 32 pp. 8. M. 1:40.

Gauthier-Villars.

Paris 1912—1913.

d'Adhémar, R., Leçons sur les principes de l'analyse. Avec une note de Serge Bernstein. T. 2. (Fonctions synectiques. Méthode des majorantes. Équations aux dérivées partielles du premier ordre. Fonctions elliptiques. Fonctions entières.) — VIII + 300 pp. 8. Fr. 10: —.

Fonctions implicites. Indépendance d. fonctions. Formes quadrat. — Maxima et minima. — Fonct. synectiques. Intégrale de Cauchy. Majorantes. — Séries. Produits infinis. Théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler. Prolongement analyt. Étude élém. d'une série sur s. cercle de converg. — Résidus. Décomposition d'une fonct. méromorphe. Intégrale logarithm. de Cauchy. Exercices. Solut. d'un probl. fonctionnel. — Equations différent. Fonctions implicites. Probl. fonctionnels. Équat. de Briot et Bouquet. Équat. aux dérivées part. et aux différentielles totales. Développ. de M. S. Bernstein. — Équat. aux dérivées part. lin. Équations aux différentielles totales. — Équat. aux dérivées part. non lin. Solutions singulières. — Périodes d. intégrales. Fonctions ellipt. Fonct. entières. Applicat. — Note de M. Bernstein sur les séries normales. Problèmes.

Appell, Paul, Eléments d'Analyse mathématique, à l'usage des candidats au certificat de mathématique générales . . . Cours professé à l'Ecole Centrale d. arts et manufactures. Ed. 3. ent. ref. — VIII + 700 pp. 8. Fr. 24. cart

Introduction. — Infiniments petits. Différentielles. — Fonctions primitives. Intégrales indéfinies, intégrales définies simples. Applications à la mesure des aires planes. — Volume d'un solide à bases parallèles. Moments d'inertie et centres de gravité d'aires et de volumes homogènes. — Rectification des courbes. Aire des surfaces de révolution et des surfaces coniques. — Développement d'une fonction en série de puissances entières et positives de la variable. — Quelques méthodes d'intégration. Développement d'une fonction en série trigonométrique. — Intégrales définies dont l'élément différentiel devient infini, ou dont une limite est infinie. — Tangente à une courbe plane. Maximum et minimum d'une fonction d'une variable. Enveloppes, cour-

bures. — Courbes gauches. Tangente. Plan osculateur. Courbure et torsion. — Fonctions de deux variables. Plan tangent à une surface. Maxima et minima. Enveloppes. Courbures. — Lignes particulières tracées sur une surface. — Différentiation sous le signe $\int$. Intégration des différentielles totales. Intégrales prises le long d'une courbe. — Intégrales doubles et triples. Applications. — Formules fondamentales de l'analyse vectorielle. Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes. — Equations différentielles du premier ordre. — Equations différentielles du deuxième ordre et d'ordre supérieur. — Equations différentielles linéaires. — Système d'équations différentielles simultanées à une variable indépendante. — Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles, équations du premier ordre. — Valeur numérique d'une intégrale définie. Méthodes d'approximation. Intégrateurs et intégraphes.

Calvet-Azal, Essai sur la notion de quantité imaginaire. Nouvelle édition augm. — 56 pp. 8. Fr 2: —.

Prélim. Quantités simples. Quant. complexes. Symboles. Propositions fondament. Opérations. Considérat. générales sur la notion de quant. complexe et ses applicat. Le calcul d. quantités compl. et l. opérations géométr. Considérat. dernières sur l'attribution répétée d'une même qualité. Notes complément. pour la 2nde éd.

Châtelet, A., Leçons sur la théorie des nombres. (Modules, Entiers algébriques. Réduction continuelle.) Professées bu Collège de France. — X + 156 pp. 8. Fr. 5: 50.

Préface. — *Introduction algébrique.* Les formes et substitutions linéaires. Ensembles abéliens de tableaux. Formes décomposables et équivalence. Langage géométrique. Distance généralisée. — *Théorie des modules de points.* Dimensions d'un module. Modules types. Tableaux et matrices d'un module. Modules finis. — *Entiers et systèmes d'entiers.* Divisibilité. Module de points entiers. Systèmes de formes. Problèmes diophantiques. — *Les nombres et les entiers algébriques.* Polynomes et équations. Corps algébriques. Représentation des nombres d'un corps. Entiers du corps. — *L'arithmétique des entiers d'un corps.* Divisibilité des entiers algébriques. Idéaux d'un corps. Décomposition des idéaux en facteurs. — *Réduction continuelle et théorèmes de Minkowski.* Tableaux réduits d'un système. Réduction continuelle pour le deuxième ordre. Réduction continuelle pour le $n^{\text{ième}}$ ordre. Les deux théorèmes de Minkowski. — *Réduction d'une base d'un corps algébrique.* Unités d'un corps. Propriétés du discriminant. Classes d'idéaux. — Notes. I: Périodes des fonctions. — II: Exemple de corps algébrique. — III: Les congruences suivant un idéal et la norme d'un idéal.

Fermat, Oeuvres de, publ. par Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique. T. 4: Compléments par Charles Henry. — X + 277 pp. 8.

Suppl. à la correspondance de Fermat. La discussion sur la méthode «de maximis et minimis». Les parties aliquotes. Extraits de la correspondance de Mersenne

et de Saint-Martin. Extr. de la corresp. d. Cavalieri avec Mersenne. Extr. de la corresp. de Mersenne et de Torricelli. Extr. de la corresp. de Descartes. Extr. de la corresp. de Huygens. Extr. de la corresp. d'Ozanam avec le P. de Billy. Notes mathématiques. Additions et correct.

Gandillot, Maurice, Note sur une illusion de relativité. — IV + 88 pp. 4. Fr. 6: —.

Exposé de la question. Propagat. d'un ébranlement dans un milieu fluide. Diversité d. variations d'énergie correspond. à une même variat. de vitesse. Cas de l'eau. Action, réaction, sousaction. Cas d'un fluide quelconque. Cas de l'air. Conclusion. — Objection par acte de foi. Object. équivalant à une confirmat. Object. sur l'évaluation de l'énergie. Object. du wagon-canal. Autre object. sur le même sujet. Object. du théorème de Coriolis. Object. obligeant à envisager l. lignes de force. Object. sur l'action et la réaction. Object. d. expériences sur l'air. Object. du principe de relativité. Object. du grand nombre d. opinions contraires. — Différence entre l. cas de l'air et de l'eau. Comparaison d. corps solides, liquides ou gazeux. Effet de la vitesse absolue de la terre. Utilité d'étudier la sousaction. Apologue. Théorie de la fluidité. Vœu final. — Avertissement. Décompte de l'énergie du mobile et du moteur. Remarque sur les n^{os} 3 et 3bis. Théorème de la moindre action, ou loi de la dépense minima d'énergie. Remarque s. le décompte de l'énergie. Remarque s. la conserv. de l'énergie. Force et puissance. Forces libres, forces serves. Action comparée d'une force et d'une puiss. entraînant un syst. matériel sans altérer ses mouvem. intér. Démarrage par une force. Démarrage par une puiss. Préjugés tenaces. Contradict. résultantes. Théorème de Coriolis. Rem. sur la résist. d. fluides. Object. expériment. et réfutations. Object. finale. Post-scriptum. Tables.

Hoüel, J., Tables de logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des logarithmes d'addition et de soustraction ou logarithmes de Gauss et de diverses tables usuelles. Nouv. éd., rev. & augm. — XLVIII + 118 pp. 8. Fr. 2: 75.

Avertissement. Introduct. Disposition et usage d. tables. Recueil de formules et de nombres usuels, avec leurs logarithmes. Table d. log. d. nombres entiers depuis 1 jusqu'à 10,800. Tables pour la conversion des degrés, min. et sec. en parties décim. du rayon et du quadrant; des minutes et sec. en parties décim. du degré; d. degrés et min. en sec., et réciproquement. Table d. log. d. sinus, d. tangentes et d. sécantes, de min. en min., pour tous les degrés du quart de cercle. Table d. lignes trig. naturelles, avec d. tables auxiliaires pour la conversion d. heures, min. et sec. en parties sexagésimales du cercle et en parties déc. du jour. Table d. log. d'addition et de soustraction. Tables pour la convers. d. log. nat. en log. vulgaires, et réciproquement. Table d. log. de div. nombres usuels à 8 et à 10 décimales. Table d. log. à 8 déc. d. nombres ent. depuis 100 jusqu'à 1,000. Table pour le calcul d. log. à 20 déc. Tables de log. à 4 et à 3 décimales. Table d'antilog. à 4 déc. Table de log. nat. à 4 déc. Table d. plus petits diviseurs d. nombres composés non divis. par 2, 3, 5, 11. Tables d. lignes trig. nat. à 10 déc., et d. longueurs d. arcs en parties du rayon.

Jordan, C., Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. 3:e éd., rev. et corr. T. 2: Calcule intégral. — 705 pp. 8.

Intégrales indéfinies. Intégrales déf. Des fonctions représentées par d. Intégrales déf. Potentiels Newtoniens. Séries de Fourier. Intégrales complexes. Fonctions elliptiques. Intégrales Abéliennes.

Olivier, L.-E., Solution du problème de Fermat. — 4 pp. 8. Fr. 0:75.

Rouché, Eugène, et Comberousse, Ch. de, Traité de géométrie. 8:e éd. T. 1: Géométrie plane. XLII + 547 pp. 8. — T. 2: Géométrie dans l'espace. XVIII + 664 pp. 8.

1. La ligne droite: Des angles. Des triangles. Des perpendiculaires et d. obliques. Droites parallèles. Somme d. angles d'un polygone. Du parallélogramme. Fig. symétriques. — La circonférence de cercle: Des arcs et d. cordes. Tangente au cercle. Positions mutuelles de deux circonférences. Mesure des angles. Construction d. angles et d. triangles. Tracé d. parallèles et d. perpendiculaires. Problèmes s. l. tangentes. Appendice. — Les fig. semblables: Lignes proportionnelles. Lignes proport. dans le cercle. Similitude d. polygones. Relations métriques entre l. différentes parties d'un triangle. Probl. relatifs aux lignes proportionnelles. Polygones réguliers. Probl. sur l. polygones rég. Mesure de la circonférence. Appendice. — Les aires: Mesure d. aires d. polygones. Comparaison d. aires. Aires du polygone rég. et du cercle. Probl. s. l. aires. Appendice. Questions prop. sur la géométrie plane. Notes: Mesure d. grandeurs. Sur l'impossibilité de la quadrat. du cercle. Sur la géom. récente du triangle. Sur la géométrographie.

2. Le plan: Prem. notions sur le plan. Droites et plans parallèles. Droite et plan perpendic. Projection d'une droite s. un plan. Angle d'une droite et d'un plan. Plus courte distance de deux droites. Angles dièdres. Plans perpendic. Angles polyèdres. Appendice. — Les polyèdres: Propriétés gén. et aire latérale du prisme. Volume du prisme. Propr. gén. et aire latérale de la pyramide. Figures symétriques. Polyèdres semblables. Appendice. — Les corps ronds: Cylindre de révolution. Cône de rév. Prem. notions s. la sphère. Propr. d. triangles sphériques. Aire de la sphère. Vol. de la sphère. Généralités s. l. surfaces. Append. — Les courbes et l. surfaces usuelles: Propr. fondamentales d. l'hyperbole. Propr. fondament. de la parabole. Ellipse considérée comme project. orthogonale du cercle. Parabole consid. comme limite de l'ellipse. Origine commune d. trois courbes. Sections planes du cône de rév. Propr. fondament. de l'hélice. — Homographie et invol. Courbes du sec. ordre. Théorie d. surfaces du sec. ordre. Étude de quelques surfaces d'ordre sup. Questions proposées s. la géom. dans l'espace. — Notes: Sur l'applicat. d. déterminants à la géom. Sur la géom. non-euclidienne. Sur l. transform. lin. et quadrat., les coniques assoc. à un triangle et l. systèmes de trois fig. directement semblables. Sur la géom. récente du tetraèdre.

Ser, J., Essai d. linéométrie. P. 1. 79 pp. 8. Fr. 2:75.

Le théorème de Chasles et sa généralisation. — Les propriétés élémentaires des défilantes et médianes et des fils abscissiaux. — Le genre linéaire. — Sommes parti-

culières d'arc. — Cas des coniques: Le Cercle (Fils abscissiaux. Médianes. Application du théorème d'Abel). La Parabole (Intégration de l'arc. Fils abscissiaux. Médianes. Cas où la somme des arcs est algébrique). L'Ellipse (Fils abscissiaux et Médianes. Forme particulière de l'équation différentielle. Addition. Théorème de Paquano et analogues. Equation différentielle à deux variables).

Tanrery, Paul, Mémoires Scientifiques, publ. par J. L. Heiberg & H. G. Zeuthen. T. 2: Sciences exactes dans l'antiquité. 1883—1898. — XII + 555 pp. 8.

Volterra, Vito, Leçons sur les fonctions de lignes. Professées à la Sorbonne en 1912. Recueillies et rédigées par Joseph Pérès. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction de M. E. Borel.) — VI + 230 pp. 8. Fr. 7: 50.

L'évolution des idées fondamentales du calcul infinitésimal. Principes de la théorie d. fonctions d'une ligne. Exemples. La théorie d. fonctions de lignes et le calcul d. variations. Les fonct. de lignes implicites. Étude d'une équat. intégro-différentielle du type ellipt. Les équat. intégro-différentielles de l'élasticité. La condition du cycle fermé. Le problème de la sphère élast. isotrope avec hérédité. La composition et la permutabilité de prem. espèce. Application de la théorie précédente à la solution d. équations intégro-différent. Étude d. fonctions permutables de prem. espèce. La permutabilité de deuxième espèce. La résolut. d. équations intégrales et intégro-différentielles à limites fixes. L'applicat. du calcul aux phénomènes d'hérédité.

Ginn & Company.

Boston. New York. Chicago. London 1913.

Smith, David Eugen, Problems in the teaching of secondary mathematics. An address delivered before the New England Association of teachers of mathematics. — 30 pp. 8.

Jul. Gjellerups Forlag.

København 1913.

Hjelmslev, J., Geometriske Eksperimenter. 85 pp. 8.

Juel, C., Forelæsninger over Rationel Mekanik ved den Polytekniske Læreanstalt. — 311 pp. 8.

Grundlæggende Forudsætninger og Begreber. Kræfter, der angriber en enkelt Partikel. Kræfters Moment om en Akse el. et Punkt. Parallele Kræfter. Kraftpar. Massemidtpunkt. Tyngdepunkt. Kraftsyst. Æquivalens. Ligevægt af Legemer paavirk. af Kræfter. De virtuelle Arbejders Princip. Stangpolygoner og bøjelige Snore. Om

Tiltrækning og Potential. — Hastighed og Akceleration. Et fast Legemes endel. og uendel. lille Bevægelse. — Grundl. Forudsætn. og Begreber. Retlin. Bevægelse. En Partikels frie krumlin. Bevægelse. Bevæg. af en Partikel bund. til en Kurve el. Flade. Inertimomenter. Almind. Principer for et Systems Bevæg. Drejning om en fast Akse. Stødet. Relat. Bevæg. Eksempl. paa Legemers Bevæg. Stabilitet. Ligedannede Systemer. D'Alembert's Princip. Lagranges' Bevægelsesligninger. Et fast Legemes Drejn. om et fast Punkt.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

Berlin & Leipzig 1912—1913.

Buchwald, Eberhard, Einführung in die Kristalloptik. Mit 124 Abb. (Sammlung Göschen 619.) — 124 pp. 8. M. 0: 90.

Einleit. Einachsige Kristalle ohne Drehvermögen. Zweiachsige Kristalle ohne Drehvermögen. Kristalle mit Drehvermögen. Absorption. Einfluss von Temperatur usw.

Bürklen, O. Th., Aufgabensammlung zur Analytischen Geometrie des Raumes. Mit 8 Fig. 2:e, verb. u. verm. Aufl. (Sammlung Göschen 309.) — 109 pp. 8. M. 0: 90.

Punkt, Ebene, gerade Linie. Die Kugel. Krumme Flächen. Flächen II. Grades. Raumkurven; Schnittlinien von Flächen. Verm. Aufgaben.

Fischer, Paul B., Déterminanten. 2:e verb. Aufl. (Sammlung Göschen 402.) — 136 pp. 8. M. 0: 90.

Einleit. Theorie der Determinanten. Anwendungen der Determinanten. Besondere Determinanten.

Knopp, Konrad, Funktionentheorie. T. 1: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. (Sammlung Göschen 668.) — 142 pp. 8. M. 0: 90.

Punktmengen. Funktionen einer kompl. Veränderlichen. — Das Integral einer stetigen Funktion. Der Cauchysche Integralsatz. Die Cauchyschen Integralformeln. — Reihen mit veränderl. Gliedern. Die Entwickl. analyt. Funktionen in Potenzreihen. Analyt. Fortsetzung u. vollst. Definition der analyt. Funktion. Ganze transzendente Funktionen. — Die Laurentsche Entwicklung. Die verschiedenen Arten singulärer Stellen. Residuen.

Valentiner, Siegfried, Vektoranalysis. Mit 16 Fig. 2, umgearb. Aufl. (Sammlung Göschen 354.) — 156 pp. 8. M. 0: 90 geb.

Einleit. Rechnungsregeln der Vektoranalysis. Anwend. in ein. physikal. Gebieten. Lineare Vektorfunktionen, Dyaden, Tensoren. Zusammenstellung d. wichtigsten Formeln.

Weitbrecht, Wilh., Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2:e, veränd. Aufl. T. 1: Ableitung der grundlegenden Sätze und

Formeln. (Sammlung Göschen 302.) — 127 pp. 8. M. 0: 90. — T. 2: Zahlenbeispiele. (Sammlung Göschen 641.) — 141 pp. 8. M. 0: 90.

Einl. Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit. Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit. — Uebertragung von Beobachtungsfehlern auf Funktionen der Beobachtungsgrössen. Ausgleichung vermittelnder gleichgenauer Beobachtungen. Ausgleichungen vermittelnder Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit. — Bedingte Beobachtungen.

Hachette et C:ie.

Paris 1912.

Dupuis, J., Tables de logarithmes à sept décimales. Ed. stér. 15:e tir. — XI + 580 pp. 8. Fr. 8: 50.

Logarithmes des nombres de 1 à 1,000. Logarithmes d. nombres de 1 à 100,000. Logarithmes naturels d. nombres de 1 à 1,000. Multiples du module M et du rapport inverse $1/M$, pour convertir les logarithmes naturels en log. vulgaires et réciproquement. Log. des sinus et des tangentes de seconde en sec. pour l. cinq prem. degrés. Log. des sinus et des tangentes de dix secondes en dix sec. pour tous les degrés du quart de cercle. Longueurs des arcs de cercle pour le rayon 1. Réduction d. parties de l'équateur en temps. Disposition et l'usage des tables.

Hayez, Imprimeur de l'Académie Royale de Belgique.

Bruxelles 1912.

Noaillon, Paul, Développements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à paramètre variable. — 208 pp. 8.

Introduct. Calcul d. classes de fonctions. Congruences généralisées. Calcul asymptotique. Irrationnelles algébr.: Problème formel. Probl. fonctionnel. Equat. différentielles: Enoncé du probl. Calcul des radicals. Calcul du facteur secondaire. Syst. fondament. de solutions formelles. — Relations asymptot. entre solutions formelles et solut. exactes. Cas particul. du grand théorème. Grand théorème. Equat. avec sec. membre. Variation de l'argument de x. Note relat. à l'emploi du calcul asympt. dans l'étude de la convergence. Table d. définitions et notations.

Helbing & Lichtenhahn.

Basel 1912.

Grossman, Marcel. Einführung in die darstellende Geometrie. Leitfaden für den Unterricht an höh. Lehranstalten. 2:e neu bearb. Aufl. mit 80 Übungsaufgaben u. 118 Fig. — 92 pp. 8. M. 2: 80.

Einleit. Die Normalprojektion auf eine Ebene. Die Normalprojektionen auf zwei zu einander rechtwinklige Ebenen. Darstellung d. Polyeder, ihrer Schnitte, Durchdringungen u. Netze. Darstellung v. krummen Flächen. Elemente d. Axonometrie. Elem. d. Zentralprojektion. Projekt. Eigenschaften d. Kegelschnitte. Anhang.

Herdersche Verlagsbuchhandlung.

Freiburg i. Breisgau 1909.

Müller, Adolf, Der Galilei-Prozess (1632—1633) nach Ursprung, Verlauf und Folgen. VIII + 205 pp. 8. M. 3: 60.

Klarstellung d. Fragepunktes. Galileis Pläne. Die drei Kometen d. Jahres 1618. Galileis Goldwage (Il saggiatore). Galilei und Grassi im wissenschaftl. Ringkampf. Galileis Romfahrt 1624. Die Antwort auf die Bedenken Monsignor Ingolis. Indexdekrete u. freie Forschung. Der »Prioritätsstreit» mit Scheiner. Zustandekommen d. Dialogs üb. die Weltsysteme. D. Dialogs erster u. zweiter Konferenztag. Dritter Konferenztag: Die Sonnenflecke. Viert. Konferenztag: Die Gezeiten. Urteile üb. d. Dialog. Der »Dialog» unter Anklage. Die Gerichtsverhandl. 1633. Verurteilung u. Abschwörung. Galilei-Fabeln. Aktenfälschung u. Priesterhass. Galileis Lebensabend u. Tod. Schlussergebnis.

Müller, Adolf, Galileo Galilei und das kopernikanische Weltsystem. VIII + 184 pp. 8. M. 3: 40.

Vorw. Galilei, Lehrer d. ptolemäischen Weltsystems. Übergang z. kopernikan. Lehre. Verdeckte Bekämpfung d. peripatetischen Philosophie. Prioritätsstreit wegen d. Proportionszirkels. Verhalten gegenüb. d. Kepplerschen Gesetzen. Das Fernrohr u. seine erst. Ergebnisse. Anerkennung d. neuen Entdeckungen. Rom u. das Römische Kolleg. Hof-Philosoph u. teolog. Erörterungen. Galilei als Erklärer d. Heiligen Schrift. Die Berufung auf die Kirchenväter. Die Entdeckung d. Sonnenflecke. Das Werkchen üb. d. Sonnenflecke. Ein erst. Galilei-Prozess. Naturwiss. Begründung f. d. neue Syst. Die kirchliche Entscheid. von 1616. Tragweite d. kirchl. Dekrete v. 1616. Rückblick.

A. Hermann & Fils.

Paris 1913—1914.

Boutroux, Pierre, Les principes de l'analyse mathématique. Exposé historique et critique. T. 1: Les nombres. Les grandeurs. Les figures. Le calcul combinatoire. Le calcul algébrique. Calcul des fonctions. L'algèbre géométrique. — XI + 547 pp. 8. Fr. 14: —.

Le monde d. nombres. Les opérations fondament. Propriétés de la suite croissante d. nombres. Progressions arithm. et géométriques. Problèmes relat. aux nombres. Fractions. Nombres rationnels. Inégalités. L'écriture arithm. et la numération. Calcul

approché. Puissances fractionnaires. — Les grandeurs géométr. et le calcul. Mesures. Longueur de la circonférence. Digression sur la mesure d. aires et d. volumes en géométrie rationnelle. Rapports et proportions. Confrontation du nombre et de la grand. Définition rigoureuse d. nombres irrat. Expressions arithm. convergentes. Séries. L. nombres relatifs. Logarithmes. Grandeurs trigonométr. — Le monde d. notions géométr. Géométrie qualit. d. fig. simples. Géométrie métrique. L'édifice géométr. et la démonstration. La construct. en géométrie ration. Sections planes du cône. Étude d. courbes. — Le calcul combinat. — Objet et ambitions de l'algèbre. Symboles et express. algébriques. Transformations classiques. Fonct. et équations. Transform. d. équat. Résolut. d. équat. polynomales. Propriétés fondament. de l'équat. de degré n. Interpolation. Syst. d'équat. simultanées. Division d. polynomes en x et décomposit. d. fonct. rationnelles. Fonct. et équat. transcendantes. Calculs trigonom. — Étude d. fonct. d'une variable. Dérivées. Fonct. transcend. classiques. Fonct. de plusieurs variables. Fonct. implicites. Recherche d. fonctions primit. Équat. différentielles. Équat. classiques du prem. ordre. Equat. class. du sec. ordre et d'ordre sup. Équat. aux dérivées part., fonctionnelles intégrales. — Représent. géométr. d. quantités et d. expressions algébr. Le calcul géom. d. Grecs. Figuration cartésienne d. fonctions d'une variable. L'étude graphique d. fonct. d'une var. L. équat. différentielles du prem. ordre. Fonctions primit. représentées par d. aires (intégrales déf.). Étude graphique d. équat. Méthodes d'approximation.

Cahen, E., Théorie des nombres. T. 1: Le premier degré. (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Paris). — XII + 408 pp. 8. 14 Fr.

Les nombres entiers. Addition. Multiplicat. d. nombres ent. Numération. Règles de l'addit. et de la multiplicat. Soustraction d. nombres ent. Nombres entiers négat. Division d. entiers. Divisibilité. Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple. Nombres fractionnaires. Équat. diophantiennes du prem. degré à une et à deux inconnues. Applicat. de la géométrie d. nombres. Résolut. d. équat. diophant. du prem. degré à plus de deux inconnues et d. systèmes de telles équat. Rappel de théories d'algèbre. Etude d. équat. diophant. du prem. degré et d. syst. d. telles équat. Théorie d. substitutions linéaires homogènes. Théorie algébr. d. formes linéaires. Théorie arithmétique d. formes lin. à coefficients entiers. Théorie d. formes bilinéaires. Éléments de la théorie d. congruences. Congruences lin. Calcul d. tableaux. Tableaux ent. Quelques applicat. d. théories précédentes. Décomposit. d. entiers en facteurs premiers. Prem. applicat. Applicat. de la décomposit. en facteurs prem. au calcul de certaines fonctions arithmétiques. Indicateur. Calcul à un module près. Éléments de la théorie d. congruences à module prem.

Delassus, E., Leçons sur la dynamique des systèmes matériels. — XII + 421 pp. 8. Fr. 14: —.

Compléments sur la théorie d. vecteurs. Compléments de cinématique: Vitesse d'un point. Vitesse d'un syst. de vecteurs. Vitesse d'un solide. Vitesses paramétriques d'un solide. Mouvement de roulement. — Liaisons. Quantités de mouvement. Forces d'inertie. Travail. Force vive. — Mouvements parfaits. Mouvem. concrets.

Principe de d'Alembert. Équat. générales du mouvem. d. systèmes holonomes. Équat. gén. du mouvem. d. syst. non holonomes. Équat. spéciales au mouvement du corps solide. — Equilibre. Petits mouvem. d'un syst. matériel. Equilibre et petits mouvements d'un syst. holonome à intégrale d. forces vives. — Généralités sur les intégrales premières. Intégrales linéaires. Intégrale d. forces vives. — Systèmes de Lagrange à un seul paramètre. Décomposit. d'un syst. de Lagrange. Réduction d'un syst. de Lagrange. Cas d'intégration mis en évidence par les équat. canoniques et l'équat. de Jacobi. — Intégration. Étude du paramètre principal. Applicat. aux syst. holonomes à un seul paramètre. Étude d. paramètres secondaires. Cas d'intégrat. régul. visibles à priori. Cas d'intégrat. se ramenant au cas régulier. — Liaisons unilatérales. Mouvements en tenant compte de la rotation terrestre. Remarques gén. relat. à l'étude du mouvem. d'un syst. matériel. — Généralités sur l. percussions. Principe de d'Alembert. Equat. gén. de percussion. Chocs. — Généralités. Principes de calcul d. variations. Equilibre du fil flexible et inextensible. — Liaisons. La notion gén. de mouvem. Equilibre et petits mouvements. — Applications.

Fitz-Patrick, J., Exercices d'arithmétique, énoncés et solutions. Avec une préface de J. Tannery. 3:e éd. entièrement refondue et considérablement augmentée. — V + 707 pp. 8. Fr. 12: —.

Préliminaires. Numération. Addition et soustraction. Multiplicat. Division. Propositions fondament. sur la divisibilité. Caractères de divisibilité. Plus grand commun diviseur. Plus petit multiple. Nombres premiers. Fractions ordinaires. Rapports et proportions. Fractions décimales. Carrés et racines carrés. Cubes et racines cubiques. Calculs approchés. Nombres irrationnels. Limites. Problèmes. Séries arithm. Progressions arithm., géométr. et harmoniques. Exercices sur les formules de sommation. D. différents systèmes de numérat. Syst. métrique, nombres complexes. Applicat. Règles de trois. Règle conjointe. Note sur la Table de facteurs premiers d. nombres proposée par Ernest Lebon.

Guichard, C., Problèmes de Mécanique et Cours de Cinématique. Conférences faites en 1912 aux candidats au certificat de Mécanique Rationnelle. Rédaction de MM. Dautry et Deschamps. (Cours et conférences de la Sorbonne, publ. par l'Assoc. Gén. d. Étudiants de Paris.) 156 pp. 8. Fr. 6.

Problèmes: Cinématique plane. Cinémat. du corps solide. Dynamique du point et géométrie d. masses. Dynamique d. systèmes. Probl. donnés aux examens dans l. diff. facultés 20—21. — Cours de cinématique: Cinémat. du point matériel. Mouvement rectiligne. Mouvem. curviligne. Axes de Frenet et Serret et project. de l'accélération sur s. axes. Accélérat. en coord. polaires d. le plan. Cinémat. du corps solide. Mouvem. de translation. Mouvem. de rotation. Mouvem. hélicoidal. Mouvem. d'un plan s. un plan. Représentat. géomét. du mouvem. Théorie d. enveloppes. Développantes et développées. Etude analyt. du mouvem. d'un plan s. un plan. Accélération norm. et accélérat. tangentielle, cercle d. inflexions. Mouvem. du corps sol. ayant un point fixe. Représentat. géomét. mouvem. le plus gén. du corps sol. Représentat. géomét. Théorie d. mouvements relatifs. Composit. d. vitesses et d. accélérat. Théorème de Coriolis. Composit. d. translat. et d. rotat.

Ferdinand Hirt.

Breslau 1912.

Niemöller, F., & Dekker, Peter, Arithmetisches und algebraisches Unterrichtsbuch. Lehrstoff der Mittel- und Oberstufe höherer Lehranstalten. In vier Heften. H. 1—2. Aufl. 2. — 92 + 116 pp. 8. H. 1: M. 1:25; H. 2: M. 1:60 kart.

1. Pensum d. Quarta u. Untertertia: Die vier Grundrechnungen m. abs. Grössen. Klammerlose Ausdrücke. Klammern. Die vier Grundrechn. m. relat. Zahlen. — Gleichungen m. abs. Zahlen. Gleichungen m. relat. Zahlen.

2. Pensum d. Obertertia: Gleich. erst. Grades m. einer Unbekannt. Gleich. erst. Grades m. mehreren Unbekannten. Potenzen u. Wurzeln. Einf. quadrat. Gleich. — Pensum d. Untersekunda: Quadrat. Gleichungen. Lograithmen. Anwend. d. Log. auf die Zinseszins- u. Rentenrechnung.

Ulrico Hoepli.

Milano 1912—1914.

Cremona, Luigi, Opere matematiche, pubbl. sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. Tomo primo. — VIII + 497 pp. 4. L. 25: —.

Sulle tangenti sfero-coniugate. Intorno ad un teorema di Abel. Intorno ad alcuni teoremi di geometria segmentaria. Sur les questions 321 et 322. Solution analyt. de la question 344. Seconde solution de la question 368. Sec. solution de la question 369. Rivista bibliografica. Sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura. Teoremi sulle linee del terz' ordine a doppia curvatura. Intorno alle superficie della sec. classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe. Intorno alle coniche inscr. in una stessa superficie svilupp. del quart' ordine. Solutions des questions 435, 464, 465. Sur l. coniques sphériques et nouv. solution gén. de la question 498. Solut. des questions 494 et 499, méthode de Grassman et propriété de la cubique gauche. Sopra un problema generale di geometria. Sulle superficie di second' ordine omofocali. Sulle coniche e sulle superficie di second' ordine congiunte. Intorno ad una proprietà delle superficie curve, che comprende in sè come caso partic. il teorema di Dupin sulle tangenti coniugate. Considerazioni di storia della geometria in occasione di un libro di geom. element. publ. a Firenze. Intorno ad un' operetta di Giovanni Ceva, matematico milanese del sec. XVII. Sur quelq. propriétés d. lignes gauches de troisième ordre et classe. Prolusione ad un corso di geom. sup. letta nell' Università di Bologna, Nov. 1860. Trattato di prospettiva-rilievo. Sulle superficie gobbe del terz' ordine. Intorno alla curva gobba del quart' ordine per la quale passa una sola superficie di sec. grado. Introduzione ad una teoria geom. delle curve piane. Courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe. Rivista bibliografica. Note dei revisori. Elenco dei revisori.

Loria, Gino, Poliedri, curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva. (Manuali Hoepli, 148, 149.) — XV + 235 pp. 8. 3 Lire.

Fig. limitate da piani e da rette: Risoluzione dell' angolo triedro. Rappresentazione dei poliedri. Problemi relativi ai poliedri. — Fig. limitate da linee e superficie curve: Curve piane. Curve gobbe. L'elica del cilindro circolare retto. — Superficie: Riassunto delle principali proprintà. Rappresent. di una superficie. Generalità intorno ai problemi di geom. descritt. concernenti le superficie. Superficie di rotazione. Superficie elicoidi. Superficie coniche e cilindriche. Superficie rigate sviluppabili. Superficie rigate gobbe.

M. Krayn.

Berlin 1912.

Haeussler, J. W., Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes. — 20 pp. 8.

——, Geometrischer und algebraischer Beweis des Fermatschen Satzes durch Ausziehen der n^{ten} Wurzel und durch Ableitung des Satzes als ganzzahlige Ungleichung. — 48 pp. 8.

Lambert—De Roisin.

Namur 1911.

Toisoul, J., Particularités utiles et intéressantes sur les nombres et leurs combinaisons. — 103 pp. 8. Fr. 1:50.

Sommes et différences. Produits et quotients. Carrés et racines carrées. De certains nombres. Divisibilité, fractions ordinaires. Des carrés magiques. Divers.

Gebr. Leemann & Co.

Zürich—Selnau 1910—12.

Mettler, Hans, Graphische Berechnungs-Methoden. Im Dienste der Naturwissenschaft und Technik. T. 1—3. — 278 pp. 8.

Einleit. Zeichnerische Darstellung von Punkten, Linien, Flächen, Körpern. Distanzenbestimmungen auf der Erdkugel. Tabelle d. Sinuswerte. Tab. der Tangenswerte. Koordinatenverwandlung. Die Sonne. Zeitmessung. Refraktion. Mit d. Sonnenlauf zusammenhäng. Probleme. Schattenkonstruktion. Div. Untersuch. Astronom. Ortsbestimmung. — Bewegung eines Punktes. Beweg. bei konstanter Beschleunigung. Beweg. bei veränderl. Beschleunigung. Beweg. von Körpern unter d. Einfluss von Kräften u. Bedingungen. Inertie. Energie u. Arbeit. Regulierwirkung rotierender Massen. Leistung, Drehmoment u. Tourenzahl. Hydraulische Kraftanlagen. Heranziehung grosser Wassermassen zur Arbeitsabgabe. Bremsproblem an einer Francisturbine. Bremsung an rotierenden Maschinenteilen zur Berechn. der Trägheit oder des Reibungswiderstandes. Belas-

tungsstösse bei Hochdruckanlagen. Jährliche Regenmengen. — Aeromechanik: Allgemeines. Zustandsgesetze. Feuchte Luft. Darstellung v. Zustandskurven. Abhängigkeit d. Luftzustandes v. der Höhe. Barometr. Höhenmessung. Auftrieb, Luftwiderstand, Winddruck. Abhängigkeit zwischen Energie, Geschwindigkeit, Widerstand u. d. Zustandswerten. Luftwiderstand u. Winddruck an Körpern v. regelmässiger Form. Die Luftmolekel u. ihre Eigenbewegung. Der Fall im lufterfüllten Raum. Der senkrechte Wurf. Der schiefe Wurf. Militärballistik. Sternschnuppen u. Feuerkugeln. Wolken, Luftströmungen u. Niederschläge. Wind, Stürme u. Schwankungen d. Luftzustandes. Einfluss der Luftdruckverteilung u. Mondanziehung auf die Erdbeben durch Verstärkung bereits vorhandener Spannungen. Zeichnerische Behandl. v. Aufgaben aus d. Aviatik. Lüftung u. Heizung. Schlussbemerkungen.

Lehmann & Stage.

Köbenhavn 1912.

Juel, C., Elementær Stereometri. 3. omarb. Udgave. — 91 pp. 8.

Skærende og parall. Linier og Planer. Afstande og Vinkler. Projektion af Liniestykker og af Arealer. Kongruens og Symmetri. Ligedannethed. Cylinderflader og Kegleflader. Kuglefladen. Konvekse Hjørner. Det treretvinkl. Hjørne. Sfærisk Geometri. Sfærisk Trigonometri. Om Polyedre i Almindelighed. Prismer og Pyramider. Regulære Polyedre. Opgaver.

Alfred Lorentz.

Leipzig 1913.

Brandenburg, H., Der grosse Fermatsche Satz und sein Beweis mit Hülfe der allgemeinen pythagoräischen Dreiecksgleichung. 2:e Ausg. — 8 pp. 8 M. 0: 60.

Mattei & C.

Pavie 1913.

Burali-Forti, C., & Marcolongo, R., Applications à la mécanique et à la physique. (Analyse vectorielle générale. II.) — XII + 144 pp. 8. Fr. 5: —.

Moments d'inertie et quantité de mouvement dans les syst. solides. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Cinématique et statique d. corps déformables. Formules fondament. de l'équilibre et du mouvement d. corps élastiques isotropes. Mouvement libre par ondes planes dans l. milieux isotropes ou cristallins. Hydrodynamique d. fluides parfaits et d. fluides visqueux. Propagation de la chaleur dans l. corps isotropes ou cristallisés. Électrodynamique d. corps au repos ou en mouvement.

Vivanti, Giulio, Esercizi di analisi infinitesimale. — VIII + 470 pp. 8. Lire 15:

Preliminari analitici. Derivate ed integrali delle funzioni d'una variabile. Derivate ed integrali delle funz. di più variabili. Applicazioni geometr.: Curve piane. Curve nello spazio. Superficie. — Equazioni differenziali ordinarie. Equaz. a derivate parziali.

Otto Nemnich.

Leipzig 1911.

SCHANOFF, BOTJU, Die Vorgänge des Rechnens. (Ein experimenteller Beitrag zur Psychologie des Rechnens.) (Pädagogische Monographien, hrsg. von E. Meumann, Bd 11.) Mit 7 Fig. u. 9 Tab. — 120 pp. 8. M. 2: 80 geh.; M. 4: 30 geb.

Einleitung. Einleit. Versuche: Die akustische Reihe. Anordn., Instruktion u. Zeiten. Die Vorperiode. Die Hauptperiode. Die Nachperiode. Die optische Versuchsreihe. Anordn., Instrukt. u. Protokollbeispiele. Die Vorperiode. Die Hauptperiode. — Versuche üb. die Zahlen- u. Operationsauffassung. Die akust. Versuchsreihen a, b, O und O, b, a. Die opt. Versuchsreihen. — Die Lösung d. Aufgaben. Die Additions-Komplexe. Die Subtraktionskomplexe. Die Multiplikationskomplexe. Die Divisionskomplexe.

L. Oehmigke's Verlag (R. Appelius).

Berlin 1912.

HÄDICKE, GUSTAV, Einführung in die neuere Geometrie. Ein Vorschlag zur Reform des elementar-geom. Unterrichts. T. 1: Symmetrie und Kongruenz. — XXVI + 241 pp. 8. M. 3: — geh.; 3: 60 geb.

Einleitung. — Die symmetrische Punktreihe u. das symm. Strahlenbüschel. Das symmetr. Viereck u. Vierseit. Das symmetr. Dreieck u. Dreiseit. Aufgaben. Das doppeltsymmetr. Viereck u. Vierseit. Das symmetr. Ebenenbüschel. Das symm. Vierseit im Strahlenbündel u. das symm. Vierkant. Das symm. Dreiseit im Strahlenbündel u. das symm. Dreikant. Aufg. Das doppeltsymm. Vierseit im Strahlenbündel u. das doppeltsymm. Vierkant. Das symm. Feld u. das symm. Strahlenbündel. Das Gesetz der Reziprozität u. Dualität. Die symm. Doppelelemente. Die unendlich-fernen Raumelemente. Verallgemeinerung einig. früher gewonn. Sätze durch Einführung der unendl.-fernen Raumelemente. Die parallele Lage der Raumgebilde. Massbeziehungen bei Parallelen. Die parallelen Formen d. symm. Grundgebilde. Darstellung der Raumelemente u. ihrer gegenseit. Lagenbeziehungen verm. zweier Projektionsebenen in orthogonaler Projektion. Die allseitig-symmetrischen Grundgebilde II. Ordnung. Die allseit.-symm. Grundgeb. II. Ordn. als Erzeugnisse zweier Grundgeb. I. Ordn. Aufgaben. Symmetrische n-ecke. n-seite u. n-kante. Die allseit.-symm. Fläche u. das allseit.-symm. Ebenenbündel II. Ordn. Symm. räumliche n-ecke u. n-fläche. Die Darstellung metrischer Beziehungen der Raumelemente. Asymmetrische Gebilde. Massbeziehungen bei asymm. Gebilden. Zu den Grundlagen d. Geometrie. — Aufgaben u. Lehrsätze.

R. Oldenbourg.

München & Berlin 1913.

Lorenz, Hans, Lehrbuch der technischen Physik. Bd 4: Technische Elastizitätslehre. Mit 229 Abbild. — XXIV + 692 pp. 8. M. 20: — geb.; M. 19: — geh.

Zug- und Druckelastizität isotroper Körper. Verdrehungselastizität isotroper Körper. Die Biegung gerader isotroper Stäbe. Die Biegung krummer isotroper Stäbe. Knick- und Kipperscheinungen. Allgemeine Elastizitätstheorie. Die Biegung ebener Platten. Der ebene Spannungszustand. Aschsensymmetrische Spannungszustände. Abriss der geschichtlichen Entwicklung der Elastizitätslehre.

Carl Ernst Poeschel.

Leipzig 1911—1912.

Berliner, S., Politische Arithmetik. Bd 1: Renten und Anleihen. Bd 2: Versicherungsrechnung für Nicht-Mathematiker. — 141 + 141 pp. 8. Bd 1: M. 4: 80 geh., M. 6 geb.; Bd 2: M. 4: 80 geh., M. 6 geb.

1. Die Zinseszins-Tabelle. Die Renten-Tab. Halbjährl. Verzinsung. Halbjährl. Renten. Antizipative Verzinsung. Tilgbare Anleihen. Anleihekurse. Rentabilität. Anleihen, die nach einem festen Prozentsatz d. Kapitalrestes getilgt werden. Bewertung v. Obligat. in d. Bilanz. Versicherung gegen Auslosungsverlust.

2. Prämienberechnung ohne Berücksichtigung d. Verzinsung: Versicher. geg. einmalige Kapitalzahlung, Versicher. geg. Jahresprämie. — Prämienberechnungen mit Berücksicht. d. Verzinsung: Versicher. geg. einmalige Kapitalzahlung. Versicher. geg. Jahresprämie. Lebenswahrscheinlichkeit u. Sterbenswahrscheinlichkeit. Die Prämienreserve. Prämienberechn. f. Versicher. von verbundenen Leben. Die Invalidenversicher. Über abgekürzte Multiplikat. u. Division. Abgek. Rechnung v. zusammengesetzten Ausdrücken (Kettensätze). Tabellen.

Smithsonian Institution.

City of Washington 1909.

Becker, George F., & van Orstrand, C. E., Hyperbolic functions. (Smithsonian Mathematical Tables.) — LI + 321 pp. 8. 4 $.

Definitions and formulas. Geometr. illustrat. Methods of interpolation. Description of tables. Histor. note. — Five place values of log sinh u, log cosh u, log tanh u, and log coth u. Five place values of sinh u, cosh u, tanh u, and coth u. Five place values of sin u, cos u, log sin u and log cos u, u being expressed in radians and their angular equivalents. The ascending and descending exponential to seven significant figures with $\log_{10} e^u$ to seven places. Nine place values of the same with ten place logarithms from $u = 1$ to $u = 100$. Auxiliary table of multiples of $\log_{10} e$ for interpolation of $\log_{10} e^u$. Five place values of natural logarithms. Interpolation coef-

ficients for derivative formula. The gudermannian of u to seven places in radians a. to the same order of accuracy in degrees, minutes and seconds. The anti-gudermannian to hundredths of a minute in terms of the gudermannian expressed in degrees a. min. from $0° 0'$ to $89° 59'$. Table for conversion of radians into angular measure and vice versa. Numerical constants.

E. Speidel.

Zürich 1912.

WENDLING, EUGEN, Der Fundamentalsatz der Axonometrie. — 96 pp. 8. M. 1:60.

Einleit. Der Satz von Pohlke u. seine Voraussetzungen. Der ursprüngl. Beweis von K. Pohlke. Das Prinzip d. Hilfskugel von J. W. von Deschwanden u. seine Verallgemeinerung. Eine Vereinfachung d. Beweise. — Ein Hilfssatz. Ueb. die Beweise d. Hilfssatzes. Neuer element. Beweis d. Hilfssatzes. Anwend. d. Hilfssatzes. — Der Beweis von H. Schwarz u. seine Modifikationen. — Der analyt. Beweis von H. Kinkelin. Die projekt. Verallgemein. u. Beweise d. Satzes. Der analyt., projekt. Beweis von F. Klein. — Der Pohlke'sche Satz d. mehrdimensionalen Geometrie. Nachtrag. Schlussbetracht. Literat.

B. G. Teubner.

Leipzig 1910—1913.

ALKINDI, TIDEUS und PSEUDO-EUKLID. Drei optische Werke. Hersg. u. erklärt von Axel Anthon Björnbo und Seb. Vogl. Mit einem Gedächtnisswort auf A. A. Björnbo von G. H. Zeuthen, einem Verzeichniss seiner Schriften und seinem Bildnis. (Abhandl. zur Geschichte d. math. Wiss. . . . begr. von Moritz Cantor, Heft 26, 3.) — 176 pp. 8. M. 10: — geh.

ARCHIMEDIS Opera omnia. Cum commentariis Eutocii, iterum edidit J. L. Heiberg. Vol. 2. — (Bibliotheca scriptorum graecorum et romanorum Teubneriana.) — XVIII + 554 pp. 8. M. 7: 40 geh.; M. 8: — geb.

Bericht über die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht im Jahre 1912, erstattet von dem geschäftsführenden Sekretär Dr. W. LIETZMANN. (Schriften d. deut. Ausschusses f. d. math. u. naturwiss. Unterricht, Heft 16.) — 28 pp. 8. M. 1: — geh.

Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskommission. VIII. — 57 pp. 8. M. 1: 60 geh.

P. Stäckel: Nachruf auf Peter Treutlein. W. Lietzmann: Der Internationale Mathematikerkongress in Cambridge.

Vorschläge für den mathematischen naturwissenschaftlichen und erdkundlichen Unterricht an Lehrerseminarien. Unter Mitwirk. v. Fachmännern ausgearb. vom Deutschen Ausschuss f. d. mathemat. u. naturwissenschaftlichen Unterricht. (Schriften d. deut. Ausschusses f. d. math. u. naturwiss. Unterricht, Heft 14.) — 49 pp. 8. M. 1: 80 geh.

Beutel, Eugen, Die Quadratur des Kreises. (Mathemat. Bibliothek, 12.) — 75 pp. 8. M. 0: 80 kart.

Einleit. Der elementargeometr. Zeitraum: Die Ägypter, Chinesen, ält. Inder u. Babylonier. Die Griechen. Die Römer u. Inder d. Mittelalters. Die Araber. Die Völker d. Abendlandes bis 1400. Von Cusanus bis Huygens. — Der arithmet.-trigonometrische Zeitraum: Der Einfluss d. Differential u. Integralrechn. Unendl. Produkte f. π. Die Japaner u. Chinesen. Der Buchstabe π. Näherungskonstruktionen. — Beweis d. Irrationälität von π. Beweis d. Transzendenz von π.

Branford, Benchara, Betrachtungen über mathematische Erziehung vom Kindergarten bis zur Universität. Deutsche Bearb. von Rudolf Schimmack und Hermann Weinreich. Mit 114 Fig. u. 1 Tafel. — VII + 403 pp. 8. M. 6: — geh.; M. 7: — geb.

Vom Beginn d. geom. Unterrichts. Die Grundbegriffe Punkt, Gerade, Ebene, Winkel. Weit. Klärung d. Winkelbegriffs. Einiges aus d. Geschichte d. Rechnens mit Anwend. auf den Elementarunterricht. Die Entwickl. d. Zahlbegriffs beim Menschengeschlecht u. beim einzelnen Kinde. Wie ein berühmter Ingenieur sich im Rechnen selbst unterrichtete. Üb. geom. Beweise bei Anfängern. Einige Experimente im Geometrieunterricht für blinde Kinder. Üb. die unterbewusste Erfahrung. Der Satz von der Winkelsumme d. Dreiecks. Der Funktionsbegriff. Geometrie als Lehre v. der Lage, Gestalt u. Grösse. Geom. Örter u. Konstruktionsaufgaben. Üb. die Einführ. in die Ähnlichkeitslehre. Üb. Ursprung u. Entwickl. d. Mathematik. Zur Entwickl. d. mathem. Wissens. Pädagogische Grundsätze f. die Entwickl. des math. Wissens im Individuum. Weit. pädagog. Anwendungen. Bildung u. Beschäftigung. Üb. die Natur d. geom. Wissens u. seinen Entstehungsprozess beim Individuum. Psycholog. Betrachtungen. Die Entwicklung d. Axiome beim Menschenstamm u. beim Individuum. Der Aufbau d. Geometrie beim Menschenstamm u. beim Bildungsgang d. Individuums. Anhang üb. verschied. Einzelfragen.

Brill, A., Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. — 28 pp. 8. M. 1: 20 geh.

Bützberger, F., Über bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion. — 60 pp. 8. M. 1: 50 geh.

Cranz, C., Lehrbuch der Ballistik. Dritter Band: Experimentelle Ballistik oder Lehre von den ballistischen Messungs- und Beobachtungs-Methoden, hrsg. von C. Cranz und K. Becker. Mit 118 Fig. — VIII + 339 pp. 8. M. 15: — geb., M. 14: — geh.

Mathemat. u. physikal. Hilfsapparate u. Hilfseinrichtungen. Messung v. Geschossgeschwindigkeiten u. kleineren Geschossflugzeiten. Messung d. Verbrennungsdauer eines rasch verbrennenden Zündsatzes, d. Explosionsgeschwindigkeit eines Sprengstoffes usw. Messung v. grösseren Zeitintervallen: Gesamtflugzeit eines Geschosses, Brenndauer v. langsam brennenden Zündsätzen u. Zündschnüren. Messung d. Abgangswinkels, Abgangfehlerwinkels u. Auffallswinkels. Untersuchung einer Pulversorte auf Wärmegehalt, Verbrennungstemperatur, Verbrennungsdauer u. spezifisches Volumen. Messung d. Druckes d. Pulvergase. Ballistische Photographie.

Dingeldey, F., Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. T. 2: Aufgaben zur Anwendung der Integralrechnung. (Teubners Samml. von Lehrbüchern . . . Bd 32, 2.) — 382 pp. 8. M. 12: — geh.; M. 13: — geb.

Einige allgem. Regeln. Integration d. Potenz. Einf. Beispiele zur Methode d. Substitution. Integrat. d. Potenz. Uneigentl. Integrale. Integrat. d. Exponentialfunktion u. d. Logarithmus. Methode d. teilw. Integration. Aufgaben, die sich auf die allgem. Eigenschaften d. best. Integrale beziehen. Die trigonometrischen u. zyklometr. Funktionen. Weit. Beispiele zur Integrat. transzendenter Funktionen. Integrat d. rationalen Funktionen. Integrat. gew. Differentiale, die Wurzeln aus lin. Funktionen von x enthalten; Integrat. binomischer Differentiale. Die Integrale von der Form $\int R(x, y)\, dx$, wo $y = \sqrt{a x^2 + 2 b x + c}$ ist. Integrat. durch Entwickl. in eine unendl. Reihe. Elliptische Integrale. Differentiation eines best. Integrals nach einer d. beid. Grenzen; Differentiation u. Integrat. nach e. Parameter. Die Eulerschen Integrale erster u. zweit. Gattung (Beta- u. Gammafunkt.) Berechn. d. Inhalts ebener Flächenstücke (Quadratur). Mittelwertsätze. Mittelwert e. Funktion in einem gew. Interwalle. Berechn. d. Bogenlänge v. Kurven (Rektifikation), Volumen u. Oberfläche v. Rotationskörpern. Doppelintegrale, dreif. Integrale u. Berechn. d. Volumens v. Körpern (Kubatur). Bestimmung d. Inhalts gekrümmter Flächenstücke (Komplanation). Bestimmung d. Masse nicht homogener gem. Gebilde; Massenmittelpunkt (Schwerpunkt). Bestimmung v. Trägheitsmomenten. Anwend. d. Integralrechnung in d. Potentialtheorie.

Einstein, Albert, & Grossman, Marcel, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation. — 38 pp. 8. M. 1: 20 geh.

Physikalischer Teil von A. Einstein. Mathematischer Teil von M. Grossmann.

Fischer, Paul B., Anschauungsmittel im mathematischen Unterricht. Eine Zusammenstellung d. vorhandenen Lehrmittel im Rechnen, in der reinen u. angew. Mathematik. — 40 pp. 8. M. 1: 60 geh.

Grünbaum, Heinrich, Der mathematische Unterricht an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (Abhandl. üb. d. math. Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Int. Math. Unterrichtskommission, hrsg. von F. Klein, Bd 4: 1.) — XIV + 99 pp. 8. M. 2: 60 geh.

HILBERT, DAVID, Grundlagen der Geometrie. 4:e, durch Zusätze u. Literaturhinw. von neuem verm. u. mit 7 Anhängen vers. Aufl. (Wissenschaft und Hypothese VII.) — VI + 258 pp. 8. M. 6: — geb.

Die fünf Axiomgruppen. Die Widerspruchslosigkeit u. gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome. Die Lehre v. d. Proportionen. Die Lehre v. d. Flächeninhalten in der Ebene. Der Desarguessche Satz. Der Pascalsche Satz. Die geom. Konstruktionen auf Grund d. Axiome I—IV. Anhang I—VII.

IOANNIS VERNERI, De triangulis sphaericis libri quatuor. De meteoroscopiis libri sex cum prooemio Georgii Ioachimi Rhetici. II: De meteoroscopiis, hrsg. von Joseph Würschmidt unter Benutzung der Vorarbeiten von A. Björnbo. Mit einem Vorw. von Eilhard Wiedemann. 97 Fig. (Abhandlungen zur Geschichte der mathemat. Wissenschaften . . . begr. von Moritz Cantor. H. XXIV, 2.) — 260 pp. 8. M. 12: — geh.

KILLING, W., & HOVESTADT, H., Handbuch des mathematischen Unterrichts. Bd 2. — X + 472 pp. 8. M. 6: 80 geb.

Wissenschaftl. Begründung d. eb. Trigonometrie. Der erste Unterricht in d. eb. Trigonometrie. Trigonomet. Beweise geomet. Sätze. Benutzung d. Trigonometrie f. d. Lösung v. Konstruktionsaufgaben. Anwend. d. eb. Trigonometrie. Verknüpfungen im Raume. Die einfachst. Massbeziehungen im Raume. Die Kugelfläche u. ihre Beziehungen zu Punkten, Geraden u. Ebenen. Einführ. in d. Sphärik. Dreikante u. sphärische Dreiecke. Konvexe Vielkante u. sphärische Vielecke. Anwend. d. Stereometrie. Die wichtigsten Sätze üb. den Rauminhalt der Körper. Weitere Untersuchungen üb. d. Rauminhalt u. die Oberfläche v. Körpern. Das Cavalierische Prinzip. Der Eulersche Lehrsatz. Eigensch. d. regelmässigen Polyeder. Die regelmäss. Körper in ihrer Bezieh. zueinander. Elemente d. Kugelteilung. Die Grundformeln d. sphär. Trigonometrie. Die Berechn. d. sphär. Dreiecke. Anwend. d. sphär. Trigonometrie. Der Sinus u. d. Flächeninhalt eines sphär. Dreiecks. Die Radien d. In- u. der Umkreise e. sphär. Dreiecks u. seiner Nebendreiecke. Erweiterung d. Begriffes e. sphär. Dreiecks.

KLEIN, F., & BRENDEL, M., Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Heft 1: Über Gauss' zahlentheoretischen Arbeiten, von P. Bachmann. — 54 pp. 8. M. 2: — geh.

KNOBLAUCH, JOHANNES, Grundlagen der Differentialgeometrie. — X + 634 pp. 8. M. 18: — geh.; M. 20: — geb.

Einführung in die Theorie der Raumkurven. Grundbegriffe u. Grundformeln d. Flächentheorie. Die Normalkrümmung u. das Krümmungsmass. Grundformeln d. Theorie d. Tangentialkrümmung. Grundlagen d. Theorie der binären Differentialformen. Die drei Fundamentalgleichungen. Besondere Kurven u. Koordinatensysteme auf einer Fläche. — Die Einheitskugel. Einführ. in die Theorie d. Strahlensysteme. Geradlinige Flächen. Spez. Flächen, die mit einer gegebenen zusammenhängen. Aufgaben d. Biegungstheorie.

Allgem. Theorie d. Kurven u. Kurvennetze auf einer Fläche. Invarianten u. Kovarianten von gegebener Ordnung. Die Weingartenschen Gleichungen in der Theorie d. Strahlensysteme. Spez. Sätze u. Aufgaben der Flächentheorie.

Lietzmann, W., & Trier, V., Wo steckt der Fehler? Trugschlüsse und Schülerfehler. (Mathemat. Bibliothek, 10.) — 57 pp. 8. M. 0: 80 kart.

Math. Trugschlüsse: Einleit. Arithmetik u. Algebra. Geometrie. — Math. Schülerfehler: Einleit. Algebr. Gleichungen. Arithm. u. Algebra mit Ausnahme algebr. Gleich. Ebene Geometrie, Trigonometrie, Stereometrie u. analyt. Geom. der Ebene.

Lietzmann, W., Geck, E., & Cramer, H., Neue Erlasse in Bayern und Baden. Mit einem Schlusswort zu Bd II von A. Thaer. (Abhandlungen üb. d. math. Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Imuk, hrsg. von F. Klein, Bd II. H. 8.) — 49 pp. 8.

Vorbemerkung, von W. Lietzmann. Die Prüfungsordnung für das Lehramt an d. höh. Lehranstalten Bayerns vom 4. Sept. 1912, von W. Lietzmann. Der Lehrplanerlass für d. höh. Knabenschulen d. Königreichs Württemberg vom 27. Aug. 1912, von E. Geck. Die badischen Lehrpläne u. Prüfungsordn. für d. Realgymnasien u. Oberrealschulen vom 12. Juni 1912, von H. Cramer.

v. Lilienthal, R., Vorlesungen über Differentialgeometrie. Bd 2: 1. Flächentheorie. (B. G. Teubners Samml. v. Lehrbüchern auf d. Gebiete d. math. Wissenschaften . . . Bd XXVIII, 2.) — VII + 270 pp. 8. M. 12: — geh.; M. 13: — geb.

Allgem. Betrachtungen. Wichtige Flächenarten. Die Normalkrümmung d. Flächenkurven. Die geodätische Krümmung d. Flächenkurven.

Lorentz, H. A., Einstein, A., & Minkowski, H., Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen. Mit Anmerkungen von A. Sommerfeld und Vorwort von O. Blumenthal. (Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien, hrsg. von Otto Blumenthal. H. 2.) — 89 pp. 8. M. 3: — geh.; M. 3: 60 geb.

H. A. Lorentz: Der Interferenzversuch Michelsons. H. A. Lorentz: Elektromagnet. Erscheinungen in einem System, das sich mit beliebiger, die des Lichtes nicht erreichender Geschwindigkeit bewegt. A. Einstein: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. A. Einstein: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? H. Minkowski: Raum und Zeit. A. Sommerfeld: Anmerkungen zu Minkowski, Raum und Zeit. H. A. Lorentz: Das Relativitätsprinzip u. seine Anwend. auf einige besondere physikal. Erscheinungen.

Loria, Gino, Vorlesungen über darstellende Geometrie. Autorisierte, nach d. Italienischen Manuskript bearb. deutsche Ausgabe von Fritz Schütte. Teil 2: Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven u. Flächen. (B. G. Teubners Samml. v. Lehrbüchern auf d. Gebiete d. Math. Wissenschaften . . . Bd XXV, 2.) — XII + 294 pp. 8. M. 11: — geh.; M. 12: — geb.

Körperl. Ecken u. Polyeder: Das Dreiflach. Bemerk. üb. Polyeder im allgem. u. üb. einige spez. bemerkenswerte Polyeder. Die Darstellung d. Polyeder. Die Fundamentalaufgaben üb. Polyeder. — Ebene Kurven. Raumkurven im allgem. Untersuchung einiger spez. Raumkurven. — Allgemeines üb. die Flächen. Die Flächen 2. Ordnung. Kegel- u. Zylinderflächen. Regelflächen: Abwickelbare Flächen. Windschiefe Regelflächen. Die Rotationsflächen. Die Schraubenflächen.

Mansion, Paul, Abriss der Theorie der Hyperbelfunktionen nebst einer rein analytischen Theorie der Kreisfunktionen. Nach d. 3. franz. Aufl. übers. — 44 pp. 8. M. 1: 25 geh.

Mitzscherling, Arthur, Das Problem der Kreisteilung. Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Mit einem Vorw. von Heinrich Liebmann. Mit 210 Fig. — VI + 214 pp. 8. M. 7: — geh.; M. 8: 40 geb.

Historisches zur Konstruktion der Vielecke. Geom. Konstruktion d. Vielecke. Näherungskonstruktionen zur Kreisteilung. Instrumente zur Kreisteil. — Die Trisektion eines Winkels: Über die Möglichkeit d. Trisektion. Element. Trisektionsmethoden. Verwend. d. Kegelschnitte zur Trisekt. Verwend. von Kurven höh. Grades zur Trisektion. Näherungskonstruktionen zur Trisekt. Trisektionsinstrumente. — Die Polysektion eines Winkels: Polysektionskurven. Näherungskonstruktionen zur Polysektion. Polysektionsinstrumente.

Möhle, Fritz, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den preussischen Lyzeen, Oberlyzeen und Studienanstalten nach der Neuordnung von 1908. (Schriften d. deutschen Ausschusses für d. math. u. naturw. Unterricht, H. 15.) — 48 pp. 8.

Müller, Emil, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technischen Hochschulen. Bd 2, H. 1. — VII + 129 pp. 8. M. 4: 40 geh.

Darstellung von Punkten, Geraden u. Ebenen u. Lösung der sie betreffend. Grundaufgaben. Die Geländefläche u. die Lösung der sie betreffend. Aufgaben. Dachausmittlung. — Zeichnen normalachsonometrischer Bilder. Hauptsätze über Normalrisse recht winkliger Achsenkreuze. Lösung d. Grundaufgaben in normaler Achsonometrie krummflächiger Körper.

Neumann, Ernst Richard, Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie. (Preisschriften gekrönt u. herausg. von d. fürstl. Jablonowskischen Ges. zu Leipzig). — XX + 188 pp. 8. M. 11: — geh.

Vorbemerkungen. Grundlagen d. Untersuchung. Die Grunddoppelbelegung zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe d. Potentialtheorie. Die Grundrestbelegung zur Lösung d. ersten Randwertaufg. d. Potentialtheorie. Üb. die Methode d. reziproken Radien. Speziellere Untersuchungen an Kreis, Kugel u. Ellipse. Üb. die natürliche Belegung in d. Ebene.

ORLICH, ERNST, Die Theorie der Wechselströme. Mit 37 Fig. (Mathematisch-physik. Schriften für Ingenieure u. Studierende, hrsg. von E. Jahnke, 12.) 94 pp. 8. M. 2: 40.

Die einwelligen Ströme u. ihre fundamentalen Eigenschaften. Die mehrwelligen Ströme. Die Mehrphasenströme. Die Hauptwirkung bei Wechselströmen.

OTT, KARL, Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie. (Abhandlungen üb. d. math. Unterricht in Deutschland, veranl. durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd IV, H. 2.) — VI + 158 pp. 8. M. 4: —.

Allgem. Betracht. üb. Begrenzung, Stellung u. Methode d. Unterrichts in d. angewandt. Mathematik an d. mittl. techn. Fachschulen sowie üb. Ausbildung d. Lehrer u. Literatur. Die rechnerischen Methoden d. angew. Mathematik: Lehrpläne, Behandl. d. Unterrichtsstoffes, Vorbildung d. Schüler u. Prüfungen. Lehrbücher d. Mechanik f. mittl. techn. Fachschulen u. f. das Selbststudium d. Techniker. Die Behandl. d. Einzelprobleme m. besond. Berücksichtigung d. Lehrbücher. — Die graphischen Methoden d. angew. Mathematik: Stellung d. graph. Methoden im Lehrplan d. mittl. techn. Fachschulen. Die Behandl. d. Einzelprobl. Die darst. Geometrie.

PASCH, MORITZ, Vorlesungen über neuere Geometrie. 2., mit Zusätzen verseh. Ausgabe. — IV + 225 pp. 8. M. 6: — geh.; M. 7 — geb.

Von der geraden Linie. Von d. Ebenen. Vom Strahlenbüschel. Vom Ebenenbüschel. Vom Strahlenbündel. Ausgedehntere Anwend. des Wortes »Punkt». Ausged. Anwend. d. Wortes »Gerade». Ausged. Anwend. d. Wortes »Ebene». Ausged. Anwend. d. Wortes »zwischen». Perspektive Figuren. Harmonische Gebilde. Von d. Reziprozität. Von d. kongruenten Figuren. Ausdehnung d. Kongruenz auf beliebige Elemente. Herleitung einiger graphischen Sätze. Projektive einförm. Gebilde. Kollineare Fig. Reziproke Fig. Kongruente Fig. in der eigentl. Ebene. Die absoluten Polarsysteme. Doppelverhältnisse. Koordinaten. Die stetige Zahlenreihe in d. Geometrie. Zusätze. Ergänzungen.

SCHRÖDER, J., Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands, insbesondere Norddeutschlands. (Abhandl. üb. d. math. Unterricht in Deutschland veranlasst durch die Int. Math. Unterrichtskommission, hrsg. von F. Klein, Bd 1: 5.) — XII + 183 pp. 8. M. 6: —.

Einführende Angaben über die Entstehung u. Einrichtung höherer Mädchenschulen in Deutschland. Die Stellung u. Ausgestaltung des Unterrichts im Rechnen u. in der Mathematik an d. preussischen höh. Bildungsanstalten f. d. weibliche Jugend nach den Augustbestimmungen von 1908. Üb. den math. Unterricht an d. höh. Mädchenschulen in anderen deutschen Staaten.

SCHÜLKE, A., Vierstellige Logarithmen-Tafeln. 8 verb. Aufl. — VI + 22 pp. 8. M. 0: 90.

STAUDE, OTTO, Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte. Mit 58 Fig. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern . . . der mathematischen Wissenschaften . . ., Bd 38.) — VI + 242 pp. 8. M. 9: — geh.; M. 10: — geb.

Behandl. d. Raumkurve 3. Ordn. in recht- u. schiefwinkl. Koordinaten: Begriff d. kubischen Kegelschnittes u. Darst. in rechtwinkl. Koordinaten. Bestandteile d. kub. Kegelschnittes. Die Rotationsflächen d. kub. Kegelschnitte. Die einzelnen Arten d. kub. Kegelsnitte. — Behandl. d. Raumkurve 3. Ord. in Tetraederkoordinaten: Bestandteile d. Raumkurve 3. Ordn. Raumkurve 3. Ordn. u. Fläche 2. Ordn. Erzeugung u. Beziehung zwischen Punkten d. Raumkurve 3. Ord.

UMLAUF, KARL, Mathematik und Naturwissenschaften an den deutschen Lehrerbildungsanstalten. (Arbeiten d. Bundes f. Schulreform, 3.) — 124 pp. 8. M. 3: 60.

VOLKMANN, PAUL, Fragen des physikalischen Schulunterrichts. Vier Vorträge für den vom 7.—12. okt. 1912 in Königsberg i. Pr. abgeh. Oberlehrer-Ferienkursus . . . — XI + 65 pp. 8. M. 2: —.

VOLLPRECHT, HUGO, Das Rechnen. Eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Regeln u. Formen des Rechnens, Vergleiche m. d. allgem. Arithmetik u. Hinweise auf Geometrie u. Physik. Hilfs- u. Übungsbuch f. Lehrer u. Schüler d. mittleren u. unteren Klassen d. höheren Lehranstalten, d. Progymnasien u. Vorbereitungsschulen. — 48 pp. 8. M. 1: 80 geh.

VOSS, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede geh. am 11. März 1908 in d. öffentl. Sitz. d. K. Bayerischen Akad. d. Wiss. Erweitert u. mit Anmerk. vers. 2:e sorgf. durchges. u. verm. Aufl. — 119 pp. 8. M. 4: — geh.

Bedeut. d. Math. f. d. Entwickel. u. d. Verständniss unserer techn.-wiss. Kultur. Üb. das allgem. Verständniss f. d. Wesen u. d. Aufgaben der Math. Abriss der hist. Entwickel. d. Math. von der ältesten bis in die neuere Zeit. Die reine Math. als Wissenschaft von d. Zahlen. Die math. Erkenntniss des 19. Jahrhunderts. Die Anwendungsgebiete d. Math., Geometrie u. Mechanik. Die Axiomatik in d. Arithmetik. Der Fortschritt des math. Wissens. Objektiver Wert d. Math. Notwendigkeit gründl. math. Vorbildung, Reform d. math. Unterrichts. Schlusswort. Namen- u. Sachreg.

WEYL, HERMANN, Die Idee der Riemannschen Fläche. Mit 27 Fig. (Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen. H. 5.) — X + 170 pp. 8. M. 7: — geb.; M. 8: — geb.

Begriff u. Topologie d. Riemannschen Flächen: Weierstrass' Begriff d. analyt. Funktion. Begriff d. analyt. Gebildes. Verhältnis d. Begriffe »analyt. Funktion» u. »analyt. Gebilde» zueinander. Begriff d. Fläche. Beispiele v. Flächen. Analyt. Gebilde. als Flächen betrachtet. Begriff d. Riemannschen Fläche. Schlichtart. Flächen. Überlagerungsflächen. Einf. zusammenhäng. Flächen. Monodromiesatz u. Cauchyscher Integralsatz. Einseitigkeit u. Zweiseitigk. v. Flächen. Der Residuensatz. Integralfunkt.

Geschlechtszahl. Kanonische Zerschneid. — Funkt. auf Riemannschen Flächen: Das Dirichletsche Integral. Üb. das Poissonsche Integral. Ansatz z. Beweis d. Existenztheoreme. Aufstellung d. Elementardifferentiale. Beweis d. Dirichletschen Prinzips. Zusammenhänge zwischen d. Different. auf einer geschloss. Riemannschen Fläche. Die eindeut. Funktionen als Unterklasse d. additiven u. multiplikat. Funktionen. Riemann-Rochscher Satz u. Abelsches Theorem. D. algebr. Funtionenkörper. Uniformisierung. Riemannsche Flächen u. Nicht-Euklid. Bewegungsgruppen. Fundamentalbereiche. Poincarésche Θ-Reihen. Konf. Abbild. einer Riemannschen Fläche auf sich selbst.

Zühlke, Paul, Konstruktionen in begrenzter Ebene. (Mathemat. Bibliotek, 11.) — 40 pp. 8. M. 0: 80 kart.

Einleit. Unzugängl. Schnittpunkte v. zwei u. mehr Geraden. Halbierung e. Winkels m. unzugängl. Scheitel. Konstrukt. an Dreiecken u. Vielecken m. unzugängl. Eckpunkten. Aufgab. aus d. Kreislehre. Einiges üb. die Fachliteratur.

Verlag der K. K. Technischen Hochschule in Wien.

1912.

Müller, Emil, Das Abbildungsprinzip. Antrittsrede. Bericht über die feierliche Inauguration des für das Studienjahr 1912/13 gewählten Rektors . . . K. K. Technische Hochschule in Wien. — 61 pp. 8.

Washington Printing Office.

1912.

Smith, David Eugene, & Goldziher, Charles, Bibliography of the teaching of mathematics 1900—1912. (United States Bureau of Education, Bulletin, 1912, No 29, whole numb. 503.) — 95 pp. 8.

W. Versluys.

Amsterdam 1913.

Kempe, A., Der grosse Fermatsche Satz. Versuch einer Beweisführung. 2:e verb. Aufl. 22 pp. 8.

John Wiley & Sons.

New York 1912.

Merriman, Mansfield, Elements of hydraulics. A text-book for secondary technical schools. — VI + 156 pp. 8. \$ 1: —.

Hydrostatics. Theoretic hydraulics. Flow from orifices and tubes. Flow through pipes. Flow in conduits and rivers. Measurement of water. Hydraulic motors. Pumps and pumping.

Divers.

Year Book of the Michigan College of Mines. 1912—1913. Announcement of courses for 1913—14. — 130 pp. 8. Published by the College, June 1913.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM MAXIMALBETRAGE EINER ANALYTISCHEN FUNKTION UND DEM GRÖSSTEN GLIEDE DER ZUGEHÖRIGEN TAYLOR'SCHEN REIHE.

VON

A. WIMAN

in UPSALA.

Es bezeichne für $|z| = r$ $M(r)$ den Maximalbetrag einer analytischen Funktion $F(z)$, welche durch die TAYLOR'sche Entwickelung

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

dargestellt wird. Den grössten möglichen Betrag eines Gliedes in dieser Entwickelung bezeichnen wir mit $m(r)$, wenn $|z| = r$ einen gegebenen Wert hat, und $m(r)$ von keinem Betrag eines anderen Gliedes übertroffen wird. Ist $F(z)$ eine ganze transzendente Funktion, so folgt schon aus den Untersuchungen des Herrn BOREL,[1] dass für beliebig grosse r die Ungleichung

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon}$$

gültig ist, wobei ε eine beliebige positive Grösse bedeuten kann.

Dass man für spezielle Funktionen viel genauere Resultate erlangen kann, ersieht man aus dem Beispiele

$$M(r) = e^r = \sum_0^\infty \frac{r^n}{\Gamma(n+1)}$$

[1] *Leçons sur les fonctions entières*, S. 62 (Paris 1900). Man sehe auch BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs* (Paris 1902), woselbst mehr eingehend spezielle Fälle mit positiven Koeffizienten (auch mit endlichem Konvergenzradius) behandelt werden, sowie auch auf die einschlägigen Arbeiten der Herren APPELL, CESÀRO, HADAMARD und besonders LE ROY Bezug genommen wird.

Setzt man für das grösste Glied $n = r$, so bekommt man nach der STIRLING'schen Formel

$$m(r) = \frac{e^r}{\sqrt{2\pi r}}[1 + \varepsilon(r)].^1$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass, wie klein auch die positive Grösse δ genommen wird, es ein $r = r(\delta)$ gibt, dass für $r > r(\delta)$ die Ungleichung

$$M(r) < \sqrt{2\pi}\, m(r)\, [\log m(r)]^{\frac{1}{2}} (1 + \delta)$$

gültig bleibt. Ähnliche Resultate erhält man leicht bei Untersuchung anderer spezieller Funktionen. Auf Grund solcher Verhältnisse habe ich schon seit mehreren Jahren vermutet, dass bei jeder ganzen transzendenten Funktion für unendlich viele unbegrenzt wachsende r

$$(1) \qquad M(r) < m(r)\, [\log m(r)]^{\frac{1}{2} + \epsilon}$$

ist. Nach vergeblichen Versuchen ist es mir jetzt gelungen, diese Vermutung zu beweisen. Die dabei zu benutzende Metode lässt sich aber sofort auf allgemeinere analytische Funktionen ausdehnen, und es gibt auch Klassen von nicht ganzen Funktionen, für welche man fast ebenso scharfe Relationen wie (1) erhält. Für ganze Funktionen von endlicher Ordnung kann man (1) in analoger Weise präzisieren, wie wir eben bei der Exponentialfunktion gesehen haben. Aber auch für die ganzen Funktionen im Allgemeinen kann man (1) durch genauere Ungleichungen ersetzen, falls man $\log_2 m(r)$, $\log_3 m(r)$ u. s. w. einführt.

§ 1.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man bei diesen Untersuchungen sich auf Funktionen mit positiven Koeffizienten für eine reelle positive Variabele r beschränken. Ist der Konvergenzradius R endlich, so überführt man ihn durch eine leichte Transformation auf den Fall $R = 1$. Betrachtet man dann die Koeffizientenreihe

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots,$$

so kommen für uns eigentlich nur solche Fälle in Betracht, bei denen sich aus

---

[1] $\varepsilon(r)$ bedeutet eine Grösse, welche für $\lim r = \infty$ unendlich klein wird.

dieser Reihe eine monoton zunehmende Teilreihe herausnehmen lässt, so dass der Index n des grössten Gliedes für $\lim r = 1$ unendlich wird. Für ganze transzendente Funktionen und $\lim r = \infty$ liegt dies in der Natur der Sache. Die Rolle als grösstes Glied wird stets bei steigendem r von einem Terme zu einem anderen mit höherem Index übergehen. Dabei können offenbar Sprünge gemacht werden. Doch werden unsere Schlüsse in ihrer Allgemeinheit selbstverständlich nicht beeinträchtigt, falls wir die Terme, die nie grösste Glieder werden, in einer Weise erhöhen, dass nie ein solcher Term einen grösseren Betrag als alle übrigen bekommt; dagegen darf der Betrag, was doch nur für einen einzigen r-Wert möglich ist, eben so gross wie jeder andere werden. Nimmt man also an, dass zwei konsekutive grösste Glieder für $r = r$ einander gleich werden, so ist es zulässig, die zwischenliegenden Glieder in solcher Weise zu erhöhen, dass ihnen für $r = r$ ein gleicher Betrag wie den beiden äusseren erteilt wird.

Hiernach schreiben wir

$$M(r) = \sum_{0}^{\infty} m_n \left(\frac{r}{r_n}\right)^n, \tag{2}$$

wobei angenommen wird, dass für $r = r_n$ das n^{te} Glied als grösstes Glied betrachtet werden kann. Man hat also

$$r_n \leqq r_{n+1}, \quad m_n \leqq m_{n+1}, \quad m(r_n) = m_n. \tag{3}$$

Für ein wirkliches grösstes Glied lässt sich r_n in einem gewissen Intervalle beliebig auswählen, wobei man auch den etwa aus einer besonderen Problemstellung hervorgehenden Anforderungen Rechnung tragen kann. Für $r = r_{n-1}$ hat man

$$m_{n-1} \geqq m_n \left(\frac{r_{n-1}}{r_n}\right)^n$$

und für $r = r_n$

$$m_n \geqq m_{n-1} \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Hieraus ergibt sich

$$\left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-1} \leqq \frac{m_n}{m_{n-1}} \leqq \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^n.$$

Es lässt sich mithin schreiben

$$(4)\qquad \frac{m_n}{m_{n-1}} = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^{n-\varepsilon_n} \qquad (0 \leq \varepsilon_n \leq 1).$$

Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit unserer Resultate können wir $m_0 > 0$ setzen. Als einen besonderen Fall von (4) haben wir

$$(5)\qquad m_1 \geqq m_0.$$

Aus (4) erhält man jetzt, wenn man die Fälle $n, n-1, \ldots, 2, 1$ kombiniert

$$(6)\qquad \begin{gathered} m_n \geqq m_0 \prod_2^n \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{\nu-\varepsilon_\nu} \geqq \\ m_0 \prod_2^n \left(\frac{r_\nu}{r_{\nu-1}}\right)^{\nu-1} = m_0 \frac{r_n^{n-1}}{r_1 r_2 \ldots r_{n-1}}. \end{gathered}$$

Für eine allgemeine Funktion $F(z)$ mit nicht durchweg positiven Koeffizienten bekommt man hier nach einem bekannten Satze

$$(7)\qquad M(r) \geqq m_n \left(\frac{r}{r_n}\right)^n = m_0 \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

Es ist wohl kaum nötig besonders hervorzuheben, wie (7) der äusseren Gestalt nach mit dem bekannten wichtigen Theoreme des Herrn Jensen übereinstimmt, wo aber $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ die Beträge der Nullstellen bezeichnen.[1]

Jetzt zerlegen wir $M(r_n)$ in zwei Faktoren

$$(8)\qquad M(r_n) = M_n = m(r_n)\,\mu(r_n) = m_n \mu_n.$$

Wir bekommen alsdann

$$(9)\qquad \mu_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_{n-\nu}}{m_n}\left(\frac{r_n}{r_{n-\nu}}\right)^{n-\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m_{n+\nu}}{m_n}\left(\frac{r_n}{r_{n+\nu}}\right)^{n+\nu}.$$

Nach einer Umformung, bei welcher (4) benutzt wird, ergibt sich

$$(10)\qquad \mu_n = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \prod_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{r_{n-\nu+k}}{r_{n-\nu+k+1}}\right)^{k+1-\varepsilon_{n-\nu+k+1}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{\nu-1} \left(\frac{r_{n+\nu-k-1}}{r_{n+\nu-k}}\right)^{k+\varepsilon_{n-\nu+k}}.$$

[1] Diese Übereinstimmung bewährt sich offenbar noch, falls das konstante Glied von $F(z)$ verschwindet.

Da $1 - \varepsilon_{n-\nu+k+1}$ bez. $\varepsilon_{n-\nu+k} \geq 0$, erhalten wir hieraus

$$\mu_n \leq 3 + \sum_{\nu=2}^{n} \prod_{k=1}^{\nu-1} \left(\frac{r_{n-\nu+k}}{r_{n-\nu+k+1}}\right)^k + \sum_{\nu=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{\nu-1} \left(\frac{r_{n+\nu-k-1}}{r_{n+\nu-k}}\right)^k. \tag{11}$$

Letztere Relation schreibt sich etwas einfacher

$$\mu_n \leq 3 + \sum_{\nu=2}^{n} \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{r_{n-\nu+k}}{r_n} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{r_n}{r_{n+\nu-k}}. \tag{12}$$

Für die folgenden Entwicklungen bilden nun besonders (6), (8) und (12) die Grundlagen.

§ 2.

Die ganze Frage reduziert sich demnach auf die Eigenschaften des unendlichen Produktes, dessen allgemeines Glied $u_n = \frac{r_n}{r_{n-1}}$ ist. Der Konvergenzradius wird ersichtlich durch $\lim\limits_{n=\infty} r_n$ definiert. Für nicht ganze Funktionen konvergiert also das fragliche unendliche Produkt, und wir können in diesem Falle nach einer oben gemachten Bemerkung annehmen, dass $\lim\limits_{n=\infty} r_n = 1$.

Zunächst wollen wir aber den Fall der ganzen transzendenten Funktionen in Betracht nehmen, wo also $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$ und das Produkt divergiert, und zwar werden wir hier den Beweis erbringen, dass der Satz, welcher durch (1) ausgedrückt wird, sich als Folgerung aus dieser Divergenz herleiten lässt. Es genügt offenbar zu beweisen, dass für eine beliebige ganze Zahl ν man irgendwie ein $r > r_\nu$ bestimmen kann, so dass (1) befriedigt wird.

Es sei die reelle Zahl $\alpha - 1 > 0$, aber sonst beliebig klein. Dann konvergiert bekanntlich das unendliche Produkt

$$P = \prod_{1}^{\infty} (1 + n^{-\alpha}).$$

Als Teilprodrukt bezeichnen wir

$$P_\mu = \prod_{1}^{\mu} (1 + n^{-\alpha}). \tag{13}$$

Für $\mu = 1, 2, \ldots, \nu$ betrachten wir die Grössen

$$l_\mu = \frac{r_\mu}{P_\mu}. \tag{14}$$

Es gibt dann eine bestimmte Zahl λ_ν, so dass

$$\lambda_\nu \geqq l_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{15}$$

wo das untere Zeichen nicht ausgeschlossen ist. Nun ist die Frage, wie sich die Grössen $l_\mu = \frac{r_\mu}{P_\mu}$ für $\mu > \nu$ verhalten. Da $\lim\limits_{\mu=\infty} r_\mu = \infty$ und $\lim\limits_{\mu=\infty} P_\mu = P$, so erschliesst man, dass es ein erstes $\mu = n_1 > \nu$ geben muss, so dass $l_{n_1} \geqq \lambda_\nu$ ist, so wie auch ein letztes $\mu = n_2$, dass $l_{n_2-1} < \lambda_\nu$ ist. Man hat dann $n_2 \geqq n_1$ und für $\mu \geqq n_2$ $l_\mu \geqq \lambda_\nu$.

Wir wollen beweisen, dass es für $n_1 \leqq n \leqq n_2$ eine ganze Zahl n gibt, dass

$$m_n \geqq m_0 \frac{P_n^{n-1}}{P_1 P_2 \ldots P_{n-1}} \tag{16}$$

und

$$\mu_n \leqq 3 + \sum_{\nu=2}^{n} \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{P_{n-\nu+k}}{P_n} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \prod_{k=1}^{\nu-1} \frac{P_n}{P_{n+\nu-k}}. \tag{17}$$

Hierbei ist es hinreichend, wenn wir den Nachweis führen können, dass, wie man auch $\nu < n$ nimmt,

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_{n-k}}{r_n} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_{n-k}}{P_n}, \tag{18}$$

sowie für jede ganze Zahl $\nu > 0$

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \prod_{k=1}^{\nu} \frac{P_n}{P_{n+k}}. \tag{19}$$

Wir wollen versuchen, r_n hier in der Gestalt $\lambda_\nu P_n$ zu setzen. Dann hat man nämlich unmittelbar nach den Voraussetzungen

$$\frac{r_{n-k}}{r_n} \leqq \frac{P_{n-k}}{P_n} \qquad (n - k < n_1),$$

sowie auch

$$\frac{r_n}{r_{n+k}} \leqq \frac{P_n}{P_{n+k}} \qquad (n + k \geqq n_2).$$

Für $n = n_1$ liegt $\lambda_\nu P_{n_1}$ in dem zu r_{n_1} gehörigen Intervall. In derselben Weise verhält es sich für $n = n_2$. Hat man $n_1 = n_2$, was in regulären Fällen zu erwarten ist, so lassen sich mithin (18) und (19) unmittelbar für $n = n_1 = n_2$ befriedigen.

Ist dagegen $n_2 > n_1$, so kan man zuerst einen Versuch mit $n = n_1$ und $r_{n_1} = \lambda_\nu P_{n_1}$ machen. Werden hier nicht sämtliche Bedingungen (19) für $0 < \nu < n_2 - n_1$ erfüllt, so muss es eine erste Zahl $N = N_1$ geben, dass, wie man auch $r_{n_1+N_1}$ in dem zugehörigen Intervalle wählt,

(20) $$\prod_{k=1}^{N_1} \frac{r_{n_1}}{r_{n_1+k}} > \prod_{k=1}^{N_1} \frac{P_{n_1}}{P_{n_1+k}}.$$

Die neue Gestalt (20) der Relation für $N = N_1$ verlangt natürlich, dass $r_{n_1+N_1} < \lambda_\nu P_{n_1+N_1}$. Für $n_1 + N_1 < n < n_3$ mag man auch stets $r_n < \lambda_\nu P_n$ haben. Erst für $n = n_3$ sei es möglich $r_{n_3} \geq \lambda_\nu P_{n_3}$ zu wählen; offenbar ist dann das untere Zeichen nicht ausgeschlossen.

Wir untersuchen jetzt, in wie weit sämtliche Bedingungen (18) und (19) sich für $n = n_3$ und $r_{n_3} = \lambda_\nu P_{n_3}$ befriedigen lassen. Was erstens (18) anbelangt, so ist dies sicher der Fall. Für $n_3 - k > n_1 + N_1$ hat man

$$\frac{r_{n_3-k}}{r_{n_3}} < \frac{P_{n_3-k}}{P_{n_3}}.$$

Infolge des Umstandes, dass eine Relation von der Gestalt (20) nicht schon für $N < N_1$ auftreten darf, hat man

$$\prod_{k=0}^{m} \frac{r_{n_1+N_1-k}}{r_{n_1}} < \prod_{k=0}^{m} \frac{P_{n_1+N_1-k}}{P_{n_1}} \qquad (m = 0, 1, \ldots N_1).$$

Da

$$\frac{r_{n_1}}{r_{n_3}} \quad \frac{P_{n_1}}{P_{n_3}},$$

folgt hieraus

$$\prod_{k=0}^{m} \frac{r_{n_1+N_1-k}}{r_{n_3}} < \prod_{k=0}^{m} \frac{P_{n_1+N_1-k}}{P_{n_3}} \qquad (m = 0, 1, \ldots N_1).$$

Aus diesen Tatsachen folgt unmittelbar, dass den Ungleichungen (18) für $n = n_3$ Genüge geleistet wird.

Ist dasselbe noch nicht für (19) der Fall, so kann man in gleicher Weise,

wie wir soeben von n_1 zu n_3 aufstiegen, jetzt von n_3 ausgehend eine Zahl $n = n_4 > n_3$ konstruieren, wo auch sofort die Relationen (18) befriedigt werden. Zuletzt müssen dann auch (19) gelten. Das Verfahren bei der Aufsuchung der Zahlen $n_3, n_4, \ldots$ ist ja von der Art, dass man zu grösseren Zahlen als n_2 nicht gelangen kann, und, wenn nicht früher, so sind jedenfalls die Bedingungen (19) für $n = n_2$ erfüllt. Dasselbe gilt dann selbstverständlich von (16) und (17).

Nach Benutzung von (13) erhalten wir aus (16)

$$m_n \geqq m_0 \prod_{k=2}^{n} (1 + k^{-\alpha})^{k-1}. \tag{21}$$

Hieraus

$$\log m_n \geqq \log m_0 + \sum_{k=2}^{n} (k - 1) \log (1 + k^{-\alpha}). \tag{22}$$

Da

$$\log (1 + k^{-\alpha}) > \frac{k^{-\alpha}}{1 + k^{-\alpha}},$$

so ersieht man, dass (22) durch

$$\log m_n \geqq (1 - \varepsilon_n) \sum_{k=2}^{n} k^{1-\alpha}, \tag{23}$$

sich ersetzen lässt, wo man für ε_n eine beliebig kleine gegebene Grösse > 0 nehmen kann, falls die ganze Zahl ν, von welcher n abhängig ist, hinreichend gross gewählt wird. Hier lässt sich (23) durch die damit äquivalente

$$\log m_n \geqq (1 - \varepsilon_n) \frac{n^{2-\alpha}}{2 - \alpha} \tag{24}$$

ersetzen. Nimmt man $\varepsilon_n \leqq \alpha - 1$, so bekommt man endlich

$$\log m_n \geqq n^{2-\alpha}, \tag{25}$$

wo α eine beliebige reelle Zahl > 1 bezeichnen kann.

Aus (17) erhalten wir durch Ausführung

$$\mu_n \leqq 3 + \sum_{\nu_1=1}^{n-1} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} [1 + (n - \varkappa)^{-\alpha}]^{-(\nu_1-\varkappa)} + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} [1 + (n + \varkappa + 1)^{-\alpha}]^{-(\nu_1-\varkappa)}. \tag{26}$$

Für die erste Summe hat man

$$(27)\qquad \sum_{\nu_1=1}^{n-1}\prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1}[1+(n-\varkappa)^{-\alpha}]^{-(\nu_1-\varkappa)} < \sum_{\nu_1=1}^{n-1}(1+n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}} < \sum_{\nu_1=1}^{\infty}(1+n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}}.$$

Die Abschätzung der zweiten in (26) auftretenden Reihe ist etwas schwieriger. Wir wollen dieselbe in zwei Teile zerlegen, je nachdem $\nu_1 < N$ oder $\nu_1 \geq N$, wobei $N \leq n$ sein soll. Man hat dann

$$\prod_{\varkappa=0}^{N-1}[1+(n+\varkappa+1)^{-\alpha}]^{-(N-\varkappa)} < \prod_{\varkappa=0}^{N-1}[1+(2n)^{-\alpha}]^{-(N-\varkappa)} =$$

$$(28)\qquad = [1+(2n)^{-\alpha}]^{-\frac{N(N+1)}{2}} = e^{-\frac{N(N+1)}{2(2n)^{\alpha}}}(1+\delta_n),$$

wo δ_n für $\lim n=\infty$ verschwindend klein wird. Die Teilreihe, welche mit diesem Gliede anfängt, konvergiert offenbar rascher als eine geometrische Reihe mit dem Quotienten

$$[1+(2n)^{-\alpha}]^{-N}.$$

Die Summe dieser Teilreihe ist also

$$(29)\qquad \leq \frac{(1+\delta_n)\,e^{-\frac{N(N+1)}{2(2n)^{\alpha}}}}{1-[1+(2n)^{-\alpha}]^{-N}} = (1+\eta_n)\frac{(2n)^{\alpha}}{N}\,e^{-\frac{N(N+1)}{2(2n)^{\alpha}}},$$

wo $\lim\limits_{n=\infty}\eta_n=0$. Aber auch der ganze Ausdruck (29) wird für $\lim n=\infty$ verschwindend klein, wenn man nur, für $\alpha<\alpha_1<2$, $N>n^{\frac{\alpha_1}{2}}$ wählt.

Suchen wir das Verhältnis zwischen der noch übrigen Teilreihe, für welche $\nu_1<N$ ist, und der Reihe

$$\sum_{\nu_1=1}^{N-1}\prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1}(1+n^{-\alpha})^{-(\nu_1-\varkappa)} = \sum_{\nu_1=1}^{N-1}(1+n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}},$$

so ist ohne Schwierigkeit ersichtlich, dass dieses Verhältnis

$$< \left(\frac{1+(n+N)^{-\alpha}}{1+n^{-\alpha}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} = \left(1+\frac{n^{-\alpha}-(n+N)^{-\alpha}}{1+(n+N)^{-\alpha}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}} <$$

$$(30)\qquad < e^{\frac{N(N-1)}{2}[n^{-\alpha}-(n+N)^{-\alpha}]} < e^{\frac{\alpha N^2(N-1)}{2n^{\alpha+1}}}$$

Letzterer Ausdruck wird aber für $\lim n=\infty$ beliebig wenig von 1 verschieden.

falls $\frac{\alpha_1}{2} < \frac{\alpha + 1}{3}$ gewählt wird, was mit der früheren Bedingung $\alpha < \alpha_1 < 2$ verträglich ist.

Aus diesen Auseinandersetzungen ersieht man, dass (26) durch

$$(31) \qquad \mu_n \leq 3 + 2(1 + \varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} (1 + n^{-\alpha})^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}}$$

sich ersetzen lässt, wo für ε_n bei genügend grossem n eine beliebig kleine Grösse gesetzt werden kann. Da

$$\log(1 + n^{-\alpha}) > \frac{n^{-\alpha}}{1 + n^{-\alpha}} = \frac{1}{n^\alpha + 1},$$

so bekommt man jetzt

$$(32) \qquad \mu_n \leq 3 + 2(1 + \varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2(n^\alpha+1)}}.$$

Es ist aber

$$(33) \qquad 2 \sum_{\nu_1=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2(n^\alpha+1)}} < \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(n^\alpha+1)}} dx = \sqrt{2\pi(n^\alpha + 1)}.$$

Mithin hätten wir

$$(34) \qquad \mu_n \leq 3 + 2(1 + \varepsilon_n)\sqrt{2\pi n^\alpha};$$

da aber dies auch, wenn α durch eine Zahl α_2 ersetzt wird, wo $\alpha > \alpha_2 > 1$, gilt, so darf man (34) durch

$$(35) \qquad \mu_n \leq n^{\frac{\alpha}{2}}$$

ersetzen. Aus (25) und (35) ergibt sich nun

$$(36) \qquad \mu_n \leq [\log m_n]^{\frac{\alpha}{2(2-\alpha)}}.$$

Da

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha)} = \frac{1}{2} + \frac{\alpha - 1}{2 - \alpha},$$

und $\alpha - 1$ beliebig klein genommen werden kann, so sind (1) und (36) mit einander äquivalent. Die Aufgabe, welche wir uns zunächst gestellt haben, ist demnach gelöst.

§ 3.

Statt des unendlichen Produktes P hätten wir ein beliebiges konvergentes Produkt benutzen können. Je langsamer man das Produkt konvergieren lässt, mit einer um so schärferen Relation wird dann (1) ersetzt. So z. B., um einzusehen, dass es erlaubt ist für (1) die genauere Relation

$$(1') \qquad M(r) < m(r) \, [\log m(r)]^{\frac{1}{2}} \, [\log_2 m(r)]^{1+\epsilon}$$

einzuführen, brauchen wir nur von dem Produkt

$$P_1 = \prod_2^\infty \left(1 + \frac{1}{n (\log n)^a}\right) \qquad (a > 1)$$

auszugehen.

Beschränkt man sich auf besondere Klassen ganzer Funktionen, kann man sogar als Hilfsprodukt P ein *divergentes* Produkt nehmen. Das wesentliche bei den Auseinandersetzungen im vorigen Paragraphen war ja nur, dass zu jeder gegebenen Zahl ν eine Zahl N sich so bestimmen lässt, dass für $n > N$

$$\frac{r_n}{r_\mu} > \frac{P_n}{P_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \dots \nu).$$

Für die *ganzen Funktionen endlicher Ordnung* ϱ wird hier das Resultat ganz besonders einfach. Ist $\varrho_1 > \varrho$, so bekommt man nämlich

$$(37) \qquad M(r) < \varrho_1 \sqrt{2\pi} \, m(r) \, [\log m(r)]^{\frac{1}{2}},$$

was eine sehr wesentliche Verschärfung von (1) darstellt. Wie äusserst genau diese Ungleichung (37) ist, ersieht man daraus, dass es in ihr nicht zulässig ist die Zahl $\varrho_1 \leq \varrho$ zu nehmen, wie schon aus dem in der Einleitung behandelten Beispiel der Exponentialfunktion hervorgehen dürfte.

Wir setzen $\varrho < \varrho_2 < \varrho_3 < \varrho_1$. Es sei

$$f(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu$$

eine ganze Funktion von der Ordnung ϱ mit reellen positiven Koeffizienten. Nach einem bekannten Satze hat man, falls n genügend gross gewählt wird,

$$(38) \qquad c_n < n^{-\frac{n}{\varrho_2}}.$$

Beziehen wir uns jetzt auf die Darstellung (2), so erhalten wir auch

$$(39) \qquad \frac{m_n}{r_n^n} < n^{-\frac{n}{\varrho_2}},$$

da bei der dort etwa stattgefundenen Änderung der ursprünglichen Koeffizienten c_n die Ordnung ϱ selbstverständlich nicht erhöht werden kann. Nun ist m_n eine mit n ins Unendliche wachsende Grösse. Man bekommt also aus (39)

$$(40) \qquad r_n > n^{\frac{1}{\varrho_2}}.$$

Für P lässt sich jetzt ein divergentes Produkt wählen, so dass

$$(41) \qquad P_n = n^{\frac{1}{\varrho_3}}.$$

Es wird ja dann

$$\frac{r_n}{P_n} > n^{\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_3}},$$

also auch

$$\frac{r_n}{P_n} \geq \frac{r_\mu}{P_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \nu),$$

wenn n genügend gross ist. Wir bekommen also nach der im vorigen Paragraphen dargelegten Methode

$$(42) \qquad m_n > m_0 \frac{P_n^{n-1}}{P_1 P_2 \ldots P_{n-1}} = m_0 \frac{n^{\frac{n}{\varrho_3}}}{(\lfloor n)^{\frac{1}{\varrho_3}}} = m_0 \frac{e^{\frac{n}{\varrho_3}}}{[\sqrt{2\pi n}\,(1+\varepsilon_n)]^{\frac{1}{\varrho_3}}} > e^{\frac{n}{\varrho_1}},$$

woraus dann folgt

$$(43) \qquad \log m_n > \frac{n}{\varrho_1}.$$

Da

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{\varrho_3}} > 1 + \frac{1}{\varrho_3 n},$$

so lässt sich in diesem speziellen Falle (26) durch

$$\mu_n < 3 + \sum_{\nu_1=1}^{n-1} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} \left[1 + \frac{1}{\varrho_3 (n - \varkappa)}\right]^{-(\nu_1-\varkappa)} + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \prod_{\varkappa=0}^{\nu_1-1} \left[1 + \frac{1}{\varrho_3 (n + \varkappa + 1)}\right]^{-(\nu_1-\varkappa)} \tag{44}$$

ersetzen. Es ist unmittelbar einleuchtend, dass (44) sich nach denselben Prinzipien vereinfachen lässt wie (26). Es ergibt sich mithin in Analogie mit (31), (32), (33) und (34)

$$\begin{aligned} \mu_n &\leq 3 + 2(1 + \varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varrho_3 n}\right)^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2}} < 3 + 2(1 + \varepsilon_n) \sum_{\nu_1=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu_1(\nu_1+1)}{2(\varrho_3 n + 1)}} < \\ &< 3 + (1 + \varepsilon_n) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(\varrho_3 n + 1)}} dx = 3 + (1 + \varepsilon_n) \sqrt{2\pi(\varrho_3 n + 1)}. \end{aligned} \tag{45}$$

Da $\varrho_1 > \varrho_3$, folgt hieraus, wenn n grösser als eine gewisse Zahl N ist,

$$\mu_n < \sqrt{2\pi \varrho_1 n}. \tag{46}$$

Aus (43) und (46) bekommt man

$$\mu_n < \varrho_1 \sqrt{2\pi} [\log m_n]^{\frac{1}{2}} \tag{47}$$

oder den in (37) enthaltenen Satz, welchen wir zu beweisen haben.

Hat man anderseits für eine spezielle Funktion von der Ordnung ϱ

$$\mu(r) < \sqrt{2\pi} \,.\, \sigma [\log m(r)]^{\frac{1}{2}} \qquad (\sigma < \varrho),$$

so darf man vielleicht erwarten, besonders wenn $\sigma < 1$ ist, dass die Funktion gewisse Eigenschaften mit einer ganzen Funktion, deren Ordnung nicht grösser als σ ist, gemein haben muss.

Hat man für die Funktion noch genauere Festsetzungen als die Ordnung ϱ, so lassen sich die oben erhaltenen Resultate präzisieren. Weiss man z. B. von vornherein, dass

$$M(r) = e^{\varepsilon(r) r^{\varrho}},$$

wo $\lim_{r=\infty} \varepsilon(r) = 0$, so ist ja dies damit äquivalent, dass für $\lim_{n=\infty} \varepsilon(n) = 0$

$$c_n = \left(\frac{n}{\varepsilon(n)}\right)^{-\frac{n}{\varrho}}$$

gesetzt werden kann. Es wird dann möglich (40) durch eine Relation

$$(40') \qquad r_n > \frac{n^{\frac{1}{\varrho}}}{\alpha(n)}$$

von der Art, dass $\lim_{n=\infty} \alpha(n) = 0$ ist, zu ersetzen. Für die Folge P_n kann man jetzt

$$(41') \qquad P_n = n^{\frac{1}{\varrho}}$$

wählen. Es lässt sich nun, jedenfalls wenn gewisse Bedingungen für die Folge $\alpha(n)$ erfüllt sind, eine schärfere Ungleichung als (37), nämlich

$$(37') \qquad M(r) < \varrho \sqrt{2\pi}\, m(r) [\log m(r)]^{\frac{1}{2}}$$

herleiten. Dies trifft z. B. zu, falls ϱ eine ganze Zahl p ist und die Höhe der Funktion $= p - 1$ ist. Für eine ganze Funktion von der Höhe Null ergibt sich also

$$M(r) < \sqrt{2\pi}\, m(r) [\log m(r)]^{\frac{1}{2}}.$$

Der fragliche Beweis dürfte doch kaum ohne ziemlich umständliche Rechnungen ausgeführt werden können, weshalb wir ihn hier unterlassen.[1]

§ 4.

Wir betrachten jetzt den Fall eines endlichen Konvergenzradius. Aus (4), (5) und (6) ersieht man, dass, falls nicht bloss das Produkt

$$\prod_1^\infty \frac{r_n}{r_{n-1}},$$

sondern auch

$$(48) \qquad \prod_1^\infty \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^n$$

konvergiert, das grösste Glied m_n stets endlich und begrenzt bleibt. In jedem

[1] Man vergleiche doch § 5.

solchen Falle lässt sich eine endliche Grösse C bestimmen, dass falls etwa der Konvergenzradius $= 1$ gesetzt wird,

$$M(r) < \frac{C}{1 - r}$$

wird.

In den Fällen, welche uns hier interessieren, soll also das Produkt (48) divergieren. Schreiben wir

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\varphi(n)}, \tag{49}$$

so divergiert mithin die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \frac{n}{\varphi(n)}. \tag{50}$$

Wenn von einem endlich bleibenden Faktor abgesehen wird, erhält man für m_n

$$e^{\sum_1^n \frac{\nu}{\varphi(\nu)}}, \tag{51}$$

woraus unmittelbar

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n \frac{\nu}{\varphi(\nu)}}{\log m_n} = 1. \tag{52}$$

Hat man hier insbesondere für $1 < a < 2$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^a} = 0, \tag{53}$$

so kann man wie in § 2 ein Vergleichsprodukt

$$P = \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^a}\right)$$

einführen, welches ja rascher als das Produkt mit dem allgemeinen Gliede (49) konvergiert. In diesem Falle besagt (52), dass

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log m_n}{\sum\limits_1^n \nu^{1-a}} = \infty$$

ist, woraus sich sofort

$$(54) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log m_n}{n^{2-a}} = \infty$$

folgern lässt. Wird nun μ_n mit Benutzung von (17) abgeschätzt, so bekommt man nach Rechnungen, welche sich genau wie in § 2 ausführen lassen,

$$\mu_n < [\log m_n]^{\frac{a}{2(2-a)}}.$$

Dieses Ergebnis ist mit

$$(55) \qquad M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{a}{2(2-a)}}$$

äquivalent. *Für gewisse Klassen nicht ganzer Funktionen ist somit die Relation zwischen dem Maximalbetrage und dem grössten Gliede von ganz analoger Art mit derjenigen, welche wir in § 2 für die ganzen Funktionen hergeleitet haben.*

Was für ein Bewandtnis hat es jetzt mit den Grössenverhältnissen der Koeffizienten dieser Funktionen? Bei Bezugnahme auf (53) bekommt man für r_n, wenn zunächst ein unwesentlicher Faktor weggelassen wird,

$$(56) \qquad e^{-\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{g(n)}} < e^{-\frac{1}{a-1} n^{-(a-1)}}.$$

Nach (7) ist der bestimmende Faktor in dem Koeffizienten c_n von r^n

$$(57) \qquad \frac{1}{r_1 r_2 \ldots r_n} > e^{\frac{1}{a-1}\sum\limits_1^n n^{-(a-1)}} > e^{\frac{1}{(a-1)(2-a)}(n^{2-a}-1)} > e^{n^{2-a}}.$$

Hiernach ersieht man, dass die Voraussetzung, welche uns zu dem durch (55) ausgedrückten Resultate geführt hat, die Bedingung

$$(58) \qquad c_n > e^{n^{2-a}}$$

involviert.

Anderseits bekommt man aus (54) und (56) ein Ergebnis für die Grössenordnung von $m(r)$. Nach (56) darf man zunächst

$$1 - r_n > n^{-(a-1)}$$

setzen. Es ergibt sich dann aus (54)

$$m(r) > e^{\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{2-a}{a-1}}} \tag{59}$$

Bei speziellen Funktionen ist es möglich genauere Resultate zu ermitteln. Betrachten wir z. B. die Funktion

$$\sum_0^\infty e^{n^a} r^n = \sum_0^\infty c_n r^n \qquad (0 < a < 1). \tag{60}$$

Hier lässt sich r_n durch Derivation des n^{ten} Gliedes nach n bestimmen:

$$\log r_n + a\, n^{a-1} = 0; \quad r_n = e^{-a n^{-(1-a)}}.$$

Durch Einsetzung in $e^{n^a} r_n^n$ bekommt man sofort[1]

$$m_n = e^{(1-a) n^a}. \tag{61}$$

Wir erhalten weiter

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} = e^{-a\left[n^{-(1-a)} - (n-1)^{-(1-a)}\right]} > 1 + \frac{a(1-a)}{n^{2-a}}. \tag{62}$$

Hier brauchen wir bei Berechnung von μ_n kein Hilfsprodukt P einzuführen. Nach ganz analogen Rechnungen mit denen, welche wir in § 2 ausgeführt haben, ergibt sich für μ_n

$$\sqrt{\frac{2\pi}{a(1-a)}}\, n^{1-\frac{a}{2}}, \tag{63}$$

wobei freilich von einem gegen 1 konvergierenden Faktor abgesehen wird. Drückt man (63) durch $\log m_n$ aus, so bekommt man

$$\sqrt{\frac{2\pi}{a^{2}(1-a)^{a}}}\,(\log m_n)^{\frac{2-a}{2a}}. \tag{64}$$

[1] BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, S. 70

Wir haben also

$$(65) \qquad M(r) < m(r)\,[\log m(r)]^{\frac{2-a}{2\cdot a}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{1}{2}}\,(1-a)^{\frac{1}{a}}}\,(1+\varepsilon),$$

wo ε eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet.

Wir betrachten noch die Funktion

$$(66) \qquad M(r) = \sum n^k r^n \qquad (k > 0).$$

Nach Untersuchungen von Herrn Appell und Cesàro weiss man, dass

$$(67) \qquad \lim_{r=1} \frac{M(r)}{\dfrac{1}{(1-r)^{k+1}}} = \Gamma(k+1)$$

ist. Anderseits darf man setzen

$$\log r_n + \frac{k}{n} = 0;\ r_n = e^{-\frac{k}{n}};\ \frac{n}{k} = \frac{1}{\log \dfrac{1}{r_n}} = \frac{1}{\log\left(1 + \dfrac{1-r_n}{r_n}\right)} > \frac{r_n}{1-r_n}.$$

Mithin

$$(68) \qquad m_n = \left(\frac{n}{e}\right)^k > \left(\frac{k}{e} \cdot \frac{r_n}{1-r_n}\right)^k.$$

Nach (67) und (68) erhält man, von einem unwesentlichen Faktor abgesehen, für μ_n

$$\Gamma(k+1)\left(\frac{e}{k\,r_n}\right)^k \cdot \frac{1}{1-r_n}.$$

Man ersieht hieraus, dass es in diesem Falle eine von k abhängige konstante Grösse K gibt, so dass man für $\lim r = 1$

$$(69) \qquad \mu(r) < K\,[m(r)]^{\frac{1}{k}}$$

erhält. Hier ist also $\mu(r)$ mit einer Potenz von $m(r)$ vergleichbar, nicht, wie in den früheren Fällen, erst mit einer Potenz von $\log m(r)$.

§ 5.

Zuletzt wollen wir ein allgemeines Prinzip aufstellen, wonach, falls für eine Hilfsfunktion mit bekannten Eigenschaften

(70) $$\sum_0^{\infty} \gamma_n r^n$$

eine Relation

(71) $$M(r) < m(r)\,\varphi[m(r)]$$

von einem gewissen n an in solcher Weise erfüllt wird, dass jedes Glied der Reihe die Rolle als grösstes Glied der Ordnung nach übernimmt, man für eine andere Funktion

(72) $$\sum_0^{\infty} c_n r^n,$$

wenn gewisse Bedingungen befriedigt sind, eine mindestens eben so scharfe Relation wie (71) erhalten kann, welche für beliebig grosse Indices n gültig ist. Bei ganzen Funktionen genügt es in der Tat, falls

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{\gamma_n} = 0,$$

und bei endlichem Konvergenzradius, falls

(73) $$\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{\gamma_n} = \infty.$$ [1]

Da der Beweis in den beiden Fällen in ganz analoger Weise ausgeführt werden kann, brauchen wir hier nur den Fall, wo der Konvergenzradius = 1 ist, zu behandeln. Für die Hilfsfunktion sei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n, \ldots$ eine Folge von r-Werten, für welche bez. $\gamma_1 r, \gamma_2 r^2, \ldots \gamma_n r^n \ldots$ die grössten Glieder darstellen. Für (72) möge die gewöhnliche Bezeichnung $r_1, r_2, \ldots r_n \ldots$ beibehalten werden. Wir behaupten zuerst, dass es beliebig grosse n gibt, für welche man durchweg

[1] Der Satz lässt sich sehr leicht auf solche Fälle erweitern, wo die fragliche obere Unbestimmtheitsgrenze endlich (und nicht Null bez. für ganze Funktionen ∞) ist.

(74) $$\prod_{k=0}^{\nu} r_{n-k} < \prod_{k=0}^{\nu} \varrho_{n-k} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

annehmen kann. Nach § 1 gehört r_n zu einem Intervalle

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} < r_n < \frac{c_n}{c_{n+1}},$$

und in gleicher Weise verhält es sich mit ϱ_n. Von wesentlicher Bedeutung ist es nicht, welche Werte wir in den bezüglichen Intervallen feststellen. Wir dürfen also schreiben

$$r_\nu = \frac{c_{\nu-1}}{c_\nu}; \quad \varrho_\nu = \frac{\gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu}.$$

Hierdurch wird aber (74) durch

(75) $$\frac{c_{n-\nu}}{c_n} < \frac{\gamma_{n-\nu}}{\gamma_n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

ersetzt. Dass es für (75) eine Lösung für $n > n_1$ gibt, wo n_1 beliebig genommen wird, ist in der folgenden Weise ersichtlich. Es lässt sich eine Zahl l_{n_1} ermitteln, so dass man

$$\frac{c_m}{\gamma_m} < l_{n_1} \qquad (m < n_1)$$

bekommt. Nach (73) gibt es offenbar für $n > n_1$ Fälle, wo das betreffende Verhältnis $> l_{n_1}$ wird. Trifft dies das erste Mal für $n = n_2$ zu, so ersieht man ohne weiteres, dass, falls $n = n_2$ gesetzt wird, (74) und (75) befriedigt werden.

Wir wollen weiter nachweisen, dass es beliebig grosse n gibt, für welche sämtliche Relationen

(76) $$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n-k}} > \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\varrho_n}{\varrho_{n-k}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1)$$

gültig sind. Der Beweis ist erbracht, falls unter der Annahme, dass (76) für $n = n_2$ nicht befriedigt wird, eine grössere Zahl $n = n_2 + \varkappa$ mit der gewünschten Eigenschaft sich konstruieren lässt. Da $\lim\limits_{\varkappa=\infty} r_{n_2+\varkappa} = \lim\limits_{\varkappa=\infty} \varrho_{n_2+\varkappa} = 1$ ist, so muss es mit Rücksicht auf (74) eine erste Zahl $\varkappa$ geben, für welche

$$\prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_{n_2+\varkappa}}{r_{n_2-k}} > \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\varrho_{n_2+\varkappa}}{\varrho_{n_2-k}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n-1).$$

Für diese Zahl $n = n_2 + \varkappa$ müssen dann auch die Bedingungen (76) erfüllt sein. Denn für $0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa$ muss man stets

$$\frac{r_{n_2+\varkappa}}{r_{n_2+\varkappa_1}} > \frac{\varrho_{n_2+\varkappa}}{\varrho_{n_2+\varkappa_1}}$$

haben, weil anderenfalls nicht $n_2 + \varkappa$ die erste Zahl mit der oben angenommenen Eigenschaft wäre. Man sieht auch ein, eben auf Grund von (74), dass man

$$r_{n_2+\varkappa} < \varrho_{n_2+\varkappa}$$

haben muss, da ja diese Grössen als kontinuierlich veränderlich angesehen werden können, nur mit Änderung der Indices bei der gleichzeitigen Überspringung der die Intervalle begrenzenden Punkte.

Wir schreiben $n_2 + \varkappa = n_3$. Man erschliesst jetzt, dass, falls λ hinreichend gross ist,

$$\frac{r_{n_3+\lambda}}{r_{n_3}} > \frac{\varrho_{n_3+\lambda}}{\varrho_{n_3}}$$

ist. Die bezüglichen Grenzwerte für $\lim \lambda = \infty$ sind ja $= \frac{1}{r_{n_3}}$ bez. $\frac{1}{\varrho_{n_3}}$, und wir hatten eben $r_{n_3} < \varrho_{n_3}$. Da weiter den Ungleichungen (74) für $n = n_3$ genügt wird, so kann man in ganz derselben Weise wie in § 2 eine Zahl $n = n_4 \geqq n_3$ bestimmen, für welche nicht bloss (74), sondern auch

$$(77) \qquad \prod_{k=1}^{\nu} \frac{r_n}{r_{n+k}} < \prod_{k=1}^{\nu} \frac{\varrho_n}{\varrho_{n+k}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

befriedigt wird, wobei statt P_n die Folge ϱ_n tritt.

Solcher Zahlen $n = n_4$ können wir offenbar in unendlicher Menge konstruieren. Betrachtet man nun die in § 1 gegebenen zu den durch die Reihen (72) und (70) definierten Funktionen gehörigen Entwicklungen von $m(r_{n_4})$ und $\mu(r_{n_4})$, so ergibt sich, dass für die frühere Funktion $m(r_n)$ grösser ausfällt, während dagegen betreffend $\mu(r_n)$ das umgekehrte Verhältnis eintritt. Hiermit ist aber die Behauptung, mit welcher wir diesen Paragraphen eröffneten, bewiesen.

Einige Beispiele mögen die Bedeutung des soeben gewonnenen Resultates beleuchten. Dabei handelt es sich selbstverständlich um Relationen, welche

nicht durchweg gültig zu sein brauchen, sondern nur für eine unendliche Menge mit dem Grenzwert $r = 1$.

1) $c_n = \chi(n)\, e^{n^a}$. $(1 > a > 0;\ \lim\limits_{n=\infty} \chi(n) = \infty)$. Als Vergleichsfunktion kann man (60) benutzen und gelangt also zu der Relation (65).

2) $c_n = \chi(n)\,.\,n^k$. Vergleicht man mit (66), so resultiert (69).

3) Hat man insbesondere

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log c_n}{\log n} = \infty, \tag{78}$$

so bekommt man Gültigkeit für (69) bei beliebig grossem k; das heisst mit anderen Worten für

$$M(r) < [m(r)]^{1+\varepsilon}, \tag{79}$$

wie auch die Zahl $\varepsilon > 0$ gewählt wird.

Überhaupt ist es durch die obigen Erörterungen klargelegt, dass die Durchrechnung geeigneter spezieller Beispiele Licht über ganze Klassen von Funktionen zu bringen vermag.

SUR LES SÉRIES DE FACULTÉS.

PAR

N. E. NÖRLUND

à LUND.

Introduction.

Par une série de facultés on entend une série de l'une des deux formes suivantes:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{1}$$

$$W(x) = a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-s)}{s!}, \tag{1 bis}$$

où les a_s sont indépendants de x. Comme l'a fait remarquer M. JENSEN[1] le domaine de convergence de ces séries est un demi-plan, limité à gauche par une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et coupant celui-ci dans un certain point λ, dit l'abscisse de convergence.[2] Elles représentent des fonctions analytiques, holomorphes à l'intérieur de ce domaine en exceptant, pour les séries de la forme (1), les points $0, -1, -2, \ldots$ qui sont des pôles ou des points réguliers de la fonction $\Omega(x)$, s'ils sont situés à l'intérieur du domaine de convergence.

M. PINCHERLE a démontré que les séries de la forme (1 bis) ont l'inconvénient de pouvoir représenter zéro sans que tous les coefficients soient zéro. Quand une fonction admet un développement de la forme (1 bis) elle en admet donc une infinité. La représentation d'une fonction, par une série de la forme (1) est au contraire unique. Ce sont ces séries qui sont les plus intéressantes et

[1] Tidsskrift for Mathematik sér. 4, t. 5, p. 130, problème 451; voir aussi ser. 5, t. [illegible] p. [illegible]

[2] Si la série est convergente dans tout le plan, λ est égal à $-\infty$.

c'est exclusivement d'elles que nous allons nous occuper dans les pages suivantes. Leur importance résulte de ce fait qu'elles sont capables de représenter une fonction analytique dans un certain environ d'un point singulier; en effet, on peut toujours supposer que le point en question se trouve à l'infini. Posons $x = \sigma + i\tau$ et

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} + R_n(x);$$

soit $\varkappa$ un nombre positif plus grand que l'abscisse de convergence λ.

Nous allons démontrer que $|x^{n+1} R_n(x)|$ reste plus petit qu'une constante fixe dans le demi-plan $\sigma > \varkappa$. La série de facultés indique donc l'allure de la fonction $\Omega(x)$ avec autant d'approximation qu'on le veut quand la variable tend vers l'infini en restant à l'intérieur du domaine de convergence. Mais l'infini est en général un point singulier essentiel de la fonction $\Omega(x)$. (Elle peut être non-uniforme aux environs de $x = \infty$, et elle présente en général une infinité de points singuliers, ayant le point $x = \infty$ comme point limite.)

Il en résulte que la série de facultés est un instrument analytique, très utile quand il s'agit d'étudier une fonction analytique au voisinage d'un point singulier et d'en trouver une représentation analytique qui reste convergente quand on s'approche au point singulier en restant dans un certain angle; elle présente à ce point de vue des avantages considérables sur les séries de puissances, qui amènent, comme on sait, à des développements toujours divergents. Les points singuliers dont on peut ainsi aborder l'étude à l'aide de séries de facultés convergentes sont ceux qui se comportent à peu près comme des points réguliers quand on s'approche du point en question en restant à l'intérieur d'un certain angle.

Pour en citer un exemple où l'on réussît à caractériser la singularité non seulement dans un angle mais dans tout voisinage de l'infini, j'ai démontré,[1] à l'aide des résultats contenus dans ce Mémoire, que les solutions des équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels se représentent, quel que soit la variable x, par une somme de séries de facultés convergentes multipliées respectivement par certaines fonctions exponentielles. Ces séries indiquent complètement l'allure de la fonction, non seulement dans la partie finie du plan, mais aussi quand x tend vers l'infini en suivant une ligne quelconque. Si par exemple x tend vers l'infini le long d'un rayon vecteur en restant à l'intérieur d'un certain angle la partie principale de l'intégrale est formée d'une seule de ces séries à cause du facteur exponentiel, mais pour certaines valeurs de l'argument de x la partie principale passe brusquement d'une série à une autre. On voit donc que

[1] Voir ma Thèse: Bidrag til de lineære Differensligningers Theori. Copenhague 1910, et Mémoire qui paraitra dans ce journal.

ce sont des singularités d'une nature assez compliquée dont on peut aborder l'étude à l'aide de la série de facultés.

Mais la série de facultés peut rendre service dans des cas beaucoup plus compliqués encore. Il y a lieu de se demander d'une manière générale qu'elle est la classe de singularités la plus générale au voisinage desquelles on peut trouver un développement convergent de la forme (1), c'est à dire qu'elle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction donnée $\Omega(x)$ admette un développement de la forme (1). MM. Pincherle et Nielsen en ont déjà donné une reponse en démontrant que la condition nécessaire et suffisante c'est que la fonction $\Omega(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1} \varphi(t)\, dt,$$

$\varphi(t)$ étant une fonction analytique, holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1|=1$ et d'ordre fini sur ce cercle. Il faut admettre que ce n'est pas là une réponse très simple.

Mais il convient de se poser le problème d'une manière un peu différente. Remarquons d'abord que, si $\Omega(x)$ admet un développement de la forme (1) elle admet également un développement de la forme suivante:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{c_{s+1}\, s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)}, \tag{2}$$

ω étant un nombre positif plus grand que 1. Plus généralement, nous allons démontrer l'existence d'un nombre positif Θ tel que le développement (2) existe pour $\omega > \Theta$ mais non pour $\omega < \Theta$.

Pour $\omega = \Theta$ le développement peut exister ou non. Mais on ne peut pas, de la seule connaissance de quelques propriétés analytiques simples de $\Omega(x)$, prévoir si le développement converge pour $\omega = \Theta$ ou non; c'est un problème tout aussi difficile que celui de trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de Taylor converge sur son cercle de convergence, exprimée par des propriétés analytiques simples de la fonction qu'elle représente.

Il convient donc de se poser le problème de la manière suivante: Qu'elle est la classe des fonctions qui admettent un développement de la forme (2) pour des valeurs *convenablement* choisies de ω (c'est à dire en donnant à ω une valeur supérieure à Θ). Ainsi posé, il y a une réponse des plus intéressantes. Nous allons démontrer que cette classe de fonctions est la même[1] que celle qui donne naissance à des séries de puissances de la forme

[1] Comparez pourtant § 15.

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \cdots$$

qui sont divergentes mais absolument et uniformément sommables par la méthode exponentielle de M. É. Borel. Il y a, il est vrai, une infinité de fonctions qui donnent naissance à la même série; mais c'est la fonction que M. Borel attribue à cette série comme somme généralisée qui admet le développement (2). Notre problème se trouve ainsi mis en rapport avec une des questions les plus intéressantes de l'Analyse, à savoir le sens qu'il faut attribuer à une série divergente et la série de facultés en donne une réponse aussi simple qu'on puisse l'imaginer; il suffit en effet de transformer la série divergente en série de facultés, opération qui est toujours facile. Ou encore, si, par un calcul quelconque, on est amené à une série de puissances divergente mais absolument et uniformément sommable au sens de M. Borel, on aurait pu, en dirigeant convenablement le calcul, être amené à une série de facultés convergente au lieu de la série divergente.

On sait que H. Poincaré a réalisé un grand progrès dans l'étude des fonctions définies par certaines équations différentielles à l'aide des séries asymptotiques. De ce qu'on vient de dire on conclut qu'on aurait pu arriver au même but en se servant de séries de facultés *convergentes*, ce qui est peut-être plus satisfaisant pour l'esprit. Ces séries permettent donc de compléter les résultats de Poincaré sur un point qui n'est pas sans importance pour des applications ultérieures.[1]

On connaît le rôle important que joue, dans presque toutes les applications de la série de Taylor à la théorie des fonctions, le théorème de Cauchy d'après lequel le cercle de convergence est le plus grand cercle à l'intérieur duquel la fonction est holomorphe. Il y avait lieu de se demander s'il existe un théorème analogue pour les séries de facultés, c'est à dire si la droite de convergence $\sigma = \lambda$ est en quelque rapport simple avec les singularités de la fonction. On sait qu'il n'y a pas nécessairement de point singulier sur la droite de convergence. Pour savoir déterminer la droite de convergence il ne suffit donc pas de connaître l'affixe du point singulier dont l'abscisse est la plus grande, il faut encore avoir des renseignements sur la nature de la singularité à l'infini.

Nous démontrerons à cet égard le théorème suivant:

Supposons:

1°. Que la fonction $\Omega(x)$ admette un développement en séries de facultés de la forme (2), convergente pour des valeurs suffisamment grandes de σ.

2°. Qu'il existe un nombre positif l, tel que la fonction $\Omega(x)$ soit holo-

[1] M. Mittag-Leffler, dans son Cours 1909, a déjà attiré l'attention sur ce fait. M. Horn, dans deux Mémoires récents, a donné quelques indications sur le sujet. Voir: Journal für die reine und angewandte Mathematik t. 144, p. 167—189; Mathematische Annalen t. 71, p. 510—532.

morphe et bornée pour $\sigma > l + \varepsilon$, mais non dans la bande $l + \varepsilon > \sigma > l - \varepsilon$ quelque petit que soit le nombre positif ε.

L'abscisse de convergence de la série (2) est alors égal à l ou supérieur à l d'une quantité qui tend vers zéro, quand ω tend vers l'infini.

Il existe des séries de facultés pour lesquelles la limite inférieure l de l'abscisse de convergence n'est pas atteinte pour aucune valeur finie de ω.

Mais dans les cas ordinaires, tels que les solutions des équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels, l'abscisse de convergence est égale à l quand on donne à ω une valeur quelconque supérieure au nombre Θ dont il a été question plus haut.

Pour $\omega = \Theta$ l'abscisse de convergence λ est généralement supérieure à l et elle n'est pas, semble-t-il, en rapport avec des propriétés analytiques simples de la fonction $\Omega(x)$; rien ne distingue, en apparence, la bande $\lambda > \sigma > l$ du domaine de convergence. La fonction $\Omega(x)$ et toutes ses dérivées par rapport à $\frac{1}{x}$ tendent uniformément vers une limite quand x tend vers l'infini en restant dans le demi-plan $\sigma > l$.

La droite $\sigma = l$, au contraire, est une droite caractéristique pour la fonction $\Omega(x)$.

Deux cas pourront arriver.

1°. Il se trouve sur la droite $\sigma = l$ un point singulier à distance finie ou bien il se trouve dans la bande $l - \varepsilon < \sigma < l$ une infinité de points singuliers qui s'approchent indéfiniment de la droite $\sigma = l$ à mésure qu'on s'éloigne de l'axe des abscisses.

2°. La fonction $\Omega(x)$ est holomorphe pour $\sigma > l_1$, l_1 étant inférieur à l; la série cesse en ce cas de converger dans la bande $l_1 < \sigma < l$ parce que la fonction $\Omega(x)$ ne tend pas vers une limite quand x tend vers l'infini en restant dans cette bande; nous allons même démontrer qu'elle croît plus vite qu'une puissance quelconque de l'ordinat dans cette bande.

L'étude des séries de facultés remonte à Newton et Stirling. La relation étroite qu'il y a entre ces séries et les intégrales définies de la forme

$$\int_0^l e^{-xt} F(t)\, dt$$

a été remarquée, pour la première fois je crois, par Schlömilch.[1] On connaît le

[1] Über Facultätenreihen, Berichte über die Verhandlungen der K. Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-Physische Classe t. 11, 1859, p. 109—137.

Über die Entwickelung von Funktionen complexer Variablen in Fakultätenreihen, ibid t. 15, 1863, p. 58—62.

rôle important que joue ces intégrales dans différentes branches de l'Analyse, rappelons seulement les travaux de LAPLACE et d'ABEL, de POINCARÉ, de M. BOREL, de M. MITTAG-LEFFLER, de M. PHRAGMÉN et la généralisation intéressante de M. MITTAG-LEFFLER. M. PINCHERLE[1] a consacré un beau Mémoire à ces intégrales et leurs applications à divers questions d'Analyse entre autres les séries de facultés.

On doit à M. N. NIELSEN[2] la première étude systématique de la théorie des séries de facultés. Mais les démonstrations de M. NIELSEN manquent quelquefois de la rigueur et il y a de grandes réserves à faire à l'égard des théorèmes eux-mêmes. D'ailleurs on peut faire l'objection générale suivante à M. NIELSEN; ses démonstrations reposent essentiellement sur la considération de deux nombres λ et λ' dits nombres critiques, mais ces nombres n'existent pas en général; tous les résultats de M. NIELSEN concernent donc seulement la classe particulière de séries pour lesquelles ces nombres existent. Néanmoins les Mémoires de M. NIELSEN sont d'une importance considérable et je tiens à dire que la lecture de ces Mémoires m'a été très utile. Dans ce qui suit, nous traitons plusieurs des problèmes étudiés par M. NIELSEN.

La véritable base d'une théorie a été donné par M. LANDAU dans son Mémoire: Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen.[3] Au commencement du Chapitre II nous rappelons, pour la commodité du lecteur, ceux des résultats, démontrés par M. LANDAU, qui ont rapport avec ce Mémoire.

Dans le chapitre I j'énonce divers théorèmes auxiliaires dont j'ai à faire usage.

Dans le chapitre II j'étudie une transformation qui joue un rôle fondamental dans la théorie de la série de facultés et qui permet de prolonger analytiquement, dans un certain domaine, la fonction définie par la série; mais elle ne permet pas d'atteindre la droite $\sigma = l$ dont il a été question plus haut.

Dans le chapitre III je m'occupe d'une autre transformation qui est d'une

[1] Sur les fonctions déterminantes, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure sér. 3, t. 22, 1905, p. 9—68.

Voir aussi les Mémoires suivants de M. PINCHERLE relativement aux séries de facultés:

Sulle serie di fattoriali, Atti della R. Accad. dei Lincei, Rendiconti, serie 5ª, t. XI, sem. 1, 1902, p. 139—141 et p. 417—426. Sulla sviluppabilità di una funzioni in serie di fattoriali, ibid. t. 12, sem. 2, p. 336—343. Sulle funzioni meromorfe, ibid. p. 436—439. Sulle serie di fattoriali generalizzate, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 37, 1914, p. 379—390.

[2] Recherches sur les séries de factorielles, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure sér. 3, t. 19, 1902, p. 416—429.

Les séries de factorielles et les opérations fondamentales, Mathematische Annalen t. 59, 1904, p. 350—359.

Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig 1906, p. 237—299.

[3] Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München, t. 36, 1906, p. 151—218.

nature plus radicale, et qui consiste à remplacer la variable x par $\frac{x}{\omega}$, ω étant un nombre positif.

Dans le chapitre IV je démontre que cette transformation permet de prolonger analytiquement la fonction définie par la série jusqu'à la ligne $\sigma = l$. Dans le même chapitre j'étudie le rapport entre les séries de facultés et les séries de puissances divergentes.

L'utilité d'un instrument analytique tel que la série (1) dépend d'une part de sa faculté de représenter une fonction analytique dans des domaines aussi étendus que possible d'autre part de la facilité avec laquelle elle se prête aux opérations fondamentales de l'Analyse. La série de facultés est à cet égard presque aussi souple que la série de puissances. Elle se prête un peu moins facilement que celle-ci à la différentiation et l'intégration mais plus facilement à l'opération Δ et son inverse. Nous étudierons dans le dernier chapitre le problème de la multiplication de deux séries de facultés, et nous terminons avec quelques mots sur la différentiation d'une série de facultés. L'application des autres opérations fondamentales ne présente aucune difficulté.

CHAPITRE I.

§ 1. L'étude du domaine de convergence d'une série de facultés repose essentiellement sur la notion d'ordre d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence, introduite par M. HADAMARD[1] dans sa Thèse bien connue. Relativement à cet ordre M. HADAMARD a démontré un certain nombre de théorèmes qui nous seront très utiles. Pour la commodité du lecteur nous commencerons par rappeler ceux des résultats de M. HADAMARD, dont nous allons faire usage, en y joignant quelques remarques simples pour les adapter à notre but.

Soit $f(z)$ une fonction définie par une série de TAYLOR:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

à rayon de convergence 1. L'ordre k de $f(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ est d'après la définition de M. HADAMARD

[1] Journal de mathématiques sér. 4, t. 8 (1892), p. 154—186.

Voir aussi DARBOUX: Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de Mathématiques, 3e série, t. IV, p. 5—56 et p. 377—416, 1878.

E. FABRY: Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 140, 1905, p. 707—708, p. 1043—1045; t. 151, 1910, p. 922—925. Acta mathematica t. 36, 1912, p. 69—104.

P. DIENES: Leçons sur les singularités des fonctions analytiques. Paris 1913, p. 1—32.

$$k = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |n a_n|}{\log n}; \tag{3}$$

il en résulte qu'il existe un nombre positif N tel que

$$|a_n| < n^{k-1+\varepsilon}, \tag{4}$$

si $n > N$, quelque petit que soit le nombre positif ε, pendant que, pour une infinité de valeurs de n, on a

$$|a_n| > n^{k-1-\varepsilon}.$$

Pour arriver à la définition de l'ordre dans un point ou sur une partie du cercle de convergence on introduit la notion d'écart d'une fonction sur un arc de courbe. Si les intégrales

$$n\int_a^b \cos n\Theta f(e^{i\Theta})\,d\Theta, \qquad n\int_a^b \sin n\Theta f(e^{i\Theta})\,d\Theta$$

restent finies et moindres en valeurs absolues qu'un nombre fixe I quand n tend vers l'infini, a et b étant des limites quelconques intérieures à l'intervalle (α, β), la fonction $f(z)$ est dite à écart fini et égal à I sur l'arc (α, β) du cercle $|z| = 1$. Posons

$$z^a D_z^a f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-a)} z^n.$$

On entend par l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) un nombre k tel que

$$D_z^{-k-\varepsilon} f(z)$$

soit finie, continue et à écart fini sur l'arc (α, β) quel que soit le nombre positif ε mais que l'une au moins de ces propriétés fasse défaut à la fonction:

$$D_z^{-k+\varepsilon} f(z).$$

L'ordre dans un point singulier $z = e^{i\Theta_0}$ est égal à l'ordre sur un arc (α, β) comprenant le point Θ_0 et de longueur aussi petite que ce soit.

L'ordre dans un point régulier est égal à $-\infty$. Si l'ordre total sur le cercle $|z| = 1$ est égal à k, il y a sur ce cercle un point au moins d'ordre k.

Relativement à ce nombre k on a les théorèmes importants suivants:

A. *L'ordre d'une fonction sur un arc (α, β) n'est pas altéré quand on la multiplie par une fonction holomorphe et différente de zéro le long de (α, β).*

B. *L'ordre du produit de deux fonctions d'ordre positif est au plus égal à la somme des ordres des facteurs.*

Si l'une des fonctions est d'ordre négatif il suffit dans la démonstration que donne M. Hadamard de ce théorème de remplacer l'ordre négatif par zéro; donc:

C. *Le produit de deux fonctions, dont l'une est d'ordre positif k, est d'ordre au plus égal à k.*

Le produit de deux fonctions d'ordres négatifs est au plus d'ordre zéro, mais on peut ici obtenir un résultat un peu plus précis. En effet, soit f_1 et f_2 d'ordre k_1 et k_2 respectivement $(0 > k_1 > k_2)$ et soit n le plus petit entier positif qui est plus grand que $-k_1$; considérons

$$D_z^n[f_1(z)\,f_2(z)] = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} D_z^{n-s} f_1(z)\, D_z^s f_2(z).$$

Le premier terme au deuxième membre est $D_z^n f_1(z) \,.\, f_2(z)$; $D_z^n f_1(z)$ est d'ordre $n + k_1 > 0$ et cet ordre ne sera pas augmenté par la multiplication par une fonction d'ordre négatif; ce terme est donc d'ordre $n + k_1$ au plus. L'ordre du dernier terme au deuxième membre est $\leq n + k_2 \leq n + k_1$. Tous les autres termes, étant le produit de deux fonctions d'ordre non-positif, sont au plus d'ordre zéro. Mais de la définition résulte immédiatement que la somme de deux fonctions d'ordre k est d'ordre k au plus, et que la somme de deux fonctions dont l'une est d'ordre k pendant que l'autre est d'un ordre inférieur à k, est nécessairement d'ordre k. $D_z^n[f_1(z)\,f_2(z)]$ est donc d'ordre $n + k_1$ au plus. Il en résulte que:

D. *L'ordre d'un produit de deux fonctions d'ordres négatifs est au plus égal au plus grand des ordres des facteurs.*

L'intérêt de cette notion d'ordre résulte surtout de ce qu'elle établit une certaine correspondance entre l'ordre de grandeur de $f(z)$ dans les points singuliers situés sur le cercle de convergence et l'ordre de croissance des coefficients a_n. On a, en effet, les quatre théorèmes suivants, dont les deux premiers sont dus à M. Hadamard.

E. *Si l'ordre de $f(z)$ sur un arc déterminé (α, β) du cercle de convergence et à ses extrémités est égal au nombre positif k on a:*

1°. $$\lim_{|z|=1} (1 - |z|)^{k+\varepsilon} f(z) = 0.$$

(ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut) et cela uniformément, pourvu que z tende vers un point de l'arc (α, β) par des valeurs intérieures au cercle.

2°. *Si $I(z)$ désigne l'écart sur l'arc de cercle de rayon $|z|$ et limité aux mêmes rayons que (α, β), le produit*

$$(1 - |z|)^{k+\varepsilon}\, I(z)$$

tend aussi vers 0.

Et inversement:

F. *Si les quantités*

$$(1-|z|)^k\,|f(z)| \quad et \quad (1-|z|)^k\,|I(z)|$$

restent moindres qu'un nombre fixe lorsque l'on fait tendre z vers un point de l'arc (α, β) *par des valeurs intérieures au cercle, la fonction* $f(z)$ *est d'ordre au plus égal à* k *sur l'arc* (α, β).

Mais il faut reconnaître qu'il est presque toujours très difficile de bien discerner quel est l'ordre de grandeur de l'écart I d'une fonction donnée sur son cercle de convergence. Le théorème suivant, voisin à **F**, est plus facile à appliquer.

G. *Si la quantité*

$$(1-|z|)^k\,|f(z)| \qquad\qquad k \geqq 0$$

reste moindre qu'un nombre fixe A *lorsque l'on fait tendre z vers un point de l'arc* (α, β) *par des valeurs intérieures au cercle de convergence, la fonction* $f(z)$ *est d'ordre au plus égal à* $k+1$ *sur l'arc* (α, β)[1].

En effet, soit ε un nombre positif et formons la dérivée généralisée[2] d'ordre $-k-\varepsilon$

$$z^{-k-\varepsilon}\, D_z^{-k-\varepsilon} f(z) = \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{k+\varepsilon-1} f(tz)\,dt. \tag{5}$$

D'après l'hypothèse faite relativement à $f(z)$ on a, t étant < 1,

$$|f(tz)| < \frac{A}{(1-t)^k}$$

quelle que soit la valeur de z de module < 1 et d'argument compris entre α et β; l'intégrale est donc uniformément convergente, et elle représente, par conséquent, une fonction qui est finie et continue sur l'arc (α, β). La fonction

$$z^{-k-\varepsilon-1}\, D_z^{-k-\varepsilon-1} f(z)$$

est à fortiori finie et continue sur l'arc (α, β), elle est d'ailleurs holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, et elle a une dérivée finie sur l'arc (α, β). Il en

[1] Cf. Horn l. c. p. 516—517.

[2] Sur l'extension de la notion de dérivée à des ordres non-entiers (positifs ou négatifs) voir Hadamard l. c. p. 154—162, et Riemann: Gesammelte mathematische Werke; Leipzig 1892, p. 353—366.

résulte qu'elle est à écart fini sur cette arc, et, par conséquent, d'ordre au plus égal à zéro. On voit donc que l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est $\leq k+\varepsilon+1$, or comme on peut choisir ε aussi petit qu'on veut, la proposition est démontrée. Ce théorème donne moins de précision que F mais on ne peut pas arriver à mieux,[1] c'est à dire qu'avec l'hypothèse faite sur la fonction $f(z)$ il n'existe aucun nombre $k' < k+1$ tel que l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est nécessairement inférieur ou égal à k'.

Cela résulte de l'exemple suivant. Considérons la fonction de WEIERSTRASS[2]

$$f(z) = 1 + bz^{\nu} + b^2 z^{\nu^2} + b^3 z^{\nu^3} + \cdots \tag{6}$$

b étant un nombre positif inférieur à 1, et ν étant un entier positif supérieur à 1; supposons en plus que $b\nu > 1$. $f(z)$ admet, comme on sait, son cercle de convergence $|z| = 1$ comme coupure; elle est d'ailleurs absolument et uniformément convergente et par suite finie et continue sur ce cercle (mais elle n'est pas à écart fini[3]). L'ordre k de $f(z)$ sur le cercle $|z| = 1$ est d'après le théorème G inférieur ou égal à 1. Mais il est facile de déterminer directement cet ordre à l'aide de l'égalité (3); on trouve

$$k = 1 + \frac{\log b}{\log \nu}$$

ce nombre est inférieur à 1, mais en choisissant ν suffisamment grand, la différence $1-k$ peut être rendue aussi petite qu'on veut.

Le degré d'infinitude de la fonction dans les points singuliers ne permet donc pas, à lui seul, de déterminer l'ordre sur le cercle de convergence, mais en résserrant un peu les hypothèses on démontrera ce résultat assez précis.

H. *Soit $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$; soit (α, β) un arc de ce cercle comprenant le point $z = 1$; supposons qu'il existe un nombre $k > 1$ tel que le produit*

$$|f(z)(1-|z|)^{k-1}(1-z)|$$

dans le domaine $1 > |z| > 0$, $\beta > Arg\, z > \alpha$ reste plus petit qu'une constante fixe A, l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est alors $< k$.

[1] Comparez avec les remarques de M. E. BOREL dans ses Leçons sur les series à termes positifs. Paris 1902, p. 77—79.

[2] Abhandlungen aus der Funktionenlehre; Berlin 1886, p. 97—101 et Mathematische Werke t. II, p. 71—74.

[3] HADAMARD l. c. p. 170.

Il en résulte en particulier que, si $z = 1$ est le seul point singulier sur l'arc (α, β), et si le produit

$$|f(z)\,(1-z)^k| \qquad\qquad k > 1$$

reste plus petit qu'une constante fixe A quand z tend vers 1 par des valeurs intérieures au cercle $|z| = 1$ ou le long de ce cercle, alors l'ordre de $f(z)$ dans le point $z = 1$ est $< k$.

Démonstration. Considérons la dérivée d'ordre $-k-\varepsilon$

$$D^{-k-\varepsilon} f(z) = \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^z (z-\zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta,$$

ε étant un nombre positif; on voit de la même manière que plus haut qu'elle est finie et continue sur l'arc (α, β); nous allons démontrer qu'elle est également à écart fini sur cette arc. Posons:

$$I = \frac{n}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^\gamma e^{in\theta} \int_0^{e^{i\theta}} (e^{i\theta}-\zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta\, d\theta;$$

il faut démontrer que $|I|$ reste plus petit qu'un nombre fixe quand le nombre entier n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, et cela quelle que soit la valeur de γ dans l'intervalle (α, β). En intégrant par partie, on trouve:

$$I = \frac{e^{in\gamma}}{i\,\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^{e^{i\gamma}} (e^{i\gamma}-\zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{i\,\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-\zeta)^{k+\varepsilon-1} f(\zeta)\, d\zeta -$$

$$- \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon-1)} \int_0^\gamma e^{i(n+1)\theta} \int_0^{e^{i\theta}} (e^{i\theta}-\zeta)^{k+\varepsilon-2} f(\zeta)\, d\zeta\, d\theta$$

Désignons les trois intégrales qui figurent au second membre par I_1, I_2 et I_3 respectivement. En changeant la variable dans I_1 on trouve

$$|I_1| = \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^{k+\varepsilon-1} |f(te^{i\gamma})|\, dt < \frac{A}{\Gamma(k+\varepsilon)} \int_0^1 (1-t)^\varepsilon \frac{dt}{|1-te^{i\gamma}|};$$

la dernière intégrale est évidemment finie et indépendante de n quel que soit γ entre α et β. $|I_2|$ est également fini et indépendant de n. Considérons l'intégrale double; on trouve:

$$|I_3| < \frac{1}{\Gamma(k+\varepsilon-1)} \int_0^{\gamma}\int_0^1 (1-t)^{k+\varepsilon-2} |f(e^{i\Theta}t)| \, dt \, d\Theta$$

et en vertu de l'hypothèse faite sur la manière dont $f(z)$ devient infinie

$$|I_3| < \frac{A}{\Gamma(k+\varepsilon-1)} \int_0^{\gamma}\int_0^1 (1-t)^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \frac{dt}{|1-te^{i\Theta}|^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \, d\Theta.$$

Cette dernière intégrale est convergente quel que soit γ. La fonction $D_z^{-k-\varepsilon} f(z)$ est donc bien finie, continue et à écart fini sur l'arc (α, β). Il en résulte que l'ordre de $f(z)$ sur l'arc (α, β) est $\leq k+\varepsilon$, ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut c. q. f. d.

Il va sans dire que le théorème reste vrai, s'il y a sur l'arc (α, β) un nombre fini de points singuliers de la même nature que $z=1$.

§ 2. Les théorèmes précédents permettent dans des cas étendus, sinon de déterminer l'ordre, du moins d'assigner une borne supérieure et inférieure de celui-ci. Mais il y a un cas particulier important, où on peut déterminer la valeur exacte de l'ordre, c'est celui où la fonction $f(z)$ se comporte sur le cercle de convergence comme une solution d'une équation différentielle linéaire à points singuliers réguliers. Supposons que $f(z)$ soit holomorphe pour $|z|<1$ à l'exception du point $z=1$, et qu'elle admette au voisinage de $z=1$ une représentation de la forme

$$f(z) = \sum_{i=1}^{i=p} (1-z)^{\alpha_i} \{\psi_{i,0}(z) + \psi_{i,1}(z)\log(1-z) + \cdots + \psi_{i,r}(z)\log^r(1-z)\}, \tag{7}$$

les $\psi_{i,s}(z)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $z=1$ et telles que l'un au moins des nombres $\psi_{i,s}(1)$ $(s=0, 1, \ldots r)$ soit différent de zéro. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont des nombres complexes quelconques; soit pour fixer les idées

$$\Re(\alpha_1) < \Re(\alpha_2) < \Re(\alpha_3) < \cdots$$

L'ordre de $(1-z)^\alpha \log^r(1-z)$ dans le point $z=1$ est égal à $-\Re(\alpha)$; il y a exception seulement dans le cas où α est égal à un entier non-négatif et en même temps $r=0$; l'ordre est alors égal à $-\infty$. Pour le voir supposons d'abord que $\Re(\alpha+1)<0$; l'ordre est alors, d'après le théorème II, $\leq -\Re(\alpha)$ et d'après le théorème I $\geq -\Re(\alpha)$. L'ordre est donc nécessairement égal à $-\Re(\alpha)$.

Dans le cas où $n > \Re(\alpha+1) > 0$, n étant un entier positif, il suffit de considérer la dérivée d'ordre n de $(1-z)^\alpha \log^r(1-z)$ et l'on arrive au même résultat. L'ordre n'est pas altéré par la multiplication par une fonction holomorphe et

différente de zéro; on voit donc que $f(z)$ est d'ordre $-\Re(\alpha_1)$ sur le cercle $|z| = 1$ à moins que α_1 ne soit un entier non-négatif et que $\psi_{1,1}(1) = \cdots = \psi_{1,r}(1) = 0$. L'ordre est alors égal à $-R(\alpha_2)$ etc. . . .

Soit ω un nombre dont la partie réelle est positive. Posons

$$1 - z = (1 - t)^{\frac{1}{\omega}}.$$

Nous aurons besoin plus loin de pouvoir reconnaître quel sera l'ordre de $f(z)$ considérée comme fonction de t dans le point $t = 1$. On le voit presque immédiatement. Considérons le terme

$$(1 - z)^{\alpha_1} \psi_{1,0}(z) = (1 - t)^{\frac{\alpha_1}{\omega}} \sum_{s=0}^{\infty} A_s (1 - t)^{\frac{s}{\omega}}.$$

Il est d'ordre $-\Re\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)$ dans le point $t = 1$, pourvu que A_0 soit différent de zéro. On voit donc que l'ordre de $f(z)$, considérée comme fonction de t, dans le point $t = 1$ est égal au plus grand des nombres

$$-\Re\left(\frac{\alpha_i}{\omega}\right) \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

en mettant de côté le cas d'exception dont nous avons parlé plus haut.

§ 3. Rappelons encore un dernier lemme, concernant la valeur asymptotique de la fonction $\Gamma(s)$, dont nous aurons à nous servir. Soit β un nombre complexe quelconque indépendant de s, on a:

$$\frac{\Gamma(s)\, s^{\beta}}{\Gamma(s + \beta)} = 1 + \varepsilon,$$

ε tendant uniformément vers zéro quand $|s|$ tend vers l'infini de manière que s s'éloigne indéfiniment de l'axe des nombres négatifs.

CHAPITRE II.

§ 4. Cela posé, considérons la série de facultés

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{1}$$

et commençons par rappeler brièvement les principaux résultats, concernant ces séries, démontrés par M. Landau dans le Mémoire cité.

Le domaine de convergence est, comme nous l'avons déjà dit, un demi-plan limité à gauche par une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et coupant celui-ci en un certain point λ, dit l'abscisse de convergence. La convergence est uniforme dans tout domaine fini situé à l'intérieur du demi-plan de convergence et ne contenant aucun des points $0, -1, -2, \ldots$ La série représente donc une fonction analytique, holomorphe pour toute valeur finie de x telle que $\sigma > \lambda$[1] en exceptant les points $0, -1, -2, \ldots$ qui sont des pôles simples ou des points réguliers de la fonction $\Omega(x)$, s'ils sont situés à l'intérieur du demi-plan de convergence. Sur la droite $\sigma = \lambda$ la série peut être convergente ou divergente, ou elle peut converger seulement sur une partie de cette ligne. L'abscisse de convergence λ se détermine, du moins si elle n'est pas négative, de la manière suivante. Posons:

$$c = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \left| \sum_{s=0}^{s=n} a_{s+1} \right|}{\log n}. \tag{8}$$

Si $\lambda \geq 0$, on a $\lambda = c$, et quel que soit λ, on a $\lambda \leq c$; λ peut en particulier prendre la valeur $-\infty$, la série représente dans ce cas une fonction méromorphe de x.

Généralement la série ne converge absolument que dans une partie de son domaine de convergence $\sigma > \lambda$; le domaine de convergence absolue est également un demi-plan $\sigma > \overline{\lambda}$; $\overline{\lambda}$ est dite l'abscisse de convergence absolue et l'on a $\lambda \leq \overline{\lambda} \leq \lambda + 1$. Il va sans dire que $\overline{\lambda}$ se détermine, si elle n'est pas négative, par la formule:

$$\overline{\lambda} = \limsup_{n=\infty} \frac{\log \sum_{s=0}^{s=n} |a_{s+1}|}{\log n}$$

M. Landau fait en outre voir l'analogie formelle qu'il y a entre la série (1) et la série de Dirichlet

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}}{s^x} \tag{9}$$

avec les mêmes coefficients. Les deux séries sont convergentes et divergentes pour les mêmes valeurs de x (en exceptant les points $0, -1, -2, \ldots$) et plus encore, la fonction analytique

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} - \psi(x)$$

[1] Nous posons toujours $x = \sigma + i\tau$.

définie par les séries pour $\sigma > \lambda$, est holomorphe pour $\sigma > \lambda - 1$. Il serait intéressant de voir si cette analogie peut se poursuivre plus loin; nous comparerons souvent, dans ce qui suit, nos résultats avec les théorèmes correspondants rélatifs aux séries de Dirichlet.

Il peut arriver qu'il se trouve un point singulier de la fonction $\Omega(x)$ sur la droite de convergence $\sigma = \lambda$, mais en général il n'en est pas ainsi, comme l'a fait observer M. Pincherle.[1] Il existe, au contraire, en général une bande $l < \sigma < \lambda$ située à gauche du domaine de convergence dans laquelle la fonction $\Omega(x)$ est holomorphe et bornée.

Le premier problème que nous allons traiter consiste à trouver le prolongement analytique de la fonction $\Omega(x)$ dans la bande $l < \sigma < \lambda$ ou du moins dans une partie de cette bande. On y réussît en introduisant dans la série (1) un paramètre dont elle ne dépend qu'apparemment pendant qu'au contraire le domaine de convergence de la série dépend de la valeur qu'on attribue à ce paramètre. C'est au fond le même procédé que M. Mittag-Leffler a appliqué avec tant de succès à la série de Taylor. Ici, étant donné la forme sous laquelle nous l'employons, nous en obtenons un résultat beaucoup moins parfait. Nous avons pourtant cru utile d'y insister un peu, parce que ce que nous allons faire n'est que de transformer la série de facultés (1) en une autre série de facultés avec la variable $\alpha x + \beta$ au lieu de x, (α et β étant des constantes convenablement choisies). Mais l'étude de ces transformations s'impose pour d'autres raisons encore, et dans presque toutes les applications des séries de facultés on est amené à en faire constamment usage. Nous aurons souvent, dans ce Mémoire même, l'occasion de nous en servir.

§ 5. Soit β un nombre dont la partie réelle est positive; nous allons étudier la formule:

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left[a_{s+1} + \binom{\beta}{1} a_s + \binom{\beta+1}{2} a_{s-1} + \cdots + \binom{\beta+s-1}{s} a_1\right] s!}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)} \tag{10}$$

où le second membre ne dépend qu'apparemment de β et où l'on a posé

$$\binom{\beta+s-1}{s} = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{s!}.$$

[1] Sui limiti della convergenza di alcune espressioni analitiche. Rendiconti della sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, sér. 2, t. 8, 1904, p. 13. Comparez aussi Landau, l. c. Grundlagen etc., p. 188.

Nous démontrerons d'abord que la relation (10) est valable dans le domaine de convergence absolue de la première série, si l'on suppose en plus que $\sigma > 0$.

En effet on a:

$$\frac{1}{x} = \int_0^1 t^{x+\beta-1} t^{-\beta} dt;$$

développons $t^{-\beta}$ par la formule du binôme

$$t^{-\beta} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{\beta + s - 1}{s} (1-t)^s$$

et intégrons terme par terme; on trouve

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+\beta} + \frac{\beta}{(x+\beta)(x+\beta+1)} + \frac{\beta(\beta+1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)(x+\beta+2)} + \cdots \tag{11}$$

cette série de facultés converge absolument si $\sigma > 0$, pourvu que x ne soit pas égal à un des nombres $-\beta, -\beta-1, -\beta-2, \ldots$. En effet d'après le § 3 il existe un nombre fixe K indépendant de s tel que

$$\left| \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)} \right| < \frac{K}{s^{\sigma+1}}$$

quel que soit l'entier positif s.

Formons la différence $n^{\text{ième}}$ des deux membres de (11), on trouve:

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+n+s)} \frac{(n+s)!}{s!}, \tag{11 bis}$$

où la série converge absolument, si $\sigma > 0$.

Cela posé, considérons la série double

$$\sum_{n,s} u_{n,s},$$

où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs non-négatives de n et de s, et où nous avons posé

$$u_{n,n+s} = \binom{\beta+s-1}{s} \frac{(n+s)!\, a_{n+1}}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+n+s)} \quad s >$$

pendant que $u_{n.s} = 0$, si $s < n$. Je veux démontrer que la série double est absolument convergente. Posons $\beta_1 = \Re(\beta)$; d'après le § 3 on sait trouver un nombre positif K indépendant de n et de s tel que l'inégalité

$$\left| \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+s-1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)\dots(x+\beta+n+s)} \right| < K \frac{\beta_1(\beta_1+1)\dots(\beta_1+s-1)}{(\sigma+\beta_1)(\sigma+\beta_1+1)\dots(\sigma+\beta_1+n+s)}$$

a lieu quels que soient les entiers non-négatifs n et s. La formule (11 bis) nous donne donc l'inégalité suivante:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} |u_{n.n+s}| < K|a_{n+1}| \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+s)!\,\beta_1(\beta_1+1)\dots(\beta_1+s-1)}{s!\,(\sigma+\beta_1)(\sigma+\beta_1+1)\dots(\sigma+\beta_1+n+s)} = \frac{K.n!\,|a_{n+1}|}{\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+n)}.$$

Il en résulte que la série double

$$\sum u_{n.s}$$

est absolument convergente, si $\sigma > 0$, et $\sigma > \lambda$, λ étant l'abscisse de convergence absolue de la série (1), et l'on a par conséquent l'identité

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\sum_{s=0}^{s=\infty} u_{n.s} \right) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\sum_{n=0}^{n=\infty} u_{n.s} \right),$$

qui entraine l'identité (10). Le cas $\beta = 1$ est particulièrement intéressant. On trouve

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,a_{s+1}}{x(x+1)\dots(x+s)} = \sum \frac{s!\,(a_1+a_2+\dots+a_{s+1})}{(x+1)(x+2)\dots(x+s+1)}. \tag{12}$$

Nous avons démontré l'exactitude de cette relation dans le domaine de convergence *absolue* de la série au premier membre. Mais, les séries étant uniformément convergentes, la relation subsiste partout où les deux séries convergent.

Soit c le nombre défini par l'égalité (8), on sait trouver un nombre fixe K tel que, pour $s = 1, 2, 3, \dots$, on ait

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_{s+1}| < K s^{c+\epsilon}, \tag{13}$$

quelque petit que soit le nombre positif ϵ. Soit, comme plus haut, λ l'abscisse de convergence de la série au premier membre de (12), on voit que la série au deuxième membre converge *absolument*, si $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$. Dans les applications des séries de facultés on est souvent gêné par le fait que la convergence n'est absolue

que dans une partie du domaine de convergence. On évite cet inconvénient en transformant préalablement la série à l'aide de la formule (12).

§ 6. Cette formule nous permet aussi de tirer une conclusion importante relativement à la fonction $\Omega(x)$ définie par le développement (1). Soit $\varkappa$ un nombre positif plus grand que λ, soit x un nombre tel que $\sigma \geq \varkappa$, on a d'après (12)

$$|\Omega(x)| \leq \frac{\varkappa + 1}{|x+1|} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!\,|a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1}|}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+s+1)},$$

mais l'inégalité (13) montre qu'on sait trouver un nombre positif M indépendant de s tel que

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1}| < M \frac{(c'+\varepsilon+1)(c'+\varepsilon+2)\ldots(c'+\varepsilon+s)}{s!} \qquad s = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

où c' désigne le plus grand des nombres c et 0. En ayant soin de choisir en outre M plus grand que $|a_1|$ on trouve

$$|\Omega(x)| < M \frac{\varkappa + 1}{|x+1|} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(c'+\varepsilon+1)(c'+\varepsilon+2)\ldots(c'+\varepsilon+s)}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+s+1)},$$

mais on peut toujours choisir ε suffisamment petit pour que $\varkappa > c' + \varepsilon$; la série est donc convergente et la formule (11) nous donne

$$|\Omega(x)| < \frac{M}{|x+1|} \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - c' - \varepsilon};$$

il en résulte que $|x\Omega(x)|$ reste plus petit qu'une constante fixe dans le domaine $\sigma > \varkappa$.

Posons

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} + R_n(x) \tag{15}$$

et appliquons le même raisonnement à la fonction $R_n(x)$ on trouve d'abord

$$R_n(x) = \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{s+1})\, s!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s+1)};$$

soit $\sigma \geq \varkappa$, on a

$$|R_n(x)| < \frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+n+1)}{|x+1||x+2|\ldots|x+n+1|} \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{s+1}|\, s!}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+s+1)}$$

enfin on sait trouver un nombre positif M indépendant de n et de s tel que

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{s+1}| < M\frac{(c'+\varepsilon+1)(c'+\varepsilon+2)\dots(c'+\varepsilon+s)}{s!} \qquad s=n, n+1, n+2, \dots$$

ε étant un nombre positif qu'on peut choisir assez petit pour que l'on ait $\varkappa > c'+\varepsilon$; on trouve donc

$$|R_n(x)| < M\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+n+1)}{|x+1||x+2|\dots|x+n+1|}\sum_{s=n}^{s=\infty}\frac{(c'+\varepsilon+1)(c'+\varepsilon+2)\dots(c'+\varepsilon+s)}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+s+1)}; \qquad (16)$$

la série (11) étant absolument convergente, si $\sigma > 0$, on voit que la série au second membre de cette inégalité est le terme reste d'une série convergente, dont les termes sont indépendants de x; σ étant $\geq \varkappa$ on a

$$\frac{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\dots(\varkappa+n+1)}{|x+1||x+2|\dots|x+n+1|} < 1;$$

il en résulte que $|R_n(x)|$, dans le domaine $\sigma \geq \varkappa$, tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini.

Théorème I. *La série* (1) *est uniformément convergente dans le domaine* $\sigma \geq \varkappa$, $\varkappa$ *désignant un nombre positif plus grand que l'abscisse de convergence* λ.

M. Landau[1] a déjà démontré que la série (1) converge uniformément dans tout domaine *fini*, situé à l'intérieur du demi-plan de convergence et ne contenant aucun des points $x = 0, -1, -2, \dots$

Pour les séries de Dirichlet[2] de la forme (9) la convergence est également uniforme dans tout domaine fini situé à l'intérieur du domaine de convergence $\sigma > \lambda$, et même dans tout domaine de la forme

$$\sigma > \lambda + \varepsilon, \qquad -e^{M\sigma} \leq \tau < e^{M\sigma},$$

ε étant un nombre positif et M étant un nombre réel; *mais la convergence n'est pas uniforme dans le demi-plan* $\sigma > \lambda + \varepsilon$.

De l'inégalité (16) on peut tirer une autre conclusion importante. Soit maintenant n un nombre fixe on voit que

$$|x+1||x+2|\dots|x+n+1||R_n(x)|,$$

[1] l. c. Grundlagen etc., p. 161.

[2] Voir Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig und Berlin 1909, p. 735–742.

ou, ce qui revient au même, que

$$|x^{n+1} R_n(x)|$$

reste plus petit qu'une constante fixe indépendante de x dans le domaine $\sigma \geq \varkappa$; on a donc le théorème suivant.

Théorème II. *La fonction* $\Omega(x)$ *définie par la série* (1) *peut se mettre sous la forme*

$$\Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{\mu(x)}{x(x+1)}, \tag{17}$$

$\mu(x)$ *étant une fonction dont le module admet une borne supérieure dans le domaine* $\sigma \geq \varkappa$, *et l'on a uniformément dans ce domaine*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x=\infty} x\,\Omega(x) = a_1, \\
&\lim_{x=\infty} (x+1)[x\,\Omega(x) - a_1] = a_2 \,.\, 1! \qquad\qquad (18)\\
&\lim_{x=\infty} (x+2)\{(x+1)[x\,\Omega(x) - a_1] - a_2\} = a_3 \,.\, 2! \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nous verrons plus loin qu'on peut encore préciser un peu ce résultat; on y arrive le plus facilement à l'aide de l'intégrale définie que nous allons maintenant étudier.

§ 7. Soit C un contour rectangulaire dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et avec les sommets $\varkappa - in$, $\varkappa + in$, $\varkappa + m + in$, $\varkappa + m - in$, où m et n désignent des nombres positifs et $\varkappa$ ayant la même signification que plus haut. Soit x un point situé à l'intérieur du contour, on a

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\Omega(z)}{z - x}\, dz.$$

Nous venons de voir que $|z\,\Omega(z)|$ reste borné dans le domaine $\sigma \geq \varkappa$; faisons tendre n vers l'infini, on trouve

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{\Omega(z)}{x - z}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa + m - i\infty}^{\varkappa + m + i\infty} \frac{\Omega(z)}{z - x}\, dz,$$

or la dernière intégrale est identiquement zéro; on a donc

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Omega(z)}{x-z}\,dz, \tag{19}$$

le chemin d'intégration étant une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses et coupant celui-ci dans le point α; mais, la partie réelle de x étant plus grande que α, cette dernière intégrale peut s'écrire

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Omega(z)\int_0^\infty e^{(z-x)\xi}\,d\xi\,dz. \tag{20}$$

On peut ici renverser l'ordre des intégrations; pour le voir appliquons le théorème II et substituons, dans l'intégrale (20), au lieu de $\Omega(z)$ l'expression (17); (20) se trouve ainsi décomposé en une somme de deux intégrales. Pour la première il n'y a pas de difficultés. La seconde est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\mu(z)}{z(z+1)}\int_0^\infty e^{(z-x)\xi}\,d\xi\,dz;$$

mais cette intégrale est absolument convergente ainsi que les deux intégrales simples

$$\int_0^\infty e^{(z-x)\xi}\,d\xi \quad \text{et} \quad \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\mu(z)}{z(z+1)}\,e^{\xi z}\,dz;$$

on peut donc renverser l'ordre des intégrations[1] et on trouve

$$\Omega(x) = \int_0^\infty e^{-x\xi}\,F(\xi)\,d\xi, \tag{21}$$

où

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\xi z}\,\Omega(z)\,dz; \tag{21 bis}$$

en posant $e^{-\xi} = t$ on trouve encore

[1] Bromwich: Theory of infinite series, p. 457. London 1908.

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1} \varphi(t)\, dt, \tag{22}$$

où

$$\varphi(t) = F\left(\log \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} t^{-z}\, \Omega(z)\, dz. \tag{22 bis}$$

Nous avons supposé que $\varkappa$ est un nombre réel quelconque tel que $\varkappa > \lambda$, $\varkappa > 0$; les intégrales (21 bis) et (22 bis) sont donc indépendantes de la valeur qu'on attribue à $\varkappa$ ces hypothèses étant satisfaites.

S'il existe un nombre positif l inférieur à $\varkappa$ (et inférieur à λ) tel que $\Omega(x)$ est holomorphe pour $\sigma \geq l$ et susceptible d'une représentation de la forme (17) $|\mu(x)|$ admettant une borne supérieure dans le domaine $\sigma \geq l$, on peut même, sans changer la valeur des intégrales (21 bis) et (22 bis), substituer à $\varkappa$ ce nombre l ou tout autre nombre positif supérieur à l. C'est d'ailleurs facile de le vérifier directement à l'aide du théorème de CAUCHY sur les intégrales complexes.

Ces intégrales sont convergentes respectivement pour $0 < \xi < \infty$ et pour $1 > t > 0$, mais la convergence n'est pas absolue; en effet on a

$$\varphi(t) = \frac{a_1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z} \frac{\mu(z)}{z(z+1)}\, dz, \tag{23}$$

la seconde intégrale est absolument convergente, mais la première est seulement convergente. Sa valeur est d'ailleurs bien connue;[1] à l'aide du théorème de CAUCHY on démontre aisément qu'on a:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}}{z-\alpha}\, dz = \begin{cases} t^{-\alpha}, & \text{si } 1 > t > 0, \\ 0, & \text{si } t > 1, \end{cases} \tag{24}$$

l étant supérieur à la partie réelle de α; pour $t = 1$ cette intégrale est divergente. Formons la différence finie d'ordre s par rapport à α; on trouve

$$\frac{s!}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{t^{-z}\, dz}{(z-\alpha)(z-\alpha+1)\ldots(z-\alpha+s)} = \begin{cases} t^{-\alpha}(1-t)^s, & \text{si } 1 > t > 0, \\ 0, & \text{si } t > 1. \end{cases} \tag{25}$$

[1] LANDAU l. c. Handbuch etc., p. 342—345.

Cela posé, nous allons démontrer que la fonction $\varphi(t)$, qui est définie par l'intégrale[1] (22 bis) pour $1 > t > 0$, est une fonction analytique de t, holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1| = 1$ et d'ordre fini sur ce cercle. Pour le voir posons dans l'expression (23) l égal à un nombre positif plus grand que l'abscisse de convergence absolue de la série

$$\frac{u(z)}{z(z+1)} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{z(z+1)\ldots(z+s)}$$

et intégrons terme par terme; on trouve

$$\varphi(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_{s+1}(1-t)^s. \tag{26}$$

Pour justifier cette opération remarquons d'abord que la série est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle finie $(l - iN,\ l + iN')$. Posons

$$\frac{\bar{u}(z)}{|z|\,|z+1|} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{|a_{s+1}|\, s!}{|z|\,|z+1|\ldots|z+s|};$$

il existe une constante fixe K tel que $\bar{u}(z) < K$ le long de la ligne d'intégration; il en résulte que l'intégrale

[1] Cette intégrale représente zéro, si $t > 1$; si $t = 1$ elle est divergente; pour les valeurs complexes de t il en est de même. Dans la théorie des séries de Dirichlet

$$\psi(z) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s^z},$$

on rencontre une intégrale de la même forme

$$\lim_{T=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iT}^{x+iT} t^{-z} \frac{\psi(z)}{z}\, dz,$$

mais cette intégrale est discontinue dans les points $t = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ avec les sauts brusques $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$; dans toutes les intervalles $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right)$ elle a une valeur constante. La présence du facteur $\frac{1}{z}$ sous le signe dans cette dernière intégrale, mais non dans l'intégrale (22 bis), provient de ce que nous avons préalablement divisé la série de facultés par z ou, ce qui revient au même, supprimé son terme constant.

$$\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-z} \frac{\overline{\mu}(z)\,dz}{|z|\,|z+1|}$$

est absolument convergente. L'intégration terme par terme est par conséquent légitime.[1] Divisons les deux membres de l'équation (26) par t, on trouve

$$\frac{\varphi(t)}{t} = \sum_{s=0}^{s=\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{s+1})(1-t)^s.$$

Soit c le nombre défini par l'équation (8), on voit que $t^{-1}\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t-1| = 1$ et d'ordre $c+1$ sur ce cercle. On a donc le théorème suivant:

Théorème III.[2] *La série* (1), *ayant l'abscisse de convergence* λ, *définit une fonction analytique* $\Omega(x)$ *admettant une représentation de la forme*

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt, \tag{22}$$

$\varphi(t)$ *étant une fonction analytique, définie par l'équation* (22 bis) *pour* $1 > t > 0$, *et holomorphe à l'intérieur du cercle* $|t-1| = 1$. *L'ordre* k *de* $t^{-1}\varphi(t)$ *sur ce cercle est égal à* $\lambda + 1$, *si* $k > 1$; *si* $k \leq 1$ *on a* $\lambda \leq k - 1$.

Il est souvent plus facile de déterminer λ à l'aide de ce théorème que par l'égalité (8).

MM. Phragmén, Lerch et Pincherle ont démontré que le domaine de convergence de l'intégrale (22) est, comme pour la série (1), un demi-plan et qu'elle représente une fonction holomorphe à l'intérieur de ce demi-plan. Mais l'abscisse de convergence de l'intégrale peut être inférieure, égale ou supérieure à l'abscisse de convergence λ de la série. Dans le § 8 nous indiquons l'exemple d'une fonction où λ est égal à $-\infty$ pendant que l'intégrale est seulement convergente pour $\sigma > 0$. Dans le § 14 on trouve l'exemple d'une fonction, où λ est plus grand que l'abscisse de convergence de l'intégrale (22).

§ 8. Reprenons maintenant l'étude de l'égalité (10). Soit β un nombre *quelconque* et écrivons

[1] Bromwich l. c., p. 453.

[2] Comparez avec les travaux cités de M. Nielsen Handbuch etc., p. 230—243 et de M. Pincherle: Sur les fonctions déterminantes, p. 52.

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x+\beta-1}\, t^{-\beta} \varphi(t)\, dt;$$

la série (26) nous donne le développement

$$t^{-\beta} \varphi(t) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left[a_{s+1} + \binom{\beta}{1} a_s + \binom{\beta+1}{2} a_{s-1} + \cdots + \binom{\beta+s-1}{s} a_1 \right] (1-t)^s.$$

Si la partie réelle de x est suffisamment grande on peut aisément justifier l'intégration terme par terme et on retrouve la formule

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\left[a_{s+1} + \binom{\beta}{1} a_s + \binom{\beta+1}{2} a_{s-1} + \cdots + \binom{\beta+s-1}{s} a_1 \right] s!}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)}; \tag{27}$$

soit k l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t-1| = 1$ et k' l'ordre de $t^{-\beta-1}\varphi(t)$ sur ce cercle. Des lemmes **B**, **C** et **D** dans le § 1 sur l'ordre d'un produit de deux fonctions il résulte les inégalités suivantes

Si $k > 0$ et $\Re(\beta) \geq 0$ on a $k' \leq k + \Re(\beta)$,

» $k > 0$ » $\Re(\beta) < 0$ » » $k' < k$,

» $k < 0$ » $\Re(\beta) > 0$ » » $k' < \Re(\beta)$,

» $k < 0$ » $\Re(\beta) < 0$ » » $k' <$ le plus grand des nombres k et $\Re(\beta)$.

Le théorème III nous permet donc de conclure:

Théorème IV. *La fonction $\Omega(x)$, définie par la série* (1), *ayant l'abscisse de convergence λ, admet toujours un développement de la forme* (27). *Si $\Re(\beta) \geq 0$ cette série converge, si $\Re(x) > \lambda$, $\Re(x) > 0$; si $\Re(\beta) < 0$ la série converge, si $\Re(x+\beta) > \lambda$, $\Re(x+\beta) > 0$.*

Les conditions données dans ce théorème sont nécessaires pour assurer la convergence de la série transformée. Considérons par exemple la série suivante:

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2^{-s-1} \cdot s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{28}$$

cette série est convergente dans tout le plan, en exceptant les points $0, -1, -2, \ldots$ qui sont des pôles de la fonction. En posant $\beta = 1$ dans la formule (27), on trouve cet autre développement

$$\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s+1)} \frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}},$$

ayant l'abscisse de convergence $\lambda = 0$. On aurait d'ailleurs pu prévoir que cette série ne pouvait être convergente pour aucune valeur de x telle que $\sigma < 0$, car elle représenterait alors une fonction holomorphe dans le point $x = 0$. Un raisonnement analogue montre la nécessité des autres conditions.

Mais il peut arriver que le domaine de convergence de la série (27) soit beaucoup plus étendu que ne le dit le théorème IV.

En effet soit, pour fixer les idées, β un nombre réel[1] ≥ 0, soit λ_β l'abscisse de convergence[2] de la série au second membre de (27) et soit $\lambda_0 = \lambda > 0$; je veux démontrer que λ_β est une fonction continue de β qui décroît, ou du moins qui ne va jamais en croissant quand β croît. En effet l'ordre de $t^{-\beta-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t-1| = 1$ est égal à k', et l'ordre de t^β est négatif; l'ordre du produit est d'après C § 1 inférieur ou égal à k', mais $t^{-1}\varphi(t)$ est d'ordre $\lambda + 1$ parce que $\lambda > 0$; on a donc $k' \geq \lambda + 1$, et il en résulte l'inégalité $\lambda_\beta \geq \lambda - \beta$. D'autre part λ_β est inférieur ou égal à λ en vertu du théorème IV; λ_β satisfait donc à l'inégalité

$$\lambda > \lambda_\beta > \lambda - \beta. \tag{29}$$

En désignant par ε un nombre positif on voit de même que

$$\lambda_\beta > \lambda_{\beta+\varepsilon} \geq \lambda_\beta - \varepsilon.$$

Il en résulte que λ_β *est une fonction continue de* β *qui ne va jamais en croissant quand* β *croît de* 0 *à* ∞ *pourvu que l'on ait* $\lambda_\beta > 0$. Si $\lambda_\beta \leq 0$ le théorème n'est plus vrai comme le montre l'exemple ci-dessus.

Il va sans dire que, s'il se trouve un point singulier sur la droite de convergence de la série (1), on a $\lambda = \lambda_\beta$ quelque grand que soit β. On voit aisément que λ_β peut également atteindre sa borne inférieure. En effet soit k_0 l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ dans le point $t = 0$ et pris sur le cercle $|t-1| = 1$, et soit $1 < k_0 < k$, on a $\lambda_\beta = \lambda - \beta$, pourvu que $0 < \beta < k - k_0$, car la multiplication par $t^{-\beta}$ augmente

[1] Dans une étude, que je viens de publier (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 35, 1913, p. 177—216), concernant les solutions des équations linéaires aux différences finies la transformation (27) joue un rôle important; on donne ici à β des valeurs complexes quelconques à savoir les racines d'une certaine équation algébrique. Mais s'il s'agit de réaliser un prolongement analytique de $\Omega(x)$ on pourrait généralement se borner à considérer des valeurs positives de β.

[2] C'est à dire un nombre tel que la série converge pour $\sigma > \lambda_\beta$ mais non pour $\sigma < \lambda_\beta$

seulement l'ordre dans le point $t = 0$, mais non dans les autres points singuliers de $\varphi(t)$; ceux-ci vont être sans influence sur le domaine de convergence quand β devient plus grand que $k - k_0$.

Le cas où l'on fait parcourir β la suite des nombres positifs a fait l'objet d'une étude intéressante de MM. M. Riesz et H. Bohr.[1]

M. H. Bohr a montré le rôle important que joue la méthode de sommation de Cesàro (méthode des moyennes arithmétiques) pour les séries de Dirichlet et pour les séries de facultés; il a démontré l'existence d'une suite de nombres $\lambda \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots$ tels que pour $\sigma > \lambda_r$ la série (1) est sommable d'ordre[2] r mais non pour $\sigma < \lambda_r$; λ_r s'appelle l'abscisse de sommabilité d'ordre r et elle se détermine de la manière suivante. Posons

$$S_n^{(r)}(a) = a_n + \binom{r+1}{1} a_{n-1} + \binom{r+2}{2} a_{n-2} + \cdots + \binom{r+n-1}{n-1} a_1$$

et

$$r + c_r = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |S_n^{(r)}(a)|}{\log n}; \tag{30}$$

l'on a $\lambda_r = c_r$, si $\lambda_r \geq 0$, et en tous cas $\lambda_r \leq c_r$. λ_r est donc, s'il est positif, l'abscisse de convergence de la série (27) quand on y pose $\beta = r$, et l'on a le théorème suivant:

Théorème V. *La fonction $\Omega(x)$ définie par la série de facultés* (1), *ayant λ_r pour abscisse de sommabilité d'ordre r, admet un développement de la forme* (27) *convergent au moins dans le domaine $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$, si $\Re(\beta) \geq r$ et absolument convergent dans ce domaine, si $\Re(\beta) > r + 1$.*

MM. H. Bohr et Hardy ont démontré un théorème général qui permet de transformer une série r fois indéterminée en une série convergente. En appliquant cette transformation à la série (1) on trouve la relation (27), et l'on obtient ainsi une nouvelle démonstration de cette relation dans le cas où β est un entier positif.

Dans les autres applications qu'on a fait de la méthode de sommation de Cesàro la forme du développement sera entièrement modifiée par le procédé de sommation, ici, au contraire, la somme généralisée se représente par un développement de la même forme et aussi simple que celle dont ont partait.

[1] Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 11 janvier 1909.
Über die Summabilität Dirichlet'scher Reihen. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1909.
Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori. Thèse. Copenhague 1910.

[2] C'est à dire sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre r.

En généralisant un théorème de M. LANDAU, mentionné plus haut, M. BOHR a démontré que la série de facultés (1) et la série de DIRICHLET (9) avec les mêmes coefficients sont sommables d'ordre r pour les mêmes valeurs de x. M. H. BOHR s'occupe d'ailleurs exclusivement des séries de DIRICHLET, et, après avoir fait une étude approfondie de la distribution des abscisses de sommabilité, il démontre qu'il y a une relation étroite entre les λ_r et l'ordre d'infinitude de la fonction $\psi(x)$, définie par la série de DIRICHLET, quand la variable $x=\sigma+i\tau$ tend vers l'infini en restant dans une des bandes de sommabilité $\lambda_r<\sigma<\lambda_{r-1}$. Rappelons en particulier que dans le domaine $\sigma>\bar{\lambda}+\varepsilon$ (ε étant un nombre positif, $\bar{\lambda}$ étant l'abscisse de convergence absolue) $\psi(x)$ reste plus petit qu'une constante fixe K, et que l'on a

$$\psi(x)=O(|\tau|^{r+1})$$

dans le domaine $\bar{\lambda}+\varepsilon\geq\sigma>\lambda_r+\varepsilon$.

Vu l'analogie entre les deux types de séries on pouvait être tenté de croire que la fonction $\Omega(x)$, définie par la série de facultés (1), ne prît également des valeurs infiniment grandes quand la variable x s'éloigne infiniment de l'axe des abscisses dans le domaine de sommabilité.

Mais ce n'est pas ainsi; la fonction $\Omega(x)$ reste plus petite qu'une constante fixe, non seulement dans le domaine de convergence, mais aussi dans le domaine de sommabilité et plus encore, *le théorème II reste vrai, si l'on remplace $\varkappa$ par un nombre positif quelconque supérieur à λ_r* et cela quelque grand que soit r.

On le voit immédiatement en appliquant le raisonnement du § 6 à la série (27) β étant égal à r.

Pourtant, quand la série cesse de converger dans le domaine $\lambda_r<\sigma<\lambda$ c'est nécessairement à cause de la singularité à l'infini, et il semble probable qu'on puisse, si l'on cherche en dehors du domaine de sommabilité, trouver quelque relation entre les λ_r et l'ordre de grandeur de la fonction $\Omega(x)$ quand x tend vers l'infini. Nous démontrerons en effet dans le dernier chapitre le théorème suivant: Si $\Omega(x)$ admet un développement de la forme (1) ayant λ_r pour abscisse de sommabilité d'ordre r, la fonction $x^{-r}\Omega(x)$ admet un développement de la même forme, convergent pour $\sigma>\lambda_r$.

CHAPITRE III.

§ 9. La méthode de sommation que nous venons d'étudier s'applique seulement aux séries de facultés qui sont convergentes pour des valeurs suffisamment grandes de la variable. Nous allons maintenant étudier une autre transformation

de la série de facultés qui permet également d'étendre le domaine de convergence, et qui s'applique aux séries toujours divergentes. Par exemple dans ma Thèse j'ai rencontré une certaine classe de séries de facultés partout divergentes mais sommables à l'aide de cette transformation; le calcul effectif des développements convergents se fait le plus commodément par l'intermédiaire des séries divergentes dont on peut ainsi faire un usage légitime. D'ailleurs cette transformation permet de prolonger la fonction $\Omega(x)$ plus loin que ne le permet la transformation (27), et, ce qui est particulièrement remarquable, elle permet de trouver le prolongement analytique de $\Omega(x)$ jusqu'a ce qu'on rencontre une droite $\sigma = l$ qui peut se déterminer à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction $\Omega(x)$.

Soit $\sigma > 0$, on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^1 z^{x-1}\, dz.$$

En formant la différence finie d'ordre s par rapport à x des deux membres de cette équation on trouve

$$\frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \int_0^1 z^{x-1}(1-z)^s\, dz; \qquad s = 0, 1, 2, \ldots$$

soit ω un nombre positif plus grand que 1 et changeons la variable d'intégration en posant $z = t^{\frac{1}{\omega}}$, où $t^{\frac{1}{\omega}}$ est supposé positif le long de la ligne d'intégration. On trouve

$$\frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \frac{1}{\omega}\int_0^1 t^{\frac{x}{\omega}-1}\left(1 - t^{\frac{1}{\omega}}\right)^s dt. \tag{31}$$

Il est facile de développer cette intégrale en séries de facultés en prenant comme variable $\frac{x}{\omega}$. On a, en effet, en vertu de la formule du binôme

$$1 - t^{\frac{1}{\omega}} = \frac{1-t}{\omega} + \frac{\omega - 1}{2!}\left(\frac{1-t}{\omega}\right)^2 + \cdots + \frac{(\omega-1)(2\omega-1)\ldots[(n-1)\omega-1]}{n!}\left(\frac{1-t}{\omega}\right)^n + \cdots,$$

où le coefficient du facteur $(1-t)^n$ est un nombre positif parce que $\omega > 1$. En multipliant cette série par elle-même s fois de suite, on trouve un développement de la forme

$$\left(1 - t^{\frac{1}{\omega}}\right)^s = \sum_{n=s}^{n=\infty} \psi_n^{(s)}(\omega)\,(1-t)^n, \tag{32}$$

où les $\psi_n^{(s)}(\omega)$ sont des nombres *positifs*. Il est d'ailleurs facile d'exprimer explicitement les ψ comme une somme de produits de coefficients binomiaux; on a

$$\psi_n^{(s)}\binom{1}{\omega} = (-1)^{n+1}\binom{s}{1}\binom{\omega}{n} + (-1)^{n+2}\binom{s}{2}\binom{2\omega}{n} + \cdots + (-1)^{n+s}\binom{s}{s}\binom{s\omega}{n} \qquad n \geq s;$$

$$\psi_n^{(s)}(\omega) = 0 \qquad n < s; \qquad\qquad \psi_s^{(0)}(\omega) = 0 \qquad s > 0,$$

mais nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de cette égalité, qui ne va être d'aucune utilité[1] pour nous; il nous suffit d'avoir constaté que les polynômes $\psi_n^{(s)}(\omega)\,(n \geq s)$ restent positifs quand ω reste plus grand que 1. En substituant la série (32) dans l'intégrale (31) et en intégrant terme par terme on trouve

$$\frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)} = \sum_{n=s}^{n=\infty} \frac{\psi_n^{(s)}(\omega)\,\omega^n\,n!}{x(x+\omega)\ldots(x+n\omega)}. \tag{33}$$

Le théorème III § 7 nous permet seulement de conclure que l'abscisse de convergence de cette série est ≤ 0. En réalité la série est absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > -1$. On le voit immédiatement à l'aide des lemmes dans le § 1 qui donnent pour les $\psi_n^{(s)}(\omega)$, définis par l'équation (32), l'inégalité suivante

$$\left|\psi_n^{(s)}(\omega)\right| < \frac{K}{n^{1+\frac{1}{\omega}-\varepsilon}}, \qquad n = 1, 2, 3,$$

K étant un nombre positif indépendant de n, et ε étant un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut.

Cela posé, il est facile de transformer la série (1) en une autre série de facultés avec la variable $\frac{x}{\omega}$ au lieu de x. Posons

$$u_{p,q} = \frac{a_{q+1}\cdot p!\,\psi_p^{(q)}(\omega)\,\omega^p}{x(x+\omega)\ldots(x+p\omega)},$$

[1] On pourrait pourtant remarquer que les $\psi_n^{(s)}(\omega)$ sont d'une forme trop compliquée pour qu'on puisse facilement arriver à une détermination directe de l'abscisse de convergence de la série (34).

et considérons la série double

$$\sum_{p,q} u_{p,q},$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs non-négatives de p et de q.

Soit λ l'abscisse de convergence absolue de la série (1), soit $x = \sigma + i\tau$ un nombre quelconque tel que $\sigma > \lambda$, $\sigma > -1$ et que $\sigma \gtrless 0$; je dis que la série double est absolument convergente. On a en effet

$$|u_{p,q}| \leq \frac{|a_{q+1}|\, p!\, \psi_p^{(q)}(\omega)\, \omega^p}{|\sigma|\,|\sigma+\omega| \ldots |\sigma+p\omega|},$$

donc en vertu de (33)

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} |u_{p,q}| \leq \frac{|a_{q+1}|\, q!}{|\sigma|(\sigma+1) \ldots (\sigma+q)};$$

or σ étant $> \lambda$, il en résulte que la série double est absolument convergente. L'identité

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} u_{p,q},$$

nous donne donc la relation suivante

$$\Omega(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \frac{a_{q+1}\, q!}{x(x+1) \ldots (x+q)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{c_{p+1}\, \omega^p\, p!}{x(x+\omega) \ldots (x+p\omega)}, \tag{34}$$

valable si $\sigma > \lambda$, $\sigma > -1$, et où l'on a posé

$$c_{p+1} = \psi_p^{(1)}(\omega)\, a_2 + \psi_p^{(2)}(\omega)\, a_3 + \cdots + \psi_p^{(p)}(\omega)\, a_{p+1} \qquad p > 0,$$

$$c_1 = a_1.$$

On remarque que les coefficients c_p ne dépendent que d'un nombre fini des coefficients a_p.

Théorème VI. *La fonction $\Omega(x)$, définie par la série* (1), *admet toujours*[1] *un développement de la forme du second membre de* (34), *ω étant > 1; cette nouvelle série de facultés est absolument convergente, si $\sigma > \lambda$, $\sigma > -1$.*

[1] M. Nielsen (Handbuch etc., p. 265—271) a essayé de démontrer que cette transformation n'est pas possible en général mais sa démonstration n'est point rigoureuse.

La dernière de ces conditions de convergence, introduite pour assurer la convergence de la série (33) est, comme on le voit aisément, nécessaire; car si la série au deuxième membre de (34) convergeait pour une valeur de x telle que $\sigma < -1$, elle représenterait une fonction holomorphe aux environs de $x = -1$, pendant que la série au premier membre représente une fonction qui admet en général $x = -1$ comme pôle simple, s'il est situé à l'intérieur du domaine de convergence. Quant à la condition $\sigma > \lambda$ nous verrons dans le § 10 qu'elle peut se remplacer par une autre qui est moins restrictive.

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur le fait que $\omega > 1$; nous allons maintenant étudier la même transformation en passant par l'intermédiaire d'une intégrale définie et nous verrons que la série transformée cesse généralement de converger quand ω prend des valeurs inférieures à 1 ou des valeurs complexes.

§ 10. Soit ϱ un nombre positif plus grand que 1, et soit η un nombre positif. Soit $\varphi(z)$ une fonction analytique de z holomorphe à l'intérieur du secteur AoB

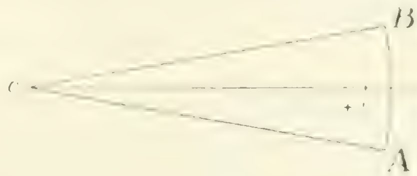


Fig. 1.

comprenant la ligne de o à 1, ayant l'angle au sommet AoB égal à $\pi\eta$ et avec le rayon $oB = \varrho$. Supposons en plus qu'il existe un nombre non-négatif k tel qu'on ait *uniformément*

$$\lim_{z=0} z^k \varphi(z) = 0, \tag{35}$$

z tendant vers zéro en restant à l'intérieur du secteur AoB.

Considérons l'intégrale

$$\Omega(x) = \int_0^1 z^{x-1} \varphi(z)\, dz, \tag{36}$$

où l'on a choisi l'argument de z égal à zéro le long de la ligne d'intégration. Elle est certainement convergente, si $\sigma > k$, et elle définit dans ce domaine une branche d'une fonction analytique $\Omega(x)$. Nous allons démontrer que cette fonction est développable en série de facultés. Pour le voir faisons un changement de variable dans l'intégrale (36). Soit, comme plus haut, ω un nombre réel et plus grand que 1, et posons $z = t^{\frac{1}{\omega}}$ en prenant la détermination réelle de $t^{\frac{1}{\omega}}$; on trouve

$$\Omega(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^1 t^{\frac{x}{\omega}-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)dt. \tag{37}$$

Prenons l'axe des nombres réels et négatifs comme coupure. La transformation[1] effectue une représentation conforme du plan des t sur un secteur d'angle $\frac{2\pi}{\omega}$ du plan des z. Posons

$$t = re^{iv}, \qquad z = Re^{i\Phi}.$$

Le cercle $|t - 1| = 1$ a pour équation $r = 2\cos v$ et son image dans le plan des z sera

$$R^{\omega} = 2\cos\omega\Phi; \tag{38}$$

c'est une courbe fermée, symmétrique par rapport à l'axe des nombres réels, coupant celui-ci dans $z = 2^{\frac{1}{\omega}}$ et dans $z = 0$, et formant dans ce dernier point avec l'axe des abscisses un angle égal à $\frac{\pi}{2\omega}$. Quand ω tend vers l'infini, la courbe s'approche indéfiniment de la droite de 1 à 0. Mais $\varphi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur du secteur $A\,0\,B$ on peut, quelque petit que soit l'angle au sommet α_1, choisir ω suffisamment grand pour que $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit holomorphe à l'intérieur et sur le contour du cercle $|t - 1| = 1$, en exceptant seulement le point $t = 0$; il suffit en effet que les inégalités $\omega > \frac{1}{l}$, $\varrho^{\omega} > 2$ soient satisfaites. Il est facile de trouver une limite supérieure de l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur ce cercle. Par hypothèse on a:

$$\lim_{t=0} t^{\frac{k}{\omega}}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0,$$

t tendant vers zéro par des valeurs intérieures au cercle $|t - 1| = 1$ ou le long de ce cercle. Comme $t = 0$ est l'unique point singulier sur le cercle, il résulte du théorème II § 1 que l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle est $< \frac{k}{\omega} + 1$, k étant $\geqq 0$. Cela posé, formons le développement

$$\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = c_1 + c_2(1 - t) + c_3(1 - t)^2 + c_4(1 - t)^3 + \cdots; \tag{39}$$

[1] Cette transformation a été appliquée par M. Mittag-Leffler dans ses recherches profondes sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène et sur l'intégrale de Laplace-Abel. Acta mathematica t. 29, p. 116 et p. 154, 1904. Note 5. Voir aussi M. Riesz, ibid. t. 35 p. 257, 1911. M. Mittag-Leffler a bien voulu nous communiquer que cette même transformation joue également un rôle important dans ses recherches plus récentes (Note 6).

il est convergent pour $|t-1|<1$, ω étant choisi comme il a été dit plus haut. Substituons cette série dans (37) et intégrons terme par terme, on trouve

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{c_{s+1}\,\omega^s\, s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)}. \tag{40}$$

D'après le théorème III cette série est convergente, si $\sigma > k$. Pour justifier l'intégration terme par terme il suffit de remarquer que la série

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} |c_{s+1}| \int_0^1 \left|t^{\frac{x}{\omega}-1}(1-t)^s\right| dt, \tag{41}$$

est convergente, si $\sigma > k + \omega$; en effet l'ordre de $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle de convergence est $\leq \frac{k}{\omega} + 1$; le terme général de la série (41) est donc plus petit que $C \cdot s^{\frac{k-\sigma}{\omega}+\varepsilon}$, quel que soit $\varepsilon > 0$, C étant un nombre positif indépendant de s.

On a donc le théorème suivant:

Théorème VII. *A toute intégrale de la forme* (36), $\varphi(z)$ *satisfaisant à la condition* (35) *et étant holomorphe à l'intérieur du secteur* AoB, *ayant l'angle au sommet aussi petit que ce soit, il appartient un nombre non-négatif* Θ *tel que* $\Omega(x)$ *admet un développement en série de facultés de la forme* (40), *convergent pour* $\sigma > k$ *pourvu que l'on ait* $\omega > \Theta$, *pendant qu'un tel développement n'existe plus si* $\omega < \Theta$.

En effet, nous prenons pour Θ le plus petit nombre tel que $\varphi(z)$ soit holomorphe à l'intérieur du domaine limité par la courbe $R^\Theta = 2\cos\Theta\Phi$ et que la condition (35) soit satisfaite pour une valeur finie de k. Si $\omega > \Theta$, $t=0$ sera le seul point singulier sur le cercle $|t-1|=1$, et $\Omega(x)$ admet le développement (40). Si $\omega = \Theta$ le développement peut exister ou non, mais s'il existe, son domaine de convergence est généralement plus petit que dans le cas $\omega > \Theta$, car dans le cas $\omega = \Theta$ il se trouve sur le cercle de convergence $|t-1|=1$ de la série (39) un nombre fini ou infini de points singuliers. Si l'un au moins de ces points singuliers est d'ordre $+\infty$ le développement n'existe plus; mais si $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est d'ordre fini sur le cercle $|t-1|=1$, cet ordre sera généralement plus élevé que dans le cas $\omega > \Theta$, et l'abscisse de convergence dépend non de l'ordre dans $t=0$, mais de l'ordre total sur le cercle de convergence.

Ce résultat nous permet de préciser le théorème VI. Supposons que la fonction $\Omega(x)$ admette un développement de la forme (1) ayant λ pour abscisse

de convergence et λ_r ($\lambda_r < \lambda$) pour abscisse de sommabilité d'ordre r. Nous allons démontrer que la série au second membre de (34) est convergente, si $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$.

En effet, $\Omega(x)$ admet une représentation de la forme

$$\Omega(x) = \int_0^1 z^{x-1}\varphi(z)\,dz,$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe à l'intérieur du cercle $|z - 1| = 1$. L'ordre de $z^{-r-1}\varphi(z)$ sur ce cercle est d'après le § 8 égal à $\lambda_r + r + 1$, si $\lambda_r > 0$; mais si $\lambda_r < 0$, cet ordre est $< r + 1$. Soit λ'_r le plus grand des nombres λ_r et 0, le lemme **E** du § 1 nous permet donc de conclure qu'on a uniformément

$$\lim_{z=0} z^{\lambda'_r + r + 1}\varphi(z) = 0,$$

z tendant vers zéro par des valeurs intérieures au cercle de convergence et telles que $\frac{\pi}{2} - \eta > \operatorname{Arg} z \geq -\frac{\pi}{2} + \eta$, où η désigne un nombre positif qu'on peut choisir aussi petit qu'on le veut. Cela posé, soit ω un nombre positif quelconque > 1, et posons $z = t^{\frac{1}{\omega}}$; la fonction $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t - 1| = 1$, et elle admet sur ce cercle l'unique point singulier $t = 0$, qui, d'après le théorème **II** § 1, est d'ordre au plus égal à $\frac{\lambda'_r + \varepsilon}{\omega} + 1$. Il en résulte que l'abscisse de convergence de la série au second membre de (34) est $\leq \lambda'_r + \varepsilon$, et cela est vrai quelque petit que soit ε; r est ici un nombre entier (l'ordre de sommabilité) qu'on peut choisir aussi grand qu'on le veut. Quand r tend vers l'infini, λ_r tend vers une limite $\varDelta$. *Nous pouvons donc conclure que la série est convergente, si* $\sigma > \varDelta$, $\sigma > 0$. On voit par là que la transformation (34) permet de prolonger analytiquement la fonction $\Omega(x)$ au moins aussi loin que la transformation (10), pourvu que $\varDelta$ ne soit pas < 0. D'autre part l'étude de la série double $\sum u_{p,q}$ nous a montré que la série au second membre de (34) est absolument convergente pour $\sigma > -1$, si $\lambda < -1$.

§ 11. Nous allons maintenant étudier un cas particulier qu'on rencontre dans la théorie des équations linéaires aux différences finies.[1] Soit $v(z)$ une branche d'une fonction analytique, holomorphe sur l'axe des nombres positifs entre *zéro* et *un* et admettant au voisinage de $z = 0$ une représentation de la forme

[1] Comparez ma Thèse l. c. p. 22 et p. 40.

$$v(z) = \sum_{i=1}^{i=p} z^{\alpha_i} \{\psi_{i,0}(z) + \psi_{i,1}(z) \log z + \cdots + \psi_{i,r}(z) \log^r z\},$$

les $\psi_{i,s}(z)$ étant des fonctions holomorphes au voisinage de $z = 0$ et telles que l'un au moins des nombres $\psi_{i,s}(0)$ $(s = 0, 1, \ldots, r)$ soit différent de zéro. Au voisinage de $z = 1$ on suppose que $v(z)$ soit de la forme

$$v(z) = (1 - z)^\beta \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant holomorphe dans $z = 1$ et différent de zéro. Les α_i et les β sont des nombres complexes quelconques; soit pour fixer les idées

$$\Re(\alpha_1) < \Re(\alpha_2) \leq \Re(\alpha_3) \leq \cdots.$$

Soit C un contour composé de l'axe des nombres positifs entre zéro et $1 - \varepsilon$, un petit cercle autour de $+1$ avec le rayon ε et laissant tous les autres points singuliers à l'extérieur et enfin la droite de $1 - \varepsilon$ à zéro; le petit cercle doit être parcouru dans le sens positif. Considérons l'intégrale

$$u(x) = \int_C z^{x-1} v(z)\, dz.$$

Soit ω un nombre positif et posons $z = t^{\frac{1}{\omega}}$; choisissons pour $t^{\frac{1}{\omega}}$ la détermination qui est réelle le long de la première partie de la ligne d'intégration. L'image du contour C dans le plan des t sera un lacet autour de $t = 1$ qu'on peut ramener au contour C par une déformation continue sans franchir aucun point singulier. On trouve donc

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \int_C t^{\frac{x}{\omega}-1} v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) dt. \tag{42}$$

Choisissons ω suffisamment grand pour que $v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ soit holomorphe à l'intérieur du cercle $|t - 1| = 1$ et sur ce cercle en exceptant les points $t = 0$ et $t = 1$. À l'intérieur du cercle $v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ se représente par un développement de la forme

$$v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = \omega (1 - t)^\beta \varphi_1(t) = \omega (1 - t)^\beta \{A_0 + A_1 (1 - t) + A_2 (1 - t)^2 + \cdots\}, \tag{43}$$

A_0 étant par hypothèse différent de zéro. Nous avons vu dans le § 2 que l'ordre

de $v\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$, dans le point $t = 0$, est égal à $k = -\Re\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)$. Il en est donc de même de $\varphi_1(t)$; on a, par conséquent, l'inégalité

$$|A_n| < K\, n^{k+\epsilon-1}, \tag{44}$$

K étant une constante indépendante de n. Substituons le développement (43) dans l'expression (42) et intégrons; on trouve

$$\begin{aligned} u(x) = (1 - e^{2\pi i\beta}) \frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta + 1\right)} \Bigg\{ A_0 + A_1 \frac{(\beta+1)\,\omega}{x + \omega\beta + \omega} + \\ + A_2 \frac{(\beta+1)(\beta+2)\,\omega^2}{(x+\omega\beta+\omega)(x+\omega\beta+2\omega)} + \cdots \Bigg\}, \end{aligned} \tag{45}$$

où la série de facultés, en vertu de l'inégalité (44), converge absolument si $\Re(x+\alpha_1) > 0$. L'intégration terme par terme se justifie tout à fait de la même manière que dans le § 10.

Considérons de même l'intégrale

$$u^{(1)}(x) = \int_C z^{x-1}\, v^{(1)}(z)\, dz,$$

où

$$v^{(1)}(z) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left[(1-z)^\beta \varphi(z)\right] = (1-z)^\beta \left[\varphi^{(1)}(z) + \varphi(z)\log(1-z)\right],$$

$\varphi(z)$ et $\varphi^{(1)}(z)$ étant holomorphes au voisinage de $z = 1$, et où l'on suppose que $v^{(1)}(z)$ soit de la même forme que $v(z)$ au voisinage de $z = 0$. En désignant par $\varphi_2(t)$ une fonction holomorphe au voisinage de $t = 1$, on voit que $v^{(1)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est de la forme

$$v^{(1)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = (1-t)^\beta \left\{\varphi_2(t) + \varphi_1(t)\log(1-t)\right\}.$$

L'ordre de $v^{(1)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ et de $\varphi_1(t)$ dans le point $t = 0$ est égal à $-\Re\left(\frac{\alpha_1}{\omega}\right)$; on en conclut sans difficultés qu'il en est de même de $\varphi_2(t)$. L'intégrale

$$\frac{1}{\omega}\int_C t^{\frac{x}{\omega}-1}(1-t)^\beta \varphi_2(t)\, dt,$$

se représente donc par un développement de la même forme que (45), ayant le même domaine de convergence. Il nous reste à étudier l'intégrale:

$$\int_C t^{\frac{x}{\omega}-1} (1-t)^\beta \log (1-t)\, \varphi_1(t)\, dt;$$

en substituant au lieu de $\varphi_1(t)$ la série de puissances (43), on voit que cette intégrale peut se décomposer en trois parties dont la première est de la forme (45) pendant que la deuxième est

$$(1-e^{2\pi i\beta})\,\Gamma(\beta+1)\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\right]\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\dots(x+\omega\beta+s\omega)};$$

la troisième partie se représente par un développement de la forme

$$(e^{2\pi i\beta}-1)\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\dots(x+\omega\beta+s\omega)}\left(\frac{\omega}{x+\omega\beta+\omega}+\dots+\frac{\omega}{x+\omega\beta+\omega s}\right);$$

les séries qui entrent dans ces trois expressions convergent absolument, si $\Re(x+\alpha_1)>0$, mais la dernière série n'est pas une série de facultés. Nous allons démontrer dans le § 17 que cette série peut se représenter par un développement de la forme (45), convergent pourvu que $\Re(x+\alpha_1)>0$, $\Re(x+\omega\beta+\omega)>0$. Notre intégrale $u^{(1)}(x)$ se représente donc par un développement de la forme

$$u^{(1)}(x) = (1-e^{2\pi i\beta})\,\Gamma(\beta+1)\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\right]\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\dots(x+\omega\beta+s\omega)}+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right)}\sum_{s=0}^{s=\infty} A_s^{(1)} \frac{(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+s)\,\omega^s}{(x+\omega\beta+\omega)\dots(x+\omega\beta+s\omega)}.$$

En appliquant parfaitement le même raisonnement à l'intégrale plus générale

$$u^{(r)}(x) = \int_C z^{x-1}\, v^{(r)}(z)\, dz,$$

où l'on a posé

$$v^{(r)}(z) = \frac{\partial^r}{\partial \beta^r}[(1-z)^\beta \varphi(z)] = (1-z)^\beta [\varphi^{(r)}(z) + \varphi^{(r-1)}(z) \log(1-z) + \cdots + \varphi(z) \log^r(1-z)],$$

on voit que cette intégrale se représente par un développement de la forme

$$u^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{i=r} \Omega_i(x) \frac{\partial^i}{\partial \beta^i} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{\omega} + \beta + 1\right)} \right],$$

les $\Omega_i(x)$ étant des séries de facultés de la forme

$$\Omega_i(x) = A_0^{(i)} + \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s^{(i)} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s)}{(x+\omega\beta+\omega)\ldots(x+\omega\beta+s\omega)},$$

absolument convergentes pourvu que $\Re(x+\alpha_1) > 0$, $\Re(x+\omega\beta+\omega) > 0$. Si l'on a $\varphi(1) \neq 0$, le terme constant $A_0^{(r)}$ de la série de facultés $\Omega_r(x)$ est différent de zéro.

§ 12. C'est là l'expression générale d'une solution d'une équation linéaire aux différences finies à coefficients rationnels. La forme que nous venons de donner à cette expression est celle qui se présente immédiatement à l'esprit et le calcul effectif des coefficients $A_s^{(i)}$ se fait le plus aisément, si l'on conserve cette forme. Mais si l'on veut mettre plus en évidence l'analogie entre les solutions des équations aux différences et les solutions des équations différentielles linéaires, il convient de donner à ces expressions une forme un peu différente.

Considérons d'abord le rapport entre deux fonctions gamma et démontrons qu'il se développe en série de facultés. Soit $\sigma > 0$, on a:

$$\frac{\Gamma(\beta+1)}{x^{\beta+1}} = \int_0^1 t^{x-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^\beta dt,$$

on le vérifie aisément en posant $t = e^{-\frac{z}{x}}$; l'intégrale se ramène par là sans difficultés à l'intégrale d'Euler de la fonction $\Gamma(\beta+1)$. Désignons par $\psi_s(\beta)$ les polynômes de Stirling,[1] définis par l'équation

$$\left(\log\frac{1}{t}\right)^\beta = (1-t)^\beta + \beta \sum_{s=0}^{\infty} \psi_s(\beta+s)(1-t)^{\beta+s+1}.$$

[1] Ces polynômes ont été étudiés par M. Nielsen, l. c. Handbuch etc., p. 71—77.

L'ordre de $\left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta$ dans le point $t = 0$ est égal à zéro; les polynômes de Stirling satisfont donc à l'inégalité

$$|\psi_s(\beta + s)| < \frac{K}{s^{1-\varepsilon}}, \tag{46}$$

ε étant > 0, et K étant un nombre positif indépendant de s. Substituons le développement de $\left(\log \frac{1}{t}\right)^\beta$ dans l'intégrale susdite et intégrons terme par terme; on trouve la série de facultés[1]

$$\frac{\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x)\, x^{\beta+1}} = 1 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(\beta+s) \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+s+1)}{(x+\beta+1)(x+\beta+2)\ldots(x+\beta+s+1)},^{2} \tag{47}$$

---

[1] Dans ma Thèse (l. c. p. 15) j'ai démontré que le rapport entre deux fonctions gamma se représente asymptotiquement par la série de puissances

$$\frac{\Gamma(x)\, x^\beta}{\Gamma(x+\beta)} \sim 1 - \sum_{s=0}^{s=\infty} \psi_s(-\beta) \frac{(s+\beta)(s+\beta-1)\ldots(\beta-1)}{x^{s+1}}$$

où les coefficients ψ_s sont également les polynômes de Stirling. Mais cette série de puissances est divergente, elle représente la fonction au premier membre asymptotiquement dans l'angle $\pi - \varepsilon > \operatorname{Arg} x > -\pi + \varepsilon$.

[2] Remarquons en passant qu'on peut déduire de cette série une expression remarquable de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. Multiplions les deux membres par $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta+1)}$ et rappelons qu'on a

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\Gamma(x+\nu)}{\Gamma(x+\beta+\nu+1)} = \frac{\Gamma(x)}{\beta\, \Gamma(x+\beta)}$$

pourvu que $\Re(\beta) > 0$. On trouve en sommant par rapport à x

$$\zeta(\beta+1, x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(x+\nu)^{\beta+1}} = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta)} \left\{ \frac{1}{\beta} + \frac{\beta\psi_0(\beta)}{x+\beta} + \frac{\beta(\beta+1)\psi_1(\beta+1)}{(x+\beta)(x+\beta+1)} + \text{[illegible]} \right\}$$

En vertu de l'inégalité (46) la série de facultés converge absolument pourvu que $\Re(x) > 0$, quel que soit β. En posant $x = 1$ et en écrivant s au lieu de β on trouve

$$\Gamma(s)\,\zeta(s+1) = \Gamma(s) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^s} = \frac{1}{s^2} + \frac{\psi_0(s)}{s+1} + \frac{\psi_1(s+1)}{s+2} + \frac{\psi_2(s+2)}{s+3} + \frac{\psi_3(s+3)}{s+4} + \ldots$$

Cette égalité se trouve démontrée pourvu que $\Re(s) > 0$; mais la série au second membre est, en vertu de l'inégalité (46), absolument et uniformément convergente dans tout domaine fini ne

qui est absolument convergente si $\Re(x) > 0$. On en conclut aisément qu'il existe un développement de la forme

$$\frac{\Gamma(x)\, x^{\beta+1}}{\Gamma(x+\beta+1)} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{a_s}{x(x+1)\ldots(x+s)},$$

la série étant convergente pourvu que $\Re(x+\beta+1) > 0$ et $\Re(x) > 0$. La série est d'ailleurs uniformément convergente par rapport à β; on peut donc dériver un nombre quelconque de fois par rapport à β et l'on trouve un développement de la forme

$$x^{\beta+1} \frac{\partial^n}{\partial \beta^n}\left[\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\beta+1)}\right] =$$

$$= F_0(x) + \log x \,.\, F_1(x) + \log^2 x \,.\, F_2(x) + \cdots + (-1)^n \log^n(x)\,[1 + F_n(x)],$$

où les $F_i(x)$ se représentent par des séries de facultés de la forme (1), convergentes pourvu que $\Re(x+\beta+1) > 0$, $\Re(x) > 0$. Substituons ces développements dans l'expression de $u^{(r)}(x)$ donnée plus haut et effectuons les multiplications;[1] dans le § 16 nous allons démontrer que le produit de deux séries de facultés, convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés, convergente pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$. On voit donc que $u^{(r)}(x)$ se représente par un développement de la forme

$$u^{(r)}(x) = x^{-\beta-1} \sum_{i=0}^{r} \Omega_i(x) \log^i x,$$

les $\Omega_i(x)$ étant des séries de facultés de la forme

contenant aucun des points $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$. Elle représente, par conséquent, la fonction $\Gamma(s)\,\zeta(s+1)$ pour toute valeur de s différente de $0, -1, -2, -3, \ldots$.

De la série (47) on peut déduire un développement analogue pour la fonction $\Gamma(s)$. Posons en effet $x = 1$ et $\beta = s$, on trouve la série

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{\psi_0(s)}{s+2} + \frac{\psi_1(s+1)}{s+3} + \frac{\psi_2(s+2)}{s+4} + \cdots,$$

qui est absolument convergente pour toute valeur de s différente de $0, -1, -2, \ldots$

[1] Il faut transformer d'abord les $\Omega_i(x)$ en séries de facultés de la forme (1); ces séries convergent également, si $\Re(x+\sigma_1) > 0$, $\Re\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right) > 0$; on le voit immédiatement quand on se rappelle l'hypothèse faite relativement à la manière dont se comporte $v^{(r)}(z)$ au voisinage de $z = 0$.

$$\Omega_i(x) = A_0^{(i)} + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s^{(i)}}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)},$$

convergentes pourvu qu'on a $\Re(x+\alpha_1) > 0$, $\Re\left(\frac{x}{\omega}+\beta+1\right) > 0$, $\Re\left(\frac{x}{\omega}\right) > 0$.

La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur le fait que $v^{(r)}(z)$ est holomorphe sur l'axe des nombres positifs entre *zéro* et *un*. Mais s'il se trouve un ou plusieurs points singuliers de $v^{(r)}(z)$ entre *zéro* et *un* et si l'on déforme le contour C de manière a éviter ces points singuliers, l'intégrale $u^{(r)}(x)$ existe toujours mais les développements susdits cessent de converger. Ce cas d'exception ne présente pourtant aucune difficulté. Il suffit de donner à ω une valeur complexe avec un argument très petit positif ou négatif. Quand on se rappelle la manière dont se comporte $v^{(r)}(z)$ au voisinage de $z=0$ on voit[1] que l'intégrale $u^{(r)}(x)$ se ramène à une intégrale de la type précedente pourvu qu'on a choisi le module de ω suffisamment grand. Dans le § 2 nous avons démontré que l'ordre de $v^{(r)}\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ dans le point $t=0$ est égal au plus grand des nombres

$$-\Re\left(\frac{\alpha_i}{\omega}\right) \qquad (i=1,2,\ldots,p).$$

$u^{(r)}(x)$ se représente donc par un développement de la même forme que dans le cas où ω était positif, seulement il faut remplacer la condition de convergence $\Re(x+\alpha_1) > 0$ par les conditions $\Re\left(\frac{x+\alpha_i}{\omega}\right) > 0$ $(i=1,2,\ldots,p)$.

CHAPITRE IV.

§ 13. Retournons maintenant au cas général. Soit $\Omega(x)$ une fonction admettant une représentation de la forme

$$\Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\,\omega^s\, s!}{x(x+\omega)\ldots(x+s\omega)}, \tag{48}$$

[1] Pour plus de détails voir J. Horn: Fakultätenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Mathematische Annalen t. 71 p. 510—532, 1912. Dans ce Mémoire M. J. Horn démontre par des considérations du même ordre que celles que nous venons d'exposer que les solutions irrégulières des équations différentielles linéaires se représentent par des séries de facultés convergentes.

ω étant un nombre positif, la série ayant la droite de convergence $\sigma=\lambda$. Soit k un nombre positif plus grand que λ. Posons

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} t^{-z}\Omega(z)\,dz=F(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\xi z}\Omega(z)\,dz. \tag{49}$$

Nous avons vu que $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est une fonction analytique de t, holomorphe pour $|t-1|<1$, et que l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle $|t-1|=1$ est égal à $\frac{\lambda}{\omega}+1$, si $\lambda>0$. $\varphi(t)$ est donc holomorphe dans un secteur tel que $A\,o\,B$ (fig. 1) et d'après E § 1 on a uniformément

$$\lim_{t=0} t^k\varphi(t)=0, \tag{50}$$

t tendant vers zéro en restant dans l'angle $A\,o\,B$. Soit

$$\Omega(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{\mu(x)}{x(x+1)}, \tag{51}$$

nous avons également vu que $\mu(x)$ est une fonction holomorphe pour $\sigma\geq k$ et dont le module admet une borne supérieure fixe dans ce domaine. D'autre part, ces deux conditions remplies, on peut conclure à l'existence du développement (48). En effet, de (51) résulte que l'on a:

$$\Omega(x)=\int\limits_0^1 t^{x-1}\varphi(t)\,dt,$$

$\varphi(t)$ ayant la signification indiquée par l'équation (49). Mais cette intégrale admet d'après le théorème VII un développement de la forme (48), convergent pour $\sigma>k$. Si l'on considère la fonction $F(\xi)$ au lieu de $\varphi(t)$ il faut remplacer le secteur $A\,o\,B$ par une bande $CDEF$

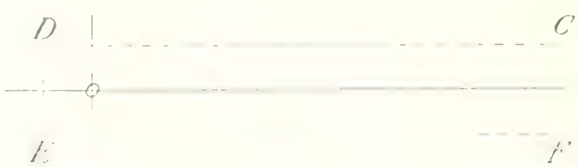


Fig. 2

limitée par deux demi-droites DC et EF parallèles à l'axe des nombres positifs et comprenant cet axe (y compris le point $\xi=0$) dans son intérieur. La largeur

DE de la bande peut d'ailleurs être aussi petite que ce soit. On a donc le théorème suivant:

Théorème VIII. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction analytique $\Omega(x)$ admette une représentation par une série de facultés de la forme* (48) *sont:*

1°. *Que la fonction $\Omega(x)$ admette une représentation de la forme* (51), *$\mu(x)$ étant une fonction holomorphe et bornée dans le demi-plan $\sigma > k$, k étant un nombre positif.*

2°. *Que la fonction $F(\xi)$, définie pour les valeurs positives de ξ par l'équation* (49), *soit une fonction analytique de ξ, holomorphe dans une bande telle que $CDEF$ et satisfaisante à la condition*

$$\lim_{\xi=\infty} e^{-k\xi} F(\xi) = 0, \tag{52}$$

qui doit avoir lieu uniformément dans la bande.

En choisissant ω suffisamment grand, la série sera convergente, si $\sigma > k$. Les conditions 1° et 2° ne sont d'ailleurs pas tout à fait indépendantes l'une de l'autre.

§ 14. L'existence du développement (48) étant donnée, nous avons déjà vu que l'abscisse de convergence peut se déterminer à l'aide des coefficients de la série ou bien à l'aide de l'ordre de la fonction $t^{-1}\varphi(t)$. Mais il se pose le problème suivant, encore plus important: Peut on déterminer l'abscisse de convergence à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction $\Omega(x)$? Nous allons voir que cette question peut se résoudre par l'affirmative, si l'on veut se borner à une détermination approximative, mais où l'on peut rendre l'approximation aussi grande qu'on le veut en choisissant ω suffisamment grand.

Supposons que l'on sait relativement à la fonction $\Omega(x)$:

1°. Qu'elle admet une représentation de la forme $\Omega(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{\mu(x)}{x(x+1)}$, $\mu(x)$ étant une fonction holomorphe et bornée dans le domaine $\sigma > l > 0$.

2°. Qu'elle admet un développement de la forme (1) convergent pour $\sigma > L > l$.

Étudions la fonction $\varphi(t)$. D'après le § 7 elle se représente par l'expression

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-x}\,\Omega(x)\,dx = a_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} t^{-x}\,\frac{\mu(x)}{x(x+1)}\,dx. \tag{53}$$

où $|u(z)|$ par hypothèse reste plus petit qu'une constante fixe le long de la ligne d'intégration. Posons $z = l + i\zeta$ on trouve:

$$t^l \varphi(t) = a_1 t^l + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-i\zeta} \frac{u(l + i\zeta)\, d\zeta}{(l + i\zeta)(l + i\zeta + 1)};$$

cette intégrale étant absolument convergente, on voit qu'on a pour $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t=0} t^{l+\varepsilon} \varphi(t) = 0, \tag{54}$$

t tendant vers zéro le long de l'axe des nombres positifs.

De la seconde hypothèse relativement à la fonction $\Omega(x)$ il résulte d'autre part que $t^{-1}\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t - 1| = 1$ et d'ordre $L + 1$ sur ce cercle. On en conclut qu'on a uniformément:

$$\lim_{t=0} t^{L+\varepsilon} \varphi(t) = 0, \tag{55}$$

t tendant vers zéro en restant dans l'angle $\frac{\pi - \eta}{2} \geq \operatorname{Arg} t \geq -\frac{\pi - \eta}{2}$, η étant un nombre positif et très petit.

Des égalités (54) et (55) on conclut, en vertu d'un théorème général de la théorie des fonctions dû à MM. E. Phragmén[1] et Ernst Lindelöf,[1] qu'on a uniformément

$$\lim_{r=0} r^{l+\varepsilon+\frac{L-l}{\frac{\pi}{2}-\eta}|v|} \varphi(re^{iv}) = 0,$$

dans l'angle $\frac{\pi}{2} - \eta > v > -\frac{\pi}{2} + \eta$. Il en résulte, en désignant par ω un nombre positif supérieur à 1, qu'on a uniformément dans l'angle $\frac{\pi}{2} \geq \operatorname{Arg} t > -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{t=0} t^{\frac{l+\varepsilon'+(L-l):\omega}{\omega}} \varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right) = 0, \tag{56}$$

pour tout $\varepsilon' > 0$. L'exposant de t est ici positif, car on a par hypothèse $L > l > 0$; $\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ est holomorphe sur le cercle $|t - 1| = 1$, en exceptant le point $t = 0$. Le

[1] Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta mathematica t. 31, p. 381—406, 1908.

théorème II § 1 nous permet donc de conclure que l'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur ce cercle est $\leqq 1 + \dfrac{l+\varepsilon'+(L-l):\omega}{\omega}$. La fonction $\Omega(x)$ admet, par conséquent, un développement de la forme (48) qui est convergent pour $\sigma > l + \dfrac{L-l}{\omega}$. Quelque petit que soit le nombre positif ε_1 on peut donc toujours choisir ω assez grand pour que la série converge dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon_1$. C'est le résultat que nous avions en vue; mais il n'est pas sans intérêt de remarquer encore que la première des hypothèses faites relativement à la fonction $\Omega(x)$ peut se remplacer par une autre qui est moins restrictive. Supposons en effet que la fonction $\mu(x)$ cesse d'être bornée dans la bande $l-\varepsilon \leq \sigma \leq l$ quelque petit que soit $\varepsilon > 0$ et qu'il existe un nombre positif l_1, inférieur à l et tel que $\mu(x)$ soit holomorphe et d'ordre fini par rapport à l'ordinat τ dans la bande $l_1 < \sigma < l$ c'est à dire qu'il existe une constante positive c telle que

$$\lim_{|\tau|=\infty} x^{-c}\mu(x) = 0,$$

où x tend vers l'infini en restant dans la bande $l_1 \leqq \sigma \leqq l$. Je veux démontrer que cette hypothèse amène à une contradiction. En effet des propriétés asymptotiques connues[1] des fonctions analytiques il résulte qu'il existe un nombre $l_2\,(l_1 < l_2 < l)$ tel qu'on a uniformément

$$\lim_{|\tau|=\infty} x^{-\vartheta}\mu(x) = 0,$$

dans la bande $l_2 \leqq \sigma \leqq l$, ϑ désignant un nombre positif inférieur à 1 $(0 < \vartheta < 1)$. On peut maintenant dans le second membre de (53) remplacer l par l_2 sans changer la valeur de l'intégrale. Le raisonnement que nous venons de faire permet donc de conclure que le développement (48) est convergent pour $\sigma > l_2 + \varepsilon$ en choisissant ω convenablement; mais il en résulte que $\mu(x)$ est bornée dans le domaine $\sigma > l_2 + \varepsilon$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite. Si la fonction $\mu(x)$ n'est pas bornée dans la bande $l_1 < \sigma < l$, elle ne peut donc ni non plus être d'ordre fini par rapport à l'ordinat.

Résumons ces résultats en le théorème suivant:

Théorème IX. *Soit $\Omega(x)$ une fonction analytique possédant les propriétés suivantes:*

[1] Landau l. c. Handbuch etc., p. 849—853.

1°. *Elle est holomorphe et bornée dans le demi-plan $\sigma > l + \varepsilon > 0$ pendant que l'une au moins de ces conditions cesse d'être remplie dans la bande $l + \varepsilon > \sigma > l - \varepsilon$ quelque petit que soit ε.*

2°. *Elle admet un développement en série de facultés de la forme* (1), *convergente pour $\sigma > L > l$.*

La fonction $\Omega(x)$ se représente alors par une série de facultés de la forme (48), *ω étant > 1, et l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de la série satisfait à l'inégalité suivante:*

$$l + \frac{L - l}{\omega} > \lambda(\omega) > l. \tag{57}$$

Elle est égale à l ou supérieure à l d'une quantité qui tend vers zéro quand ω tend vers l'infini. Il en résulte en particulier que les égalités (18) *sont uniformément satisfaites dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$.*

On peut y ajouter la remarque que si la fonction $\Omega(x)$ est holomorphe dans la bande $l_1 \leq \sigma \leq l$ elle n'est pas d'ordre fini par rapport à l'ordinat dans cette bande.

Pour compléter ce théorème démontrons encore que l'inégalité (57) est aussi précise que possible. Pour le voir il suffit de donner l'exemple d'une fonction pour laquelle la limite supérieure de λ est réellement atteinte.

Considérons la fonction:

$$\Omega(x) = \int_0^1 t^{x-l-1} e^{i\gamma \log^2 t} dt, \tag{58}$$

l et γ étant des nombres positifs.

L'intégrale est absolument convergente, si $\sigma > l$, elle représente par conséquent une fonction holomorphe et bornée dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$, ε étant un nombre positif. Démontrons d'abord que $\Omega(x)$ est *une fonction entière de x.* Considérons l'intégrale complexe:

$$u(x) = \int_C t^{x-l-1} e^{i\gamma \log^2 t} dt,$$

où le chemin d'intégration C est un lacet issu du point $t = 1$, entourant le point $t = 0$ et parcouru dans le sens positif. Soit $\sigma > l + 4\pi\gamma$; le lacet C peut, par une déformation continue, se remplacer par l'axe des nombres positifs entre *zéro* et *un* parcouru deux fois. On trouve donc

$$u(x) = \int_C t^{x-l-1}\, e^{i\gamma \log^2 t}\, dt = -\Omega(x) + e^{2\pi i(x-l-2\pi\gamma)}\,\Omega(x - 4\pi\gamma).$$

Cette relation, qui peut s'écrire:

$$\Omega(x) = e^{-2\pi i(x-l-2\pi\gamma)}\left[u(x + 4\pi\gamma) + \Omega(x + 4\pi\gamma)\right], \tag{59}$$

est démontrée d'être vraie, si $\sigma > l + 4\pi\gamma$, mais elle doit subsister dans tout le plan. En effet $u(x)$ est une fonction entière de x, et $\Omega(x)$ est holomorphe pour $\sigma > l$; le second membre de (59) est par conséquent une fonction holomorphe pour $\sigma > l - 4\pi\gamma$. On démontre ainsi de proche en proche que $\Omega(x)$[1] est holomorphe dans tout le plan. $\Omega(x)$ est donc une fonction entière de x, qui est bornée dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$; elle admet, en vertu du théorème III, un développement de la forme (1); déterminons l'abscisse de convergence. En posant $t = re^{iv}$ on trouve

$$|t^{-1}\varphi(t)| = r^{-(l+1+2v\gamma)};$$

l'ordre de $t^{-1}\varphi(t)$ sur le cercle $|t - 1| = 1$ est donc $l + 1 + \pi\gamma$, et l'abscisse de convergence de la série (1) est par conséquent $\lambda = l + \pi\gamma$.

On voit de même que l'ordre de $t^{-n-1}\varphi(t)$ sur le cercle de convergence, n étant positif, est égal à $l + n + 1 + \pi\gamma$; il en résulte que les abscisses de sommabilités sont toutes égales à $l + \pi\gamma$:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = l.$$

La série (1) n'est pas sommable par des moyennes arithmétiques pour aucune valeur de x telle que $\sigma < l + \pi\gamma$ et pourtant la fonction et toutes ses dérivées par rapport à $\frac{1}{x}$ tendent uniformément vers une limite dans le domaine $\sigma > l + \varepsilon$. Appliquons maintenant la transformation (34).

On a

$$\left|t^{-1}\varphi\left(\frac{1}{t^{\omega}}\right)\right| = r^{-\left(1+\frac{l}{\omega}+\frac{2\gamma v}{\omega^2}\right)}.$$

[1] On peut d'ailleurs exprimer $\Omega(x)$ par une transcendente qui a été étudiée par *Laplace*.

$$L(x) = \int e^{-t^2}\, dt.$$

On trouve en effet

$$[illegible]$$

L'ordre de $t^{-1}\varphi\left(t^{\frac{1}{\omega}}\right)$ sur le cercle $|t-1|=1$ est donc égal à $1+\frac{l}{\omega}+\frac{\gamma\pi}{\omega^2}$; il en résulte que l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de la série

$$\int_0^1 t^{x-l-1} e^{i\gamma\log^2 t}\,dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_{s+1}\,\omega^s\, s!}{x\,(x+\omega)\ldots(x+s\omega)},$$

est égale à $l+\frac{\gamma\pi}{\omega}$, ω étant un nombre positif. Quand ω tend vers zéro, l'abscisse de convergence tend vers l'infini; quand ω tend vers l'infini, l'abscisse de convergence tend vers l, mais cette valeur n'est atteinte pour aucune valeur finie de ω. La série cesse de converger pour $\sigma = l$ parce que la quantité $\Omega(l-\varepsilon+i\tau)$ tend vers l'infini quand τ tend vers l'infini, et cela d'ordre exponentiel.

Cet exemple paraît assez remarquable quand on se rappelle les résultats obtenus par MM. Landau, Schnee et H. Bohr relativement au problème de convergence d'une série de Dirichlet $\psi(x)$ de la forme (9), c'est à dire au problème qui a pour objet, de déterminer l'abscisse de convergence de la série à l'aide de propriétés analytiques simples de la fonction qu'elle représente.

Tandis qu'on ne peut pas, à ce qu'il semble, déterminer la valeur précise ni de l'abscisse de convergence λ, ni des abscisses de sommabilités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ d'une série de Dirichlet $\psi(x)$ en connaissant seulement des propriétés analytiques simples de la fonction $\psi(x)$, M. H. Bohr[1] a démontré que la limite Λ vers laquelle tend les λ_r quand r tend vers l'infini, est un nombre caractéristique de la fonction $\psi(x)$ qui peut se déterminer de la connaissance des propriétés analytiques les plus simples de la fonction $\psi(x)$; il se trouve sur la droite $\sigma = \Lambda$ ou bien une singularité à distance finie ou bien cette droite joue un rôle essentiel pour la singularité à l'infini. Dans l'exemple ci-dessus on a $\lambda = \Lambda = l + \pi\gamma$, mais la fonction $\Omega(x)$, représentée par la série, est une fonction entière et les égalités (18) (qui sont en nombre infini) sont uniformément satisfaites quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine $\sigma > l+\varepsilon$, ε étant un nombre positif. Rien ne distingue, en apparence, la bande $l < \sigma < l + \pi\gamma$ du domaine de convergence $\sigma > l + \pi\gamma$, qui est ici identique au domaine de sommabilité par des moyennes arithmétiques. Il semble donc que la droite $\sigma = \Lambda$, limitant le domaine de sommabilité, joue un rôle bien moins essentiel pour les fonctions représentées par les séries de facultés que pour les fonctions représentées par les séries de Dirichlet, mais il serait intéressant d'approfondir cette question.

[1] l. c. Thèse p. 114—131 et Über die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichlet'schen Reihen. Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathem.-naturw. Klasse; Bd. CXIX. Abt. II a. Oktober 1910.

Tout récemment M. H. BOHR[1] a fait voir que la droite $\sigma = \lambda$, limitant le domaine de convergence absolue, joue également un rôle essentiel pour une certaine classe de séries de DIRICHLET de la forme $\sum a_s e^{-\lambda_s x}$. M. H. BOHR démontre en effet que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle série soit absolument convergente dans le domaine $\sigma \geq \lambda$, c'est que la fonction qu'elle représente soit holomorphe et bornée dans ce domaine.

Ce théorème remarquable n'est pas sans analogie avec le théorème IX.

§ 15. La fonction $\Omega(x)$ définie par la série (48) admet en général le point $x = \infty$ comme point singulier; le développement taylorien au voisinage de $x = \infty$ est donc généralement divergent, mais il représente la fonction $\Omega(x)$ asymptotiquement dans le demi-plan de convergence de la série. En effet, considérons les dérivées de la fonction $F(\xi)$, définie par l'intégrale (49); substituons dans cette intégrale, au lieu de $\Omega(z)$, l'expression

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{s+1}\, s!\, \omega^s}{z(z+\omega)\ldots(z+s\omega)} + R_n(z)$$

et intégrons terme par terme; on trouve en vertu de (25)

$$F(\xi) = \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{s+1}(1 - e^{-\omega\xi})^s + \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\xi z} R_n(z)\, dz; \tag{60}$$

soit r un entier plus petit que n, et dérivons r fois par rapport à ξ; on trouve:

$$F^{(r)}(\xi) = D_\xi^r \sum_{s=0}^{s=n-1} a_{s+1}(1 - e^{-\omega\xi})^s + \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\xi z} z^r R_n(z)\, dz,$$

où l'intégrale est absolument convergente, car nous avons vu dans le § 6 que $|z^{n+1} R_n(z)|$ reste plus petit qu'une constante fixe le long de la ligne d'intégration.

Le premier terme au second membre tend vers zéro quand ξ tend vers $+\infty$, et le module de l'intégrale reste plus petit que $Ce^{k\xi}$, C étant une constante. On a donc

$$\lim_{\xi = \infty} e^{-(k+\varepsilon)\xi} F^{(r)}(\xi) = 0,$$

ξ tendant vers l'infini le long de l'axe des nombres positifs, et r désignant un indice de dérivation quelconque.

[1] Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse DIRICHLET'scher Reihen. Acta mathematica t. 36, p. 1—44; 1912.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\Omega(x) = \int_0^l e^{-x\xi} F(\xi)\, d\xi.$$

Supposons que la partie réelle de x soit $> k$; on trouve, en intégrant par partie

$$\Omega(x) = \frac{F(0)}{x} + \frac{F'(0)}{x^2} + \frac{F''(0)}{x^3} + \cdots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{x^n} + \frac{1}{x^n} \int_0^l e^{-x\xi} F^{(n)}(\xi)\, d\xi. \tag{61}$$

Comme $F(\xi)$ admet en général des points singuliers à distance finie cette série est généralement divergente, mais on sait trouver une constante positive C telle que

$$|F^{(n)}(\xi)| < C e^{(k+\varepsilon)\xi},$$

le long de la ligne d'intégration; on a donc

$$\left| \int_0^l e^{-x\xi} F^{(n)}(\xi)\, d\xi \right| < \frac{C}{\sigma - k - \varepsilon},$$

et on en conclut que la série (61) représente $\Omega(x)$ asymptotiquement, quand x tend vers l'infini en restant dans le domaine $\sigma > k + \varepsilon$.

La fonction $\Omega(x)$ donne donc naissance à une série de puissances divergente et l'on voit qu'on peut en faire un usage légitime en la transformant en une série de facultés. Cette transformation, très facile à effectuer, a déjà été indiquée par Stirling;[1] c'est là peut-être la meilleure méthode de sommation surtout quand il s'agit d'un calcul numérique de $\Omega(x)$ pour des grandes valeurs de x parce que la série de facultés converge rapidement pour de telles valeurs de x quand on a choisi ω convenablement.

L'expression (61) montre qu'il y a une relation étroite entre la représentation d'une fonction par une série de facultés et l'importante méthode de sommation exponentielle de M. É. Borel. D'après la définition de M. É. Borel[2] la série divergente:

Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. London 1730. Comparez aussi J. L. W. V. Jensen: Nyt Tidsskrift for Mathematik, Bd. 2 B, p. 70 ff., 1891; Pincherle l. c. Sur les fonctions déterminantes, p. 54—57; et Nielsen l. c. Handbuch etc., p. 2

[2] Mémoire sur les séries divergentes. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Sér. 3, t. 16, p. 10—136. 1899. Leçons sur les séries divergentes. Paris 1901.

$$\Omega(x) \sim \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^3} + \cdots \tag{62}$$

est absolument et uniformément sommable, si la fonction associée

$$F(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!}x + \frac{A_2}{2!}x^2 + \frac{A_3}{3!}x^3 + \cdots$$

est holomorphe dans un angle comprenant l'axe des nombres positifs, et si l'on a uniformément

$$\lim_{x=\infty} e^{-kx} F^{(r)}(x) = 0, \tag{63}$$

dans cet angle, r désignant un indice de dérivation quelconque. La somme de la série est par définition

$$\Omega(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-\xi} F\left(\frac{\xi}{x}\right) d\xi = \int_0^\infty e^{-x\xi} F(\xi)\, d\xi. \tag{64}$$

Si l'on change légèrement la definition de M. É. Borel et substitue à l'angle comprenant l'axe des nombres positifs la bande susdite $DEFG$, ce qui n'a aucun inconvénient,[1] on voit *que les fonctions qui admettent un développement en série de facultés de la forme* (48) *sont les mêmes que celles qui donnent naissances à des séries de puissances de la forme* (61), *généralement divergentes, mais absolument et uniformément sommables.* Ou plus exactement, c'est la fonction que M. É. Borel attribue à la série divergente comme somme qui admet le développement en séries de facultés, mais il va sans dire qu'il y a une infinité de fonctions qui se représentent asymptotiquement par la série divergente.

CHAPITRE V.

§ 16. Pour établir une théorie passablement complète de la série de facultés il reste encore d'étudier comment elle se prête aux opérations fondamentales de

[1] Comme le montre M. É. Borel on peut même, du moins dans le cas où $F(x)$ est une fonction entière, se borner à supposer que les conditions susdites sont satisfaites le long de l'axe des nombres positifs. La fonction $\Omega(x)$ correspondante n'admet pas nécessairement un développement en série de facultés convergente. On connait l'application importante que M. É. Borel a fait de sa méthode de sommation exponentielle à la théorie des équations différentielles algébriques. Les séries de puissances divergentes qui satisfont formellement à ces équations sont telles que les conditions (63) sont satisfaites dans un angle fini. Les solutions correspondantes se représentent donc par des séries de facultés convergentes.

l'Analyse. L'addition et la soustraction ne présentent aucune difficulté. Le problème de la multiplication a été étudié par M. N. NIELSEN[1] dans plusieurs Mémoires mais sans que la question ait été éclaircie.[2]

Nous allons démontrer que le produit de deux séries de facultés, convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés, convergente pour $\sigma > \lambda$. Ce résultat paraît assez remarquable quand on se rappelle ceux, obtenus relativement à la multiplication de deux séries de DIRICHLET. Soient deux séries de DIRICHLET

$$\psi_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s^x}, \qquad \psi_2(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{b_s}{s^x},$$

convergentes pour $\sigma > 0$. Il a été demontré par STIELTJES, MM. E. LANDAU,[3] H. BOHR[4] et M. RIESZ[5] que le produit $\psi_1(x)\,\psi_2(x)$ se représente par une série de DIRICHLET convergente pour $\sigma > \frac{1}{2}$, et sommable par des moyennes arithmétiques dans la bande $\frac{1}{2} \geqq \sigma > 0$; *mais généralement la série cesse de converger dans cette bande.* Plus généralement, si $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$ sont tous les deux sommables par des moyennes arithmétiques d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda$, M. H. BOHR démontre que le produit $\psi_1(x)\,\psi_2(x)$ se représente par une série de DIRICHLET, sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre n dans le même demi-plan $\sigma > \lambda$, mais n est généralement supérieur à r.

Nous allons également étudier les séries de facultés non seulement dans leur demi-plan de convergence, mais aussi dans leurs demi-plans de sommabilité, ce qui ne complique pas sensiblement les démonstrations. Considérons deux séries de la forme[6]

$$\Omega_1(x) = a_0 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{65}$$

$$\Omega_2(x) = b_0 + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{b_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}, \tag{65 bis}$$

[1] Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei 17 jan. 1904 et l. c. Handbuch etc., p. 254.

[2] Comparez la critique de M. E. LANDAU dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. 24 (1907) p. 126—127 et p. 139—140.

[3] l. c. Rendiconti etc., p. 112.

[4] l. c. Bidrag etc., p. 37—39 et p. 131—132.

[5] Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 5 juillet 1909.

[6] Jusqu'ici nous avons, pour abréger l'écriture, supprimé le terme constant de la série; mais dans ce chapitre nous supposerons que ce terme peut être différent de zéro, quand n'est pas dit le contraire.

sommables d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$; si r est égal à zéro les séries sont convergentes dans le demi-plan $\sigma > \lambda_0$. Appliquons à ces séries la transformation (10) et posons $\beta = r + 1$; en introduisant la notation abrégée

$$S_n^{(r)}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \binom{r+\nu}{\nu} a_{n-\nu} \tag{66}$$

on trouve

$$\Omega_1(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{S_{n+1}^{(r)}(a)\, n!}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+n+1)}, \tag{67}$$

$$\Omega_2(x) = b_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{S_{n+1}^{(r)}(b)\, n!}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+n+1)}. \tag{67 bis}$$

Soit λ' le plus grand des nombres λ_r et 0; ces séries sont absolument convergentes pour $\sigma > \lambda'$.

Posons maintenant

$$u_{0,0} = S_0^{(r)}(a)\, S_0^{(r)}(b) = a_0\, b_0,$$

$$u_{p,q} = \frac{S_p^{(q+r)}(a)\, S_q^{(r)}(b)\, (p-1)!\, (q-1)!}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+p+q)};$$

et considérons la série double:

$$\sum_{p,q} u_{p,q},$$

où la sommation doit être étendue à toutes les valeurs entières et non-négatives[1] de p et de q. Cette série nous donne immédiatement le développement cherché pour un produit de deux séries de facultés. En effet, nous allons démontrer que la série double est absolument convergente, si $\sigma > \lambda'$. Il en résulte la relation:

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_{0,n} + u_{1,n-1} + \dots + u_{n,0}). \tag{68}$$

Il est facile d'évaluer le premier membre; on trouve

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \frac{(q-1)!\, S_q^{(r)}(b)}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+q)} \left\{ a_0 + \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{S_{p+1}^{(q+r)}(a)\, p!}{(x+r+q+1)\dots(x+r+q+p+1)} \right\}$$

$$= \frac{S_q^{(r)}(b)\, (q-1)!}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+q)}\, \Omega_1(x);$$

[1] Dans le cas où p ou q soit égal à zéro il faut remplacer $(-1)!$ par 1.

en sommant par rapport à q on trouve

$$\sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=\infty} u_{p,q} = \Omega_1(x)\,\Omega_2(x).$$

La relation (68) peut donc s'écrire:

$$\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = a_0 b_0 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha_{n+1}\, n!}{(x+r+1)(x+r+2)\dots(x+r+n+1)}, \tag{69}$$

où

$$\alpha_n = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(p-1)!\,(n-p-1)!}{(n-1)!} S_{n-p}^{(r+p)}(a)\, S_p^{(r)}(b). \tag{70}$$

Pour déterminer le domaine de convergence de cette série et pour démontrer la convergence absolue de la série double nous allons étudier les nombres α_n de plus près.

En vertu de l'hypothèse faite relativement à $\Omega_1(x)$ et $\Omega_2(x)$ on sait trouver une constante fixe K, indépendante de n, telle qu'on ait

$$\left.\begin{matrix} \left|S_n^{(r)}(a)\right| \\ \left|S_n^{(r)}(b)\right| \end{matrix}\right\} < K\, n^{r+\lambda'+\varepsilon},$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$, ε étant > 0. Il en résulte l'existence d'une constante K_1, indépendante de n, telle qu'on ait

$$\left.\begin{matrix} \left|S_n^{(r)}(a)\right| \\ \left|S_n^{(r)}(b)\right| \end{matrix}\right\} < K_1 \frac{\Gamma(\lambda'+\varepsilon+r+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\lambda'+\varepsilon+r+1)}, \tag{71}$$

pour $n = 1, 2, 3, \dots$; r est ici un nombre entier fixe (l'ordre de sommabilité des séries), mais il nous importe de savoir comment se comportent les $S_n^{(r)}$ pour des valeurs très grandes de r; pour le voir démontrons d'abord un lemme concernant les coefficients binomiaux. Considérons le polynôme du dégré ν en a

$$f(a) = \binom{a+\nu}{\nu} = \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)}{\nu!}.$$

Formons les différences finies par rapport à a; en posant

$$\Delta f(a) = f(a-1) - f(a),$$

$$\Delta^{s+1} f(a) = \Delta \Delta^s f(a),$$

on trouve

$$\Delta^s f(a) = (-1)^s \binom{a + r - s}{r - s}. \qquad (s = 0, 1, \ldots, r).$$

et les différences d'ordre supérieur à r sont égales à zéro.

Substituons ces expressions dans la formule d'interpolation de Newton

$$f(a + p + 1) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{p + s}{s} (-1)^s \Delta^s f(a);$$

on trouve l'identité

$$\binom{a + p + r + 1}{r} = \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p + s}{s} \binom{a + r - s}{r - s}, \tag{72}$$

a et p étant des nombres quelconques. Cela posé, soit p un entier positif et considérons l'expression

$$S_n^{(p)}[S_n^{(r)}(a)] = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{p + s}{s} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-s-1} \binom{r + \nu}{\nu} a_{n-\nu-s};$$

en rangeant autrement les termes on trouve

$$S_n^{(p)}[S_n^{(r)}(a)] = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} a_{n-\nu} \sum_{s=0}^{s=\nu} \binom{r + \nu - s}{\nu - s} \binom{p + s}{s} = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \binom{r + p + \nu + 1}{\nu} a_{n-\nu} = S_n^{(r+p+1)}(a);$$

à l'aide de cette identité, qui peut s'écrire:

$$S_n^{(r+p+1)}(a) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{p + s}{s} S_{n-s}^{(r)}(a),$$

il est facile de voir comment se comporte $S_n^{(r+p+1)}(a)$ pour des valeurs très grandes de p, r étant un nombre fixe. De l'inégalité (71) il résulte en effet que l'on a

$$|S_n^{(r+p+1)}(a)| < K_1 \sum_{s=0}^{s=n-1} \binom{p + s}{s} \binom{\lambda' + \varepsilon + r + n - s - 1}{n - s - 1} = K_1 \binom{\lambda' + \varepsilon + r + p + n}{n - 1}; \tag{73}$$

cette inégalité est valable pour $\binom{n = 1, 2, 3, \ldots}{p = 0, 1, 2, \ldots}$; K_1 représente une constante fixe, indépendante de n et de p. Ce résultat établi, il est facile d'évaluer les a_n; en ayant soin de choisir K_1 telle que $|a_0| < K_1$, $|b_0| < K_1$ on trouve l'inégalité suivante:

$$|\alpha_n| < K_1^2 \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(p-1)!\,(n-p-1)!}{(n-1)!}\binom{\lambda'+\varepsilon+r+n-1}{n-p-1}\binom{\lambda'+\varepsilon+r+p-1}{p-1} =$$

$$= K_1^2 \frac{\Gamma(\lambda'+\varepsilon+r+n)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\lambda'+\varepsilon+r+1)} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{\lambda'+\varepsilon+r+p}.$$

On en conclut qu'il existe une constante positive K_2 telle qu'on ait pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$|\alpha_n| < K_2 n^{\lambda'+\varepsilon+r} \log(1+n) \tag{74}$$

et cela quelque petit que soit le nombre positif ε. La série (69) est donc absolument convergente, pourvu que $\sigma > \lambda'$.

Nous avons obtenu cette inégalité en remplaçant dans l'expression de α_n chaque terme par un autre qui est positif et plus grand en valeur absolue; nous pouvons donc conclure que la série double est aussi absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > \lambda'$, et l'égalité (68) est par conséquent vraie.

Mais de l'inégalité (74) on peut tirer un résultat plus précis relativement à la convergence de la série au second membre de (69). Appliquons en effet à cette série la transformation (10) en posant $\beta = -1$; on trouve:

$$\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = \alpha_0 b_1 + \frac{\alpha_1\, 0!}{x+r} + \frac{(\alpha_2-\alpha_1)\, 1!}{(x+r)(x+r+1)} + \frac{(\alpha_3-\alpha_2)\, 2!}{(x+r)(x+r+1)(x+r+2)} + \cdots \tag{75}$$

L'inégalité (74) et l'expression (8) de l'abscisse de convergence de la série montrent que cette série est convergente, si $\sigma > \lambda'$.

D'autre part on voit, par un raisonnement déjà souvent appliqué, que la série cesse généralement de converger, si $\sigma > \lambda'$.

C'est le résultat que nous avions en vue.

La formule (75) peut encore s'écrire sous la forme définitive:

$$\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1\, 0!}{x} + \frac{\beta_2\, 1!}{x(x+1)} + \frac{\beta_3\, 2!}{x(x+1)(x+2)} + \cdots, \tag{76}$$

où l'on a posé

$$\beta_n = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(n-p-1)!\,(p-1)!}{(n-1)!}\, S_{n-p}^{(p-1)}(a)\, b_p. \tag{77}$$

La série au second membre est ici sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda'$. Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Théorème X. *Le produit de deux séries de facultés, sommables d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, se représente par une série de facultés de la même forme, qui est sommable d'ordre r dans le domaine $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$.*

En particulier, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une série de facultés, qui est sommable d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, se représente par une série de facultés, qui est sommable d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, $\sigma > 0$.

Théorème X'. *Le produit de deux séries de facultés, convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés de la même forme, convergente pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.*

Il va sans dire que le produit de deux séries de facultés, absolument convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés absolument convergente pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.

Si les séries manquent le premier terme on démontre ce théorème:

Théorème XI. *Le produit de deux séries de facultés de la forme* (1), *dont le terme constant s'annule, et qui sont sommables par des moyennes arithmétiques de premier ordre pour $\sigma > \lambda_1$, et convergentes pour $\sigma > \lambda$, se représente par une série de facultés de la même forme, qui est convergente pour $\sigma > \lambda_1$, $\sigma > 0$ et absolument convergente pour $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.*

En effet, en appliquant à $\Omega_1(x)$ et à $\Omega_2(x)$ la transformation (10), où l'on pose $\beta = 1$, on voit qu'elles se représentent par des séries de la forme

$$\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{(x+1)(x+2)} + \frac{b_2}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$$

convergentes (resp. absolument convergentes) dans les domaines indiqués par le théorème. Le produit $(x+1)^2\,\Omega_1(x)\,\Omega_2(x)$ se représente donc, en vertu du théorème X', par une série de la forme

$$(x+1)^2\,\Omega_1(x)\,\Omega_2(x) = c_0 + \frac{c_1}{x+2} + \frac{c_2}{(x+2)(x+3)} + \cdots$$

En divisant les deux membres par $x(x+1)$ et en multipliant le second membre par la série de facultés de la forme (1) qui représente $\frac{x}{x+1}$ le théorème XI se trouve démontré.

De la série de STIRLING

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a(a+1)}{x(x+1)(x+2)} + \cdots$$

qui est absolument convergente, si $\sigma > \alpha$, et du théorème X' on conclut que toute fonction rationnelle dans laquelle le degré du nominateur ne surpasse pas celui du dénominateur se représente par une série de facultés de la forme (1), absolument convergente pourvu que σ soit positif et plus grand que la partie réelle de celle des racines dont la partie réelle est la plus grande.

A l'aide de cette remarque on démontre le théorème suivant:

Théorème XII. *Si la fonction $\Omega(x)$ admet un développement en série de facultés de la forme* (65), *qui est sommable par des moyennes arithmétiques d'ordre r dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r \geq 0$, la fonction $\Omega(x)x^{-r}$ se représente par une série de facultés de la même forme, convergente dans le demi-plan $\sigma > \lambda_r$, et la fonction $\Omega(x)x^{-r-1}$ se représente par une série absolument convergente dans ce demi-plan.*

En effet, $\dfrac{\Omega(x)}{x(x+1)\ldots(x+r-1)}$ se représente par une série de la forme (65) convergente pour $\sigma > \lambda_r$; en multipliant cette série par la série de facultés qui représente $\dfrac{x(x+1)\ldots(x+r-1)}{x^r}$ la première partie du théorème se trouve démontré.

La seconde partie se démontre par un raisonnement analogue.

§ 17. Pour ce qui concerne l'intégration d'une série de facultés entre des limites finies nous nous bornerons à renvoyer aux Mémoires cités de M. N. Nielsen. Disons encore quelques mots sur la différentation. En dérivant terme par terme la série (1) par rapport à x on trouve

$$\Omega'(x) = -\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+s}\right);$$

d'après un théorème bien connu, dû à Weierstrass, cette série représente $\Omega'(x)$ à l'intérieur du domaine de convergence $\sigma > \lambda$ de la série (1), mais ce n'est pas une série de facultés. Pourtant $\Omega'(x)$ admet un développement en série de facultés. On le voit le plus facilement à l'aide de la transformation (10); on en déduit l'identité:

$$\frac{\Omega(x+\beta)-\Omega(x)}{\beta} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\left(a_s + \frac{\beta+1}{1.2}a_{s-1} + \cdots + \frac{(\beta+1)\ldots(\beta+s-1)}{s!}a_1\right)s!}{(x+\beta)(x+\beta+1)\ldots(x+\beta+s)}.$$

Soit x un nombre tel que $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$. La série au second membre est convergente du moins si $|\beta|$ est choisi suffisamment petit. Faisons tendre β vers zéro le long d'un rayon vecteur quelconque, on trouve:

$$\Omega'(x) = -\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\left(\frac{a_s}{1} + \frac{a_{s-1}}{2} + \cdots + \frac{a_1}{s}\right) s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

La dérivée de la fonction $\Omega(x)$, définie par la série (1), *ayant l'abscisse de convergence λ, admet un développement de la même forme, convergente si $\sigma > \lambda$, $\sigma > 0$.*

Le 30 juillet 1912.

BIBLIOGRAPHIE.

Fr. Ackermann.

Weinheim u. Leipzig 1914.

EMMERICH, ALBRECHT, Kubische Aufgaben aus der Stereometrie. Nebst Anleitungen zur Lösung, Determinationen u. den Ergebnissen der Zahlenbeispiele. — V + 127 pp. 8. M. 2: 25 geh., 2: 60 geb.

Prisma u. Pyramide. Zylinder u. Kegel. Kugel u. Kugelteile. Kugel u. ein- od. umgeschriebene Körper. Ringgebilde. Rotationsflächen 2. Grades u. ein- od. umgeschriebene Körper.

Félix Alcan.

Paris 1914.

BOREL, EMILE, Le hasard. (Nouvelle Collection scient. E. Borel.) — IV + 308 pp. 8. Fr. 3: 50.

Le hasard et les lois naturelles. Les lois du jeu de pile ou face. Probabilités discont. et probabilités continues. Probab. d. causes. — L'application d. lois du hasard: Les sciences sociologiques et biolog. L. sciences phys. L. sciences math. — La valeur d. lois du hasard. La valeur scientif. d. lois du hasard. La portée philosoph. d. lois du hasard.

MILHAUD, GEORGES, & POUGET, EDOUARD, Cours de géométrie analytique à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement. I: Géométrie à deux dimensions. Avec 344 fig. Préf. de M. Emile Borel. — III + 478 pp. 8. Fr. 12: —.

Principe de l'homogénéité. Construct. d. formules. Syst. de coordonnées. Changement d'axes. De la ligne droite. Rapport anharmonique. Homographie. Involution. De la circonf. du cercle. Etude et construct. d'une courbe dont l'equat. cartésienne est résoluble par rapport à l'une d. coordonnées. Courbes dont tous l. points ont d.

coordonnées cartés. fonctions données d'un paramètre variable. Courbes d'équat. non résoluble. Courbes algébr. Courbes unicursales. Des coordonnées polaires. Courbes déf. par d. conditions géométr. Propriétés intrinsèques d. courbes planes. Généralités sur l. courbes du sec. ordre. Centres, diamètres, axes dans l. coniques. Equat. réduites. Foyers et directrices. Etude d. coniques à centre sur l'équat. réduites. Etude de la parabole sur l'équat. réduite. Equat. trinome commune aux trois coniques. Propriétés relat. à d. ensembles de coniques. Homographie et involut. sur une conique.

Poincaré, Henri. L'œuvre scientifique; l'œuvre philosophique, par Vito Volterra, Jacques Hadamard, Paul Langevin, Pierre Boutroux. (Nouvelle Collection Scient. par Emile Borel). — 264 pp. 8. Fr. 3: 50.

L'œuvre mathématique, par V. Volterra. Le problème des trois corps, par J. Hadamard. Le physicien, par P. Langevin. L'œuvre philosophique, par P. Boutroux. — Curriculum vitæ.

The American Mathematical Society.

New York 1914.

The Madison Colloquium, 1913. (American Math. Society, Colloquium Lectures, vol. IV.) — III+230 pp. 8.

On invariants and the theory of numbers, by Leonard Eugene Dickson. Introduct. A theory of invariants applicable to algebraic and modular forms. Seminvar. of algebr. and modular binary forms. Invariants of a mod. group. Formal invar. and covariants of mod. forms. Applicat. Modular geometry and covariantive theory of a quadratic form in m variables modulo 2. A theory of plane cubic curves with a real inflexion. Point valid in ordinary and in mod. geometry.

Topics in the theory of functions of several complex variables, by William Fogg Osgood. A general survey of the field. Some gen. theorems. Singular points and analytic continuation. Implicit functions. The prime function on an algebraic configuration.

Johann Ambrosius Barth.

Leipzig 1913.

Planck, Max, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. 2:e teilweise umgearb. Aufl. — X+206 pp. 8.

Grundtatsachen u. Definitionen. Folgerungen aus d. Elektrodynamik u. d. Thermodynamik. Entropie u. Wahrscheinlichkeit. System von Oszillatoren im stationären Strahlungsfelde. Irreversible Strahlungsvorgänge. Verzeichnis d. Schriften d. Verfassers üb. Wärmestrahlung u. Quantenhypothese.

Bowes & Bowes.

Cambridge 1911.

WHITEFORD, JAMES, The trisection of the angle by plane geometry, verified by trigonometry with concrete examples. — 169 pp. 4.

G. Buschhardt.

Berlin 1912—1914.

CRUEWELL, ERNST RUDOLPH, Die Regeln des Dreiecks für den häuslichen Unterricht. 5:e verm. Ausg. Enthält den Beweis für den Satz des Fermat. — 122 pp. 8. M. 10: —.

MARKUS, CURT, Das Gesetz der metaphysischen Dimensionen. Ein Beweis für das Theorem des Fermat. 2. verm. Ausg. — 4 pp. 4. M. 2: —.

ZECHSTEIN, PETER GEORG, Die Regel des Pythagoras und die Behauptung des Fermat. Ein neuer einfacher Beweis beider Probleme. 2. Ausg. — 4 pp. 4. M. 2: —.

Cambridge University Press.

Cambridge 1913—1914.

DICKSON, L. E., Linear Algebras. (Cambridge Tracts in mathematics, No 16.) — VIII+73 pp. 8. 3 sh.

Definitions, illustrat. a. elem. theorems. Revision of Cartan's gen. theory of complex lin. associative algebras with a modulus. Relations of lin. algebras to other subjects. Lin. algebras over a field F.

FORSYTH, A. R., Lectures introductory to the theory of functions of two complex variables, delivered to the University of Calcutta during January and February 1913. — XVI+281 pp. 8. 10 sh.

Geometrical representation of the variables. Lineo-linear transformations; invariants and covariants. Uniform analytic functions. Uniform functions in restricted domains. Functions without essential singularities in the finite part of the field of variation. Integrals; in particular double integrals. Level places of two simult. functions. Uniform periodic functions.

HOBSON, E. W., »Squaring the circle». A history of the problem. — 57 pp. 8. 3 sh.

General account of the problem. The first period. The second period. The third period.

HOBSON, E. W., John Napier and the invention of logarithms, 1614. A lecture. — 48 pp. 8. 1 sh. 6 d.

LAMB, HORACE, Dynamics. — XI+344 pp. 8. 10 sh. 6 d.

Kinematics of rectilinear motion. Dynamics of rectilinear motion. Twodimensional kinematics. Dynamics of a particle in two dimensions. Cartesian coordinates. Tangential and normal accelerations. Constrained motion. Motion of a pair of particles. Dynamics of a system of particles. Dynamics of rigid bodies. Rotation about a fixed axis. Motion in two dimensions. Law of gravitation. Central forces. Dissipative forces. Systems of two degrees of freedom. Note on dynamical principles.

WATSON, G. N., Complex integration and Cauchy's theorem. (Cambridge Tracts in Mathematics, No 15.) — 79 pp. 8. 3 sh.

Analysis situs. Complex integration. Cauchy's theorem. Miscellan. theorems. The calculus of residues. The evaluation of definite integrals. Expansions in series. Historical summary.

Friedrich Cohen.

Bonn 1913.

STEINMANN, H. G., Über den Einfluss Newtons auf die Erkenntnistheorie seiner Zeit. — 81 pp. 8. M. 2: —.

Einleit. Die Grundlagen d. Newtonschen Lehre. Die Kritik d. Newtonschen Lehre bei George Berkeley. Die Wirkung Newtons in Deutschland. Newtons Sieg in Frankreich u. sein Einfluss auf d'Alemberts Positivismus.

Moritz Diesterweg.

Frankfurt am Main 1913.

MÖNKEMEYER, K., Vollständige vierstellige Logarithmentafel zum Gebrauch für Schule und Praxis. — 110 pp. 8. M. 2: — geb.

Gemeine Logarithmen d. Zahlen von 1—100000. Fünf- u. siebenstell. Log. d. Zinsfaktoren. Log. der trigonom. Funktionen von Minute zu Minute. Wahre Werte d. trigonom. Funktionen von 10 zu 10 Minuten. Länge d. Kreisbogen u. Sehnen. Quadratzahlen d. Zahlen von 1—1000. Kubikzahlen. Quadrat- u. Kubikwurzeln u. natürl. Log. der Zahlen von 1—100. Konstanten.

H. Dunod et E. Pinat.

Paris 1914.

Monteil, P.-L., Théorie du point. Géométrie curviligne. 2:e partie. — VI + 123 pp. 4. Fr. 6.

Introd. Définitions. De l'ellipse. De la parabole. De l'hyperbole. De la circonférence. Parabole du cercle. — Mesure de la longueur de l'ellipse, de la parabole, de l'hyperbole. Mesure de la surface de l'ellipse, de la parabole, de l'hyperbole. Comparaisons d. longueurs d. courbes dérivées avec la circonférence et entre elles. Arcs et angles. Variat. d. angles, d. flèches et d. bases. Relations entre l. demi-bases d. courbes de même flèche, ces grandeurs étant exprimées en fonct. d'une commune mesure. Divisions de l'ellipse. Cordes et polygones. Comparaison d. surfaces. Compar. d. volumes. Mesure directe d. ellipsoïdes de révolut. Paraboloïdes de révolut. Hyperboloïdes de révolut. — Sections planes dans l. solides de révolution. — Discussion de la formule de la longueur de l'ellipse. Annexe.

Jacob Dybwad.

Kristiania 1914.

Störmer, Carl, Résultats des calculs numériques des trajectoires des corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire. II & III. (Videnskapsselskapets Skrifter. I. 1913. No 10 & 14.) — 58 pp., 64 pp. 8.

II: Faisceaux de trajectoires passant par un point; trajectoires spirales aux environs des trajectoires par l'origine.

III: Spirale de Villard; trajectoires périodiques: modèle de la couronne du soleil etc

R. Eisenschmidt.

Berlin 1914.

Dähne, August, Bausteine zur Flugbahn- und Kreisel-Theorie. — 44 pp. 8. M. 1:50.

Theorie der Drehung der Körper. Die Geschossbewegung.

Wilhelm Engelmann.

Leipzig & Berlin 1914.

Abhandlungen über jene *Grundsätze der Mechanik*, die Integrale der Differentialgleichungen liefern, von Isaac Newton (1687), Daniel Bernoulli (1745

und 1748) und PATRICK D'ARCY (1747). Übers. von A. v. OETTINGEN. Hrsg. von PHILIP E. B. JOURDAIN. (Ostwald's Klassiker, Nr. 191.) — 109 pp. 8. M. 2: 80 geb.

ISAAC NEWTON: Aus den math. Grundlagen der Naturphilosophie: Begriffsbestimmungen u. Leitsätze.

DANIEL BERNOULLI: Eine neue Aufgabe der Mechanik.

PATRICK D'ARCY: Dynamische Aufgabe.

DANIEL BERNOULLI: Bemerkungen üb. eine allgem. Fassung d. Satzes von der Erhaltung d. lebendigen Kraft. Anm.

BALL, L. de, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Mit 112 Fig. — XVI + 387 pp. 4. M. 20: —.

Reihenentwicklungen. Interpolationsformeln u. Formeln f. numer. Differentiation. Die Methode d. kleinst. Quadrate. Sphärische Trigonometrie. Koordinaten. Theorie d. Drehung d. Erde. Berechn. d. Kulminationszeit u. d. Zeit des Auf- u. Unterganges eines Gestirns. Präzession u. Nutation. Jährl. Parallaxe. Eigenbeweg. d. Fixsterne. Aberration d. Lichtes. Redukt. auf d. scheinbaren Ort. Parallaxe. Refraktion. Bestimm. der Schiefe d. Ekliptik u. d. Rektaszensionen d. Sonne u. d. Fixsterne. Bild. eines Fundamentalkatalogs. Bestimm. d. Konstante d. Lunisolarpräzession u. d. Eigenbeweg. d. Sonnensystems. Bestimm. d. Nutationskonstante, d. Aberrationskonst. u. d. Parallaxe eines Sterns. Bestimm. d. relat. Parallaxe eines Fixsterns. Sternbedeckungen. Sonnenfinsternisse. Mondfinsternisse. Astrographische Ortsbestimmung. Bestimm. d. Zeit u. d. Polhöhe durch Beobacht. ausserhalb d. Meridians.

BERNOULLI, JOHANN, Die erste Integralrechnung. Eine Auswahl aus Johann Bernoullis mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes, aufgeschrieben zum Gebrauch des Herrn MARQUIS DE L'HOSPITAL in den Jahren 1691 u. 1692. Mit 119 Fig. Übersetzt u. hrsg. von GERHARD KOWALEWSKI. (Ostwald's Klassiker, Nr. 194.) — 187 pp. 8. M. 5: —.

Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades (1799—1849). Hrsg. von E. NETTO. 3:e Aufl. Mit 1 Taf. (Ostwald's Klassiker, Nr. 14.) — 82 pp. 8. M. 1: 90 geb.

ROUX, WILHELM, Über kausale und konditionale Weltanschauung und deren Stellung zur Entwicklungsmechanik. — 66 pp. 8. M. 1: 50.

Kausalität u. Konditionalität. Ursachenforschung od. Bedingungsforschung? Stellung des »Konditionismus» zur Entwicklungsmechanik im Allgem. Spez. »konditionistische» Einwend. gegen die Entwicklungsmechanik. Schlussurteil.

THOMSON, WILLIAM, Über die dynamische Theorie der Wärme. Ins Deutsche übertragen und hrsg. von WALTER BLOCK. (Ostwald's Klassiker, Nr. 193.) — 212 pp. 8. M. 5: 20 geb.

Einleit. Grundleg. Prinzipien einer Theorie d. bewegenden Kraft d. Wärme. Über die beweg. Kraft d. wärme in endl. Temperaturbereichen. Anwend. v. Beziehungen zwischen den physikal. Eigenschaften aller Stoffe. Üb. eine Methode zur experiment. Feststellung d. Beziehung zwischen d. aufgewend. mechanischen Arbeit u. der bei der Kompression einer Flüssigkeit im Gaszustand entstehend. Wärme. Üb. die Mengen mechanischer Energie in einer Flüssigkeit in verschied. Zuständen v. Temperatur u. Dichte. Thermoelektrische Ströme. Üb. die thermoelast., thermomagnet. u. pyroelektrischen Eigenschaften d. Materie. Anhang.

Gauthier—Villars.

Paris 1913—1914.

BRAUDE, L., Les coordonnées intrinsèques. Théorie et applications. (Scientia, No 34.) — 100 pp. 8. Fr. 2: —.

Notes bibliographiques. Portrait de Cesàro. Développement et méthodes. La courbe de Mannheim. L'arcuïde. Les roulettes.

COTTON, EMILE, Cours de mécanique générale (Introduction à l'étude de la mécanique industrielle) (Bibliothèque de l'élève ingénieur). Vecteurs. Géométrie des masses. Principes. Cinématique. Statique. — 166 pp. 8. Fr. 5:

Projections. Moments. Systèmes de vecteurs. Couples. Réductions remarquables. Centres de gravité. Moments d'inertie. — Vitesse. Accélération. Mouvement d'un solide. Composition d. vitesses et d. accélérations. — Principes de la mécanique. Statique du point. Statique du solide. Réduction de certains syst. de forces. Premiers principes de statique graphique. Solide assujetti à d. liaisons. Frottement. Syst. déformables.

DARBOUX, GASTON, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. 1: Généralites. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima. 2:e éd., rev. & augm. (Cours de géométrie de la Faculté d. Sciences). — VI + 619 pp. 8. Fr. 20: -

Applicat. à la géométrie de la théorie d. mouvements relatifs. Des différents syst. de coordonnées curvilignes. Les surfaces minima. Les congruences et l. équations lin. aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur l. surfaces. Lignes géodésiques et courbure géodés. La déformation d. surfaces. Déformat. infiniment petite et représentat. sphérique. Notes et addit.

Haag, J., Cours complet de Mathématiques spéciales. I: Algèbre et analyse. VI + 402 pp. 8. Fr. 9: —

Préface. Nombres incommensurables. Radicaux; exposants. — Analyse combinatoire. Formule du binome. — Nombres complexes. — Séries. Suites infinies. Limites. Séries à termes positifs. Séries à termes quelconques. Addition et multiplication des séries. Calcul numérique d'une série. Conseils pratiques pour l'étude d'une série. — Fonctions d'une variable réelle. — Notion de fonction; continuité. Dérivées; variation des fonctions. Opérations sur les fonctions. Fonctions élémentaires. — Fonctions exponentielle et logarithmique. Nombre e. Séries entières. — Développements limités. Infiniment petits. Formes indéterminées. — Fonctions de plusieurs variables. — Différentielles. — Intégrales définies et indéfinies. — Calcul des quadratures. — Applications des quadratures. — Equations différentielles. Equations du premier ordre. Equations du second ordre. — Polynomes. Propriétés générales. Division des polynomes. Divisibilité. — Fractions rationnelles. — Propriétés générales des équations algébriques. Fonctions symétriques des racines. Racines multiples. — Elimination. — Transformation des équations. — Equations à coefficients réels. — Equations à coefficients numériques. — Déterminants. — Equations et formes linéaires. — Formes quadratiques. — Notes: Relations de récurrence. Rapport anharmonique. Equation de Riccati.

. Exercices du cours de mathématiques spéciales. T. 1: Algèbre et analyse. — 218 pp. 8. Fr. 7: 50.

Lecornu, Léon, Cours de mécanique, professé à l'Ecole Polytechnique. T. 1. — VII + 536 pp. 8. Fr. 18: —.

Introd. Addition d. vecteurs. Applicat. à la théorie du centre de gravité. Produit de deux vect. Moment d'un vecteur. Couples de vect. Syst. équivalents. Reduct. d'un syst. de vect. Axe central. Dérivée géom. d'un vecteur. — Translation et rotation. Déplacement d'un fig. plane dans son plan. Théorème de Savary. Déplacem. d'un solide autour d'un point fixe. Déplacem. gén. d'un solide. Déplacem. continu. Champs de déplacem. — Cinématique du point. Cinémat. d. solides. Composition d. mouvements. Mouvem. relatifs. — Classificat. d. mécanismes élément. Engrenages plans ext. et int. Trains d'engrenages. Crémaillère. Engren. coniques. Trains épicycloïdaux. Cas de deux axes non situés dans le même plan. Vis diff. de Prony. Bielle d'accouplement. Joint de Oldham. Courroies. Câbles. Poulies, Courbes roul. Roues de Reomer. Galet de frict. Manivelles réun. par une bielle. Joint univ. Joint de Hookes, de Goubet, d'Evans. Poulies non circ. Transmiss. p. ressort en hélice. Flexible. Excentr. et tige guidée. Excentr. à cadre. Maniv. et balancier. Excentr. à collier. Balancier à bride. Invers. Peaucellier. Coulisse de Stephenson. Encliquetages. Embrayages. — Principes de la dynamique. Travail d. forces. Attraction univ. Théorèmes généraux s. le mouvem. d'un point. — Equilibre d'un point. Stabilité. Mouvem. rectiligne. Mouvem. sous l'action d'une force centrale. — Equilibre et mouvem. sur une courbe. Equilibre et mouvem. sur une surface. — Mouvem. relatifs. — Statique d. syst.: Théorie gén. Equilibre d. syst. pesants. Equilibre d. corps solides. Equilibre d. syst. articulés ou flex. Equilibre d. lames et tiges minces. Statique d. solides naturels. Statique d. machines.

RIESZ, FRÉDÉRIC, Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. (Collection de monographies sur la théorie d. fonctions . . . Emile Borel.) — VI + 182 pp. 8.

Préface. Les commencements de la théorie. Les déterminants infinis. Essai d'une théorie générale. La théorie des substitutions lin. à une infinité de variables. La théorie d. formes quadratiques à une infinité de variables. Applicat.

VÉRÉBRUSSOV, A., Sur un théorème de Kummer. — 4 pp. 8.

ZORETTI, L., Leçons de mathématiques générales. Avec une préface de P. Appell. — XVI + 753 pp. 8.

Les grandeurs dirigées. Les coordonnées. Etude de la droite et du plan. La théorie d. vecteurs. Le cercle et la sphère. Les coniques. Les quadriques. Courbes et surfaces usuelles. — Complément de calcul algébr. Les nombres complexes. Le binome. Les déterminants. Les infiniment petits et l. infinim. grands. Les séries. La notion de fonction. L. fonctions usuelles. Le calcul d. dérivées. La variation d. fonctions. La constructions d. courbes. Les développements en série. Les applicat. d. dérivées à l'étude d. courbes. Applicat. d. dérivées à l'étude d. surfaces. Etude géom. et analyt. du mouvement. Résolution d. équations. Les calculs numériques et l. graphiques. — La notion d'intégrale. Les méthodes gén. d'intégration. Les généralisations de la notion d'intégrale. L. fonctions ellipt. Les séries de Fourier. Applications géométr. Applications mécaniques. Calcul prat. des intégrales. Les équat. différentielles. L. équations aux dérivées partielles.

G. J. Göschen.

Berlin & Leipzig 1913—1914.

HAUSSNER, ROBERT, Darstellende Geometrie. T. 1: Elemente; Ebenflächige Gebilde. 3:e verm. u. verb. Aufl. Mit 110 Fig. (Sammlung Göschen 142.) — 207 pp. 8. M. 0:90.

Einleit. Parallelprojektion ebener Gebilde und Affinität. Schiefe Parallelprojekt. räuml. Gebilde. Darstellung von Punkt, Gerade u. Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zu einander senkrechte Ebenen. Ebenflächige Gebilde.

HENSEL, KURT, Zahlentheorie. — VIII + 356 pp. 8. M. 10 geh.; M. 10:80 geb.

Vorrede. Die element. Rechenoperationen u. die Zahlbereiche. Der Körper d. ration. Zahlen. Die Primzahlen. Die Beziehungen aller ration. Zahlen zu einer Grundzahl g. Die g-adische Darstellung d. ration. Zahlen. Der Ring $R(g)$ der allgem. g-adischen Zahlen für eine belieb. Grundzahl g. Die Zerlegung d. Ringes aller g-adischen Zahlen in seine einfachsten Bestandteile. Der Körper $K(p)$ d. p-adischen Zahlen, deren Grundzahl eine belieb. Primzahl ist. Die Elemente d. Analysis und Algebra im Gebiete

d. p-adischen Zahlen. Die Elemente d. Zahlentheorie im Körper d. p-adischen Zahlen. Die Elemente d. Zahlentheorie im Ringe d. g-adischen Zahlen. Die Auflös. d. reinen Gleich. u. d. reinen Kongruenzen. Die quadrat. Gleich. u. Kongruenzen. Das Reziprozitätsgesetz f. die quadrat. Reste. Die quadrat. Formen. Sachreg.

Hessenberg, Gerhard, Ebene und sphärische Trigonometrie. 3. neubearb. Aufl. (Sammlung Göschen 99.) — 169 pp. 8. M. 0: 90.

Der Funktionsbegriff. Die Ermittelung d. Funktionswerte. Die Berechnungsmethoden d. Elementargeometrie. Trigonometrie u. Elem. Geom. — Das rechtwinkl. Dreieck. Die trigonom. Funktionen beliebiger Winkel. Das schiefwinkl. Dreieck. Die Additionstheoreme. Geom. Anwend. der Additionstheoreme. Sphärische Trigonometrie. — Elem. Berechnungsmethoden. Der Moivreschen Satz. Die Methode d. Hilfswinkel.

Gyldendalske Boghandels Forlag.

København 1897—1904.

Eibe, Thyra, Euklids Elementer. I—VI. Med en Inledn. af Prof. Dr. H. G. Zeuthen. XI + 94 + 90 + 98 pp. 8. 3 Bd à Kr. 1: 75.

A. Hermann & Fils.

Paris 1913.

Planck, Max, Leçons de thermodynamique. Avec une conférence du même auteur à la Société chimique de Berlin sur *Le théorème de Nernst et l'hypothèse des quanta.* Trad. sur la 3:e ed. allemande par R. Chevassus. — 310 pp. 8. Fr. 12: —.

Expériences fondament. et définitions. Le premier principe de la théorie de la chaleur. Le deuxième princ. de la théorie de la chaleur. Applications à d. états spéciaux d'équilibre.

Sainte-Laguë, A., Notions de mathématiques. Introduction au cours de mathématiques générales. Arithmétique, Algèbre, Trigonométrie, Géométrie, Cinématique, Tables numériques. Avec préface de G. Koenigs. — VII + 512 pp. 8. Fr. 7: —.

Nombres entiers. Divisibilité. Nombres premiers. Fractions. Racines. Mesure d. grandeurs. Erreurs. Calculs numériques. Nombres négat. ou posit. Calcul algébr. Equat. et problèmes du premier degré, du sec. degré. Progressions et logarithmes. Fonct. et dérivées. — Trigonométrie. — Droites et plans. Parallèles. Circonfér. et

sphère. Relat. métriques. Longueurs, aires et volumes. Construct. graphiques. Géométrie descript. Méthodes en géom. — Cinématique. — Exercices. — Tables div. — Formules et résultats.

O. Häring.

Berlin 1914.

ARCHIMEDES' Werke. Mit modernen Bezeichnungen hrsg. u. mit einer Einleitung versehen von SIR THOMAS L. HEATH. Deutsch von FRITZ KLIEM. — XII + 477 pp. 8.

Archimedes. Handschriften u. wichtigste Ausgaben. Reihenfolge der Abfassung. Dialekt. Verlorene Werke. — Archimedes' Beziehungen zu seinen Vorgängern. Arithmetik bei Archimedes. Üb. die als ΝΕΥΣΕΙΣ bekannten Probleme. Kub. Gleichungen. Antizipationen d. Integralrechnung bei Archimedes. — Archimedes' Werke: Üb. Kugel u. Zylinder, I & II. Die Kreismessung. Üb. Konoide u. Sphäroide. Üb. Spiralen. Üb. das Gleichgewicht von Ebenen, I & II. Die Sandrechnung. Quadratur der Parabel. Üb. schwimmende Körper, I & II. Archimedes' Methode, mechan. Sätze behandelnd — an Eratosthenes. Stomachion (Fragmente). Buch der Hilfssätze. Die Rinder-Aufgabe.

Ulrico Hoepli.

Milano 1913—1914.

CORTESE, EMILIO, Planetologia. (Manuali Hoepli, 397—398.) — IV + 387 pp. 8. Lire 3: —.

Planetologia della terra: La terra. La crosta terrestre. Lo spostamento dei poli. L'età della terra e le epoche geologiche. Fratture geologiche e loro rapporti colla attività endogena. Calore interno. Acque. Maree. Fenomeni sismici. — Planetologia comparata: Il mondo solare. Mercurio. Venere. La terra. Marte. Giove. Saturno. Urano. Nettuno. La luna.

LORIA, GINO, Le scienze esatte nell'antica Grecia. 2:a ed. totalmente rived. Con 122 fig. (Manuali Hoepli) — XXIV + 970 pp. 8. Lire 9: 50.

Sguardo gen. sulla geometria greca pre-euclidea. Talete e la scuola jonica. Pitagorà e la scuola italica. Eleati, atomisti, sofisti. Pitagorei e pitagoristi. Da Socrate ad Euclide. — Il periodo aureo della geom. greca. Euclide. I pretesi continuatori degli Elementi di Euclide. Archimede. Eratostene. Apollonio. I geometri minori del periodo greco-alessandrino. — Ipotesi cosmologiche e misurazioni astronom. anteriori ad Ipparco. La sferica. L'apogeo dell'astronomia greca. Gli albori della fisica matematica. Erone d'Alessandria. I geodeti minori dell'antica Grecia. — Gemino da Rodi. Teone da Smirne. Pappo d'Alessandria. — Neo-platonismo. Eutocio. Sereno — La logistica greca. L'aritmetica nella scuola di Pitagora. L'aritmetica nell'Accademia. L'aritmetica mistica. La teoria dei numeri. Ricreazioni aritmet. dei Greci. Append.

Ad. Hoste.

Gand 1913.

Lecat, Maurice, Bibliographie du calcul des variations 1850—1913. — IV + 112 pp. 8. Fr. 4: —.

Préf. Liste alphabétique. Liste chronologique. Statistique d. travaux. Errata. Recueils cités. Statistique d. recueils. Universités. Dissertations. Auteurs. Adresses. Dates. Classement par ordre chronol. d. naissances. Classement par ordre chronol. d. décès. Classem. par longévité. Errata. Addenda.

Macmillan & Co, Limited.

London 1914.

Durell, Clement V., Test Papers in elementary algebra. — VIII + 231 pp. 8. 3 sh. 6 d.

Generalised arithmetic, substit., meaning of symbols, addition, substract., multiplicat. and division by single terms, brackets. Simple equations, problems, fractions with num. denominators. H. C. F. and L. C. M. of single terms, multiplicat. and div., simult. equat., graphs of simple functions, fractions with monomial denominators. Easy factors, graph. solut. of simult. equations, quadrat. graphs. Fractions, harder factors, H. C. F. and L. C. M. by fact., simult. equat. in three unknowns. Quadratics by fact. Quadratics by completing the square, functional notation, remainder theorem. Detached coefficients, very simple literals. Simult. equat., one being quadrat., undeterm. coefficients. Square root, hard. literals, H. C. F. by rule. Simple indices, variat., easy ratio. Logarithms, simple gradients. Ratio and proport., indices and surds, easy arithm. progressions. Simult. quadratics, arithmet. and geom. progressions. Element. theory of quadratics, harmon. progressions. Permut. and combinations. Part. fractions, easy probability. Practice in manipulat., hard miscell. equat., log. to any base, max. and minima. Algebraic form, symmetry, imaginaries, limitat. of values of a funct., hard. graphs. Miscell. series, induct., binom. theorem, indeterm. equat. Graphical examples. Answers.

Forsyth, A. R., A treatise on differential equations. 4th ed. — XVIII + 584 pp. 8. 14 sh.

Introduct. Differential equations of the first order. General lin. equat. with constant coefficients. Miscellan. methods. Integration in series. The hypergeometric series. Solution by definite integrals. Ordin. equations with more than two variables. Part. diff. equat. of the sec. and higher orders. General examples.

Georg Reimer.

Berlin 1914.

PALÁGYI, MELCHIOR, Die Relativitätstheorie in der modernen Physik. Vortrag geh. auf d. 85. Naturforschertag in Wien. — 77 pp. 8. M. 1:50.

Ernst Schulz.

Berlin 1911.

EIBENBAUM, CURT, Die Gleichung des Pythagoras mit der Einschränkung des Fermat. Eine umfassende Lösung. — 4 pp. 4. M. 3:—.

Max Siering.

Cassel 1914.

FABARIUS, WALDEMAR, Leonhard Euler und das Problem Fermat. Ein Nachtrag zu Eulers Anleitung zur Algebra. — 12 pp. 8. M. 1:20.

E. Speidel.

Zürich 1912.

WENDLING, EUGEN, Der Fundamentalsatz der Axonometrie. — 96 pp. 8. M. 1:60 geh.

Einl. Der Satz von Pohlke u. seine Voraussetzungen. Der ursprüngl. Beweis von K. Pohlke. Das Prinzip d. Hilfskugel von J. W. Deschwanden u. seine Verallgemeinerung. Eine Vereinfachung d. Beweise. — Ein Hilfssatz. Ueb. die Beweise d. Hilfssatzes. Neuer element. Beweis d. Hilfssatzes. Anwend. d. Hilfssatzes. — Der Beweis von H. Schwarz u. seine Modifikationen. — Der analyt. Beweis von H. Kinkelin. Die projekt. Verallgem. u. Beweise d. Satzes. Der analyt., projekt. Beweis von F. Klein. — Der Pohlke'sche Satz der mehrdimens. Geometrie. — Nachtrag. Schlussbetrachtung. Literatur.

B. G. Teubner.

Leipzig 1913—1914.

AUERBACH, FELIX, Die graphische Darstellung. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erläuterte Einführung in den Sinn und den Gebrauch der Methode. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd 437.) — 97 pp. 8. M. 1:25 geb.

Borel, Emile, Die Elemente der Mathematik. Vom Verf. genehmigte deutsche Ausg. besorgt von Paul Stäckel. Bd 1—2. 1: Arithmetik und Algebra. X+431 pp. 8. M. 8:60 geb.; 2: Geometrie. XII+324 pp. 8. M. 6:40 geb.

1. Dezimale Zählung. Addition u. Substrakt. Multiplikat. d. ganzen Zahlen. Division. Teilbarkeit. Grösster gemeins. Teiler u. kleinstes gem. Vielfaches. Primzahlen. Gewöhnliche Brüche. Dezimalbrüche, angenäherte Quotienten. Quadrat; Quadratwurzel. Anwend. d. Buchstaben; algebr. Ausdrücke. Posit. u. neg. Zahlen. Anwend. d. posit. u. neg. Zahlen; gleichförm. Bewegung. Anfangsgründe d. alg. Rechnung. Gleichungen u. Ungleichheiten v. erst. Grade. Aufgaben v. erst. Grade. Untersuchung d. Binoms erst. Grades; graph. Darstellung. Gleichungen v. zweit. Grade. Aufgab. zweit. Grades. Untersuch. u. graph. Darstellung d. Verlaufs d. homographischen Funktion. Reihen u. Logarithmen. Zinseszinsen. Tafeln.

2. Einleit. Gerade u. Kreis. Die ebene u. die runden Körper. Ähnlichkeit. Flächen- u. Rauminhalte. Anhänge.

Brill, Das Relativitätsprinzip. Eine Einführung in die Theorie. 2. Aufl. — 33 pp. 8. M. 1:20 geh.

Die Forderung. Geometrie der Bewegung. Dynamik.

Dalwigk, F. v., Vorlesungen über darstellende Geometrie. Bd 2: Perspektive, Zentralkollineation u. Grundzüge der Photogrammetrie. Mit 130 Fig. u. 5 Taf. — XI+322 pp. 8. M. 10:— geh.; M. 11:— geb.

Malerische Perspektive: Grundleg. allgem. Betrachtungen aus d. Zentralperspektive. Das Konstruieren mittels d. in der Bildebene umgelegt. Grundrisses. Abbild. eines Hauses. Üb. die zentralkollineare Abbild. des Kreises u. d. Kegelschnitte. Einige Anwend. auf d. synthet. Geometrie. Reliefperspektive. Koordinatenformeln f. d. Perspektive, die ebene Zentralkollineat. u. d. Reliefperspektive. — Grundzüge d. Photogrammetrie. Verschied. Ergänz. zur maler. Perspektive. Einige hist. Angaben.

Denizot, Alfred, Das Foucault'sche Pendel und die Theorie der Relativen Bewegung. — 76 pp. 8. M. 3:— geh.

Entwicklung d. allgem. Gleichungen für relat. Bewegung. Anwend. d. allgem. Gleichungen auf einige einfache Fälle. Bewegung eines Körpers an der Oberfläche d. rotierenden Erde.

Doliarius, Dr., Alle Jahreskalender auf einem Blatt. In Tasche. 30 Pf.

Dressler, H., & Körner, K., Der mathematische Unterricht an den Volksschulen u. Lehrerbildungsanstalten in Sachsen, Thüringen u. Anhalt. (Abhandl. üb. d. math. Unterricht in Deutschland veranlasst durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 5, H. 4.) — V+132 pp. 8. M. 4:80 geh.

FORT & SCHLÖMILCH, Lehrbuch der analytischen Geometrie. T. 2: Analytische Geometrie des Raumes, von O. Schlömilch. 7:e Aufl. bearb. von R. Heger. — VIII+326 pp. 8. M. 6: — geh.; M. 6: 80 geb.

Die Punkte im Raume. Die gerade Linie im Raume. Die ebene Fläche. Die Kugelfläche. Änderung d. Koordinaten. Die Zylinderflächen. Die Kegelflächen. Die Umdrehungsflächen. Die Flächen zweiten Grades. Flächen verschied. Gattung. Analytische Projektionslehre.

FURTWÄNGLER, PH., & RUHM, G., Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser. (Abhandl. veranlasst durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 4, Heft 8.) — VI+50 pp. 8. M. 1: 60.

Landmessung u. Landmesser. Fachzeitschriften. — Der allgem. Ausbildungsgang in den einz. Bundesstaaten. Studienpläne. — Anordnung u. Umfang d. math. Unterrichtsstoffes. Die Mathematik in d. Prüfungsvorschriften. Der Unterricht im geodät. Rechnen. Geschichtlicher Überblick u. Reformbestrebungen.

GANS, RICHARD, Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. 3:e Aufl. Mit 36 Fig. — X+130 pp. 8. M. 3: 40 geh. M. 4: —; geb.

Die element. Operationen d. Vektoranalysis. Die Differentialoperationen d. Vektoranalysis. Krummlinige Koordinaten. Vektorzerlegungen. Mechanische Deformationen. Tensoren. Anwend. aus der Hydrodynamik u. der Elektrodynamik.

GANTER, H., & RUDIO, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. 1: Die analytische Geometrie der Ebene. Mit 53 Fig. 8:e verb. Aufl. — VIII+191 pp. 8. M. 3: — geb.

Der Punkt. Die gerade Linie. Der Kreis. Die Ellipse. Die Hyperbel. Die Parabel.

GUTZMER, A., Die Tätigkeit des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908 bis 1913. — XXI+451 pp. 8.

Bericht üb. die Tätigkeit d. deut. Ausschusses f. d. math. u. naturwiss. Unterricht im Jahre 1908, von A. GUTZMER. — Mathematik u. Naturwissenschaft an d. neugeordnet. höh. Mädchenschulen Preussens. Denkschrift. Zusatz. — Pubertät u. Schule, von A. CRAMER. Aufl. 1. & 2. — Üb. die Notwendigkeit d. Errichtung einer Zentralanstalt f. d. naturwiss. Unterricht, von F. POSKE. — Bericht üb. d. Tätigkeit d. Deut. Ausschusses f. d. math. u. naturwiss. Unterricht im Jahre 1909, von A. GUTZMER. — Üb. Notwendigkeit d. Ausbild. d. Lehrer in Gesundheitspflege, von G. LEUBUSCHER. — Welche Mittelschulvorbildung ist f. d. Studium d. Medizin wünschenswert? von FR. VON MÜLLER. — Ber. üb. d. Tätigkeit d. Deut. Ausschusses im Jahre

1910, von W. LIETZMANN. — Aktuelle Probleme d. Lehrerbildung. Vortrag von F. KLEIN. Grundsätzliches zur Volksschullehrerbildung, von K. MUTHESIUS. — Die Naturwissenschaften u. d. Fortbildungsschulen, von H. E. TIMERDING. — Ber. üb. die Tätigkeit d. Deut. Ausschusses im Jahre 1911, von W. LIETZMANN. — Vorschläge f. d mathemat., naturwiss. u. erdkundlichen Unterricht an Lehrerseminaren. — Der math. u. naturwiss. Unterricht an d. preussischen Lyzeen, Oberlyzeen u. Studienanstalten nach d. Neuordnung von 1908, von F. MÖHLE. — Ber. üb. die Tätigkeit d. Deut. Ausschusses im Jahre 1912, von W. LIETZMANN. — Vorschläge zur Vereinheitlichung d. math. Bezeichnungen im Schulunterricht. — Bericht üb. die Tätigkeit d. Deut. Ausschusses im Jahre 1913, von W. LIETZMANN.

HJELMSLEV, JOHANNES, Darstellende Geometrie. (Handbuch der angew. Mathematik, hrsg. von H. E. TIMERDING, 2.) — IX + 320 pp. 8. M. 5: 40 geh.; M. 6: — geb.

Einfache Projektion. Doppelte Projektion. Parallelprojekt. Axonometrie. Grundlagen u. Methoden d. perspektivischen Darstellung. Elemente d. projekt. Geometrie. Kegelschnitte. Ebene Kurven. Umdrehungsflächen. Kegelschnittflächen. Raumkurven. Abwickelbare Flächen u. and. Hüllflächen. Windschiefe Flächen. Schraubenflächen u. topograph. Flächen. Die Beleuchtung d. Flächen.

KAHLÄNE, ALFRED, Grundzüge der mathematisch-physikalischen Akustik. T. 2. (Math.-physikal. Schrifte, hrsg. von E. Jahnke. 11, 2). — X + 225 pp. 8. M. 5: 40 geh.; M. 6: — geb.

Kinematik d. elastischen Körper. Dynamik d. elast. Körper. Kräfte, Bewegungsgleichungen u. Elastizitätskonstanten. — Eigenschwingungen v. Typus d. Saitenschwingungen bei festen Körpen. Eigenschwing. zylindrischer u. konischer Gassäulen (Pfeifen). Ebene u. kugelförm. Wellen. Transversal- od. Biegungsschwingungen von Stäben. — Eigenschwing. von Membranen. Eigenschwing. von Platten. — Helmholtzsche Theorie der offenen Pfeifen u. kubischen Resonatoren.

KATZ, D., Psychologie und mathematischer Unterricht. (Abhandl. veranlasst durch die IMUK, hrsg. von Klein, Bd 3, Heft 8.) — 120 pp. 8. M. 3: 20.

Vorw. Einleit. Die Entwicklung d. Zahlvorstellung beim Kinde. Anhang. Zahl u. Zählen bei primit. Völkern. Die Entwickl. d. Raumvorstellung beim Kinde. Die Differentielle Psychologie in ihrer Bedeut. f. d. math. Unterricht. Die Mathematik in der Pädagogik d. Mindersinnigen. Anhang. Die geistige Ermüdung u. die Hygiene d. geist. Arbeit. — Zur Psychologie d. math.-technischen u. d. künstlerischen Zeichnens. Zur Ausbildung d. Lehrer in Psychologie u. Pädagogik.

LIETZMANN, W., Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den Preussischen Volks- u. Mittelschulen. (Abhandl. üb. d. math. Unterricht in

Deutschland, veranl. durch die IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 5, H. 6.) — V+106 pp. 8. M. 3: — geh.

LORENTZ, H. A., Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen geh. in Teylers Stiftung zu Haarlem. Bearb. von W. H. Keesom. (Beihefte zur Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht, hrsg. von W. Lietzmann u. E. Grimsehl, Nr 1.) — 52 pp. 8. M. 1: 40.

MAENNCHEN, PHILIPP, Geheimnisse der Rechenkünstler. (Math. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting. 13.) — 48 pp. 8. M. 0: 80.

NETTO, EUGEN, Elementare Algebra. Akademische Vorlesungen für Studierende d. ersten Semester. 2:e Aufl. — X+200 pp. 8. M. 4: 40 geh.; M. 5: — geb.

Die Gleichungen erst. Grades. Die reinen Gleichungen zweit. Grades. Die allgem. Gleichungen zweit. Grades. Kombinatorik. Binomischer u. polynom. Satz. Determinanten. Lineare Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Die reinen Gleichungen n^{ten} Grades. Die Gleichungen dritten Grades. Die Gleich. vierten Grades.

OPPENHEIM, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. (Aus Natur und Geisteswelt. 110.) 2:te Aufl. — 134 pp. 8. M. 1: 25.

Die Anfänge d. Astronomie. Die Astronomie bei d. Griechen. Die Blütezeit d. griechischen Astronomie. Das Mittelalter. Die Neuzeit. Die neueste Zeit.

POINCARÉ, HENRI, Wissenschaft und Methode. Aut. Deutsche Ausg. mit erläuternden Anm. von F. & L. Lindemann. (Wissenschaft und Hypothese. 17.) 3:e Aufl. — 283 pp. 8. M. 5: — geb.

Forscher u. Wissenschaft: Die Auswahl d. Tatsachen. Die Zukunft d. Mathematik. Die mathemat. Erfindung. Der Zufall. — Die mathemat. Schlussweise: Die Relativität d. Raumes. Die mathemat. Definitionen u. d. Unterricht. Mathematik u. Logik. Die neue Logik. Die neuesten Arbeiten d. Logistiker. — Die neue Mechanik: Mechanik u. Radium. Mechanik u. Optik. Die neue Mechanik u. die Astronomie. — Die Wissenschaft d. Astronomie: Milchstrasse u. Gastheorie. Die Geodäsie in Frankreich. Zusammenfassung — Erläuternde Anmerkungen (von F. Lindemann).

ROTHE, RUDOLF, Darstellende Geometrie des Geländes. (Mathemat. Bibliothek. hrsg. von W. Lietzmann & A. Witting. 14.) — 67 pp. 8. M. 0: 80.

Einleit. Grundbegriffe u. element. Konstruktionen ub. kotierte Projektionen. Element. Anwendungen. Darstellung d. Geländeflächen. Aufgaben u. Anwend.

Rudio, Ferdinand, Die Elemente der analytischen Geometrie, zum Gebrauche an höh. Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. T. 2: Die analytische Geometrie des Raumes. Aufl. 5. — X+194 pp. 8. M. 3: — geb.

Vorbereitungen. Fundamentalsätze d. Projektionslehre. Die Raumelemente, bezogen auf ein Koordinatensyst. Die Ebene u. ihre Gleichung. Die gerade Linie u. ihre Gleichungen. Die Kugel. Algem. Bemerkungen üb. die analyt. Darstellung d. Raumgebilde. Kurze Übersicht über einige weitere besonders wicht. Kurven u. Flächen, namentl. solche zweiten Grades.

von Sanden, H., Praktische Analysis. (Handbuch d. angew. Mathematik, hrsg. von H. E. Timerding, I.) Mit 30 Abb. — XIX+185 pp. 8. M. 3: 60 geh.; M. 4: 20 geb.

Vorwort. Allgemeines üb. numerisches u. graphisches Rechnen. Rechenschieber u. Rechenmaschinen. Die ganzen rationalen Funktionen. Extrapolation u. Interpolation einer ganz. rat. Funktion. Interpolat. beliebiger Funktionen. Numerische Differentiation u. Integrat. Mechanische Quadratur. Graph. Integration u. Differentiation. Analyt. Approximation empirischer Funktionen. Auflös. von Gleichungen. Graphische u. numer. Integration von gewöhnl. Differentialgleichungen erst. Ordnung. Graph. u. numer. Integration von gewöhnl. Differentialgleichungen zweit. u. höh. Ordnung.

Schoenflies, Artur, Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen. Umarb. d. im VIII. Bande der Jahresberichte d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung erstatteten Berichts. Gemeinsam mit Hans Hahn hrsg. H. 1: Allgemeine Theorie d. unendlichen Mengen und Theorie der Punktmengen, von Artur Schoenflies. — X+388 pp. 8. M. 16: — geh.; M. 18: — geb.

Die Mächtigkeit oder Kardinalzahl. Die abzählbaren Mengen. Der Grössencharakter u. die Vergleichbarkeit. Nicht abzählbare Mengen. Geordnete Mengen u. Ordnungstypen. Die wohlgeordnet. Mengen u. die Ordnungszahlen. Die zweite Zahlklasse. Allgem. Theorie d. transfiniten Ordnungszahlen. Die Hauptzahlen. Der Wohlordnungssatz. Spezielle Theorie d. lin. geordneten Mengen. Beispiele u. Anwend. — Einige Hilfssätze üb. Grenzpunkt u. Stetigkeit. Die Ableitungen. Struktur u. Mächtigkeit d. Punktmengen. Die abgeschlossenen u. perfekten Mengen. Inhalt u. Messbarkeit d. Punktmengen. Beispiele u. Anwend.

Schott, Sigmund, Statistik. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd 422.) — 130 pp. 8. M. 1: 25 geb.

Wesen u. Aufgabe d. Statistik. Die Träger d. Statistik. Gewinnung u. Ausbeutung d. Zählstoffs. Die Aufmachung d. Ergebnisse. Die Vereinfachung d. Ergebnisse. Die Deutung d. Ergebnisse. Hauptgebiete d. Sozialstatistik. Einige Jahreszahlen zur Entwickl. d. Sozialstatistik, vornehml. in Deutschland.

Schouten, J. A., Grundlagen der Vektor- und Affinoranalysis. Mit einem Einführungswort von F. Klein u. 28 Fig. — VIII + 266 pp. 8. M. 11: — geh.

Einleit. Die assoziativen Zahlensysteme u. ihre Beziehungen zu d. geometrischen Grössen bis zur erst. Ordn. Die Beziehungen der assoziativ. Zahlensysteme zu d. geom. Grössen höherer Ordn. Die Multiplikationsregeln d. Affinoranalysis unabhäng. vom Bezugssyst. Die Dyadenrechnung u. die Beziehungen d. Affinoranalysis zu and. Analysen zweit. Ordn. Die Infinitesimalrechn. in d. Affinoranalysis. Anwendungen.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung. 4. u. 5. Aufl. bearb. von Georg Scheffers. Bd 3: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. Mit 64 Fig. — XIV + 735 pp. 8. M. 13: — geh.; M. 14: — geb.

Übersicht üb. die Arten v. Differentialgleichungen. Existenzbeweise im reellen Bereiche. Gewöhnl. Differentialgleich. erst. Ordnung. Systeme erst. Ordn. v. gewöhnl. Differentialgleichungen. Gewöhnl. Differentialgleich. höherer Ordn. Existenzbeweise im komplexen Bereiche. Syst. erst. Ordn. von lin. part. Differentialgleich. Part. Differentialgleich. erst. Ordn. Einleit. in die Variationsrechn. Geschichtl. Anmerk.

Stäckel, Paul, Wolfgang und Johann Bolyai. Geometrische Untersuchungen. T. 1: Leben und Schriften der beiden Bolyai. T. 2: Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai. (Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, hrsg. von Friedrich Engel u. Paul Stäckel II.) — X + 281 + 274 pp. 8. M. 28: — geh.; M. 32: — geb.

1. Die Familie Bolyai. Wolfgang Bolyais Jugend. W. Bolyai in Deutschland. Freundschaft mit Gauss. Rückkehr in die Heimat. Klausenburg u. Domáld W. Bolyai als Prof. in Maros-Vásárhely. W. Bolyai als Mathematiker. Johann Bolyais Jugend. J. Bolyai auf d. Ingen.-Akad. J. Bolyai im Militärdienst. Die Entdeckung d. abs. Geom. durch J. Bolyai. J. Bolyai in Domáld. Weit. Untersuchungen J. Bolyais zur abs. Geom. W. u. J. Bolyais Arbeiten üb. imaginäre Grössen. J. Bolyai u. N. I. Lobatschefskij. W. Bolyais letzte Jahre. J. Bolyai in Maros-Vásárhely. Math. Untersuch. der Spätzeit. Die Allheillehre J. Bolyais. Schlusswort.

2. Wolfgang Bolyai: Theorie d. Parallelen nebst Nachtrag. Stücke aus dem Tentamen. Kurzer Grundriss eines Versuches. — Johann Bolyai: Appendix. Abhandl. üb. imaginäre Grössen. Raumlere. Anmerk.

Trost, W., Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland. (Abhandl. der IMUK, hrsg. von F. Klein, Bd 4, H. 5.) — VI + 150 pp. 8. M. 4: —.

Witting, Alexander & Gebhardt, Martin, Beispiele zur Geschichte der Mathematik. Ein mathematisch-historisches Lesebuch. T. 2. (Math. Bibliothek, hrsg. von W. Lietzmann und A. Witting. 15.) — VI + 61 pp. 8. M. 0: 80 geb.

Volterra, Vito, Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik, gehalten im Sept. 1909 an der Clark-University. Mit Zusätzen u. Ergänzungen d. Verfassers, Deutsch von Ernst Lamla. Mit 19 Fig. — 181 pp. 8. M. 3: — geh.

Vorschläge zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht. Schriften des Deutschen Ausschusses für d. math. u. naturwiss. Unterricht. Heft 17. — IV + 14 pp. 8. M. 0: 50.

Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität, von M. Planck, P. Debye, W. Nernst, M. v. Smoluchowski, A. Sommerfeld, H. A. Lorentz u. A. (Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen, 6.) — IV + 196 pp. 8. M. 7: — geh.; M. 8: — geb.

D. Hilbert: Vorwort. M. Planck: Die gegenwärt. Bedeutung d. Quantenhypothese f. d. kinet. Gastheorie. P. Debye: Zustandsgleichung u. Quantenhypothese m. einem Anh. üb. Wärmeleit. W. Nernst: Kinetische Theorie fester Körper. M. v. Smoluchowski: Gültigkeitsgrenzen d. zweit. Hauptsatzes d. Wärmetheorie. A. Sommerfeld: Probleme d. freien Weglänge. H. A. Lorentz: Anwend. d. kinet. Theorien auf Elektronenbeweg. H. Kamerlingh-Onnes & W. H. Keesom: Üb. die Translationsenergie in einatom. Gasen beim absolut. Nullpunkt. W. H. Keesom: Üb. die Anvend. d. Quantentheorie auf die Theorie d. freien Elektronen in Metallen.

Voss, A., Über die mathematische Erkenntnis. (Die Kultur der Gegenwart. T. 3: Abt. 1: Lief. 3.) — VI + 144 pp. 8. M. 5: —.

Einleit. Die immanente Erkenntnis in d. reinen Mathematik: Die math. Erkenntnis in psycholog. u. logischer Hinsicht. Die math. Erkenntnis in einigen Hauptgebieten d. rein. Mathematik: Die Analysis d. Endlichen. Die Analysis d. Unendlichen. Die allgem. Operationen. Die Mengenlehre. — Allgem. Betrachtungen üb. die Transienz mathemat. Begriffe. Der transiente Charakter d. Mathematik in ihren hauptsächlichsten Anwendungsgebieten.

—, Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart. Timerding, H. E., Die Verbreitung mathematischen Wissens und mathematischer Auffassung. (Die Kultur der Gegenwart, hrsg. von P. Hinneberg, T. 3: Abt. 1: Die mathematischen Wissenschaften, unter Leit. von F. Klein.) — 161 pp. 8. M. 6: —.

A. Voss, Die Beziehungen d. Math. zur allgem. Kultur. — H. E. Timerding, Die Verbreit. math. Wissens u. math. Auffassung: Einleit. Die mathematische Bildung der Ägypter, der Griechen, d. früh. Mittelalters, in der Zeit d. Scholastizismus, der Renaissance, des 17. u. 18. Jahrhunderts. Der math. Unterricht in Deutschland während des 19. Jahrhunderts. Die Ausgestalt. d. modernen math. Bildungswesens.

Zeuthen, H. G., Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Mit 38 Fig. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf d. Gebiete d. math. Wissenschaften, Bd 39.) — XII + 394 pp. 8. M. 16: geh.; M. 17: — geb.

Zweck u. Begriffe. Üb. die Bestim. d. Anzahl zusammenfallender Lösungen. Die Methode d. Erhaltung d. Anzahl. Geschlechtsätze u. Anwend.: Plücker'sche Formeln. Das Korrespondenzprinzip. Systeme v. Gebilden. Schuberts symbol. Kalkül.

Friedr. Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1913—1914.

Budde, E., Tensoren und Dyaden im dreidimensionalen Raum. Ein Lehrbuch. — XII + 248 pp. 8. M. 6: — geh.; M. 6: 80 geb.

Skalare Tensoren u. Diatensoren speziell als Mittel zur analyt. Behandl. der affin-projektivischen Bewegung. — Tensoren. Der einzelne Diatensor. Additive Eigenschaften, addit. Zerlegung d. Diatensors u. die auf dieselbe gegründ. Transformation d. Raumes. Die Multiplikation d. Diatensoren. Die Faktorenzerlegung u. die auf dieselbe gegründ. Behandlung d. Transformat. d. Raumes. — Die einz. Dyade. Dyadentripel. Hinweise auf Begriffserweiterungen. Anhang. — Fortsetz. d. Untersuchungen über den als symbol. Faktor gedachten Diatensor: Addit. Diatensoren. Derivative Operationen. Vektorfelder u. Diatensoren. Orthogonale krummlinige Koordinaten. — Die Voigtsche Ableitung d. Tensorbegriffes. Selbst. Tensoren u. Diatensoren. Register d. Definitionen.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Bd 4: H. 2: Abt. 1. Unter Mitwirk. von A. A. Dobiasch & A. L. Gerschun. Übers. von H. Pflaum & A. B. Foehringer. Mit 114 Abb. — 446 pp. 8. M. 7: 50 geh.

Einwirk. d. Magnetfeldes auf d. in demselb. befindlichen Körper. Methoden u. Resultate d. Messungen von elekt. Widerständen. Messung d. Stromstärke, elektromotorischen Kraft u. magnet. Feldintensität. — Veränderl. Magnetfeld: Einleit. Induktion. Die Maxwellsche Theorie. Die Grundlagen d. Elektronentheorie. Das Relativitätsprinzip.

Geitel, H., Die Bestätigung der Atomlehre durch die Radioaktivität. Vortrag, gehalten am 16. 11. 1913 zum 50jährigen Stiftungsfeste des Vereins f. Naturwissenschaft in Braunschweig. — 24 pp. 8. M. 0: 80.

Study, E., Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume. Geometrie, Anschauung u. Erfahrung. (Die Wissenschaft, Bd 54.) — IX + 145 pp. 8. M. 4: 50 geh.; M. 5: 20 geb.

Das realist. Weltbild. Die Gegner des Realismus: Idealisten, Positivisten u. Pragmatisten. Die natürl. Geometrie. Die idealist. Raumtheorie. Die realist. Auffassung d. Raumproblems. Ansatz zur Lösung. Erst. Schritt der Hypothesenbildung

Geodät. u. astronom. Messungen. Zweit. Schritt d. Hypothesenbildung. Besprechung von Einwäden. Pragmatist. u. positivist. Ansichten des Raumproblems. Die Axiomatik in d. Geometrie.

Divers.

MÜLLER, F. H., Die Lösung des Fermat'schen Problems. — 4 pp. 4. M. 0: 80. (Selbstverlag. F. H. Müller, Berlin-Friedenau.)

SMOLAŘ, GOTTHARD, Beweis des grossen Fermat'schen Satzes über die Gleichung $a^m + b^m = c^m$. — 25 pp. 8. (Selbstverlag. Im Buchhandel zu beziehen durch Johann Forejtek, Brandeis an d. Elbe [Böhmen].)